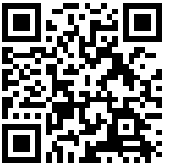
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 001 365 233

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

*XVII. Jahrgang 1906.* *1. Vierteljahr.*

8494-8496

FEB 3 1906

# MONATSHEFTE

FÜR

# MATHEMATIK UND PHYSIK.

---

MIT UNTERSTÜTZUNG DES

HOHEN K. K. MINISTERIUMS FÜR KULTUS UND UNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN VON

G. v. ESCHERICH, F. MERTENS und W. WIRTINGER

IN WIEN.

---

**WIEN, 1906.**

VERLAG DES MATH. SEMINARS DER UNIVERSITÄT WIEN.

IM BUCHHANDEL DURCH J. EISENSTEIN & CO. IN WIEN.

*Bezugspreis: Jährlich 14 K.*

Digitized by Google

# Inhaltsverzeichnis.


Seite

*Lerch, M.*, Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale . . . 3
*Meder, Alfred*, Über die Determinante von Wronski . . . . . 19
*Klug, L.*, Konstruktion der Brennpunkte der ebenen Schnitte eines Kegels zweiter Ordnung . . . . . 44
*Nielsen, Niels*, Über bestimmte Integrale mit der Prymschen Q-Funktion . 47
*Carda, Karl*, Zur Theorie der Jacobischen Differentialgleichung . . . . . 59
*Hahn, Hans*, Über einen Satz von Osgood in der Variationsrechnung . . . 63
*Carda, Karl*, Zur Berechnung der Torsion einer Raumkurve in rationaler Form . . . . . 78


## Literaturberichte.


*Borel, Émile*, Leçons sur les fonctions de variables réelles et les developpements en séries de polynomes . . . . . 3
*Junker, F.*, Physikalische Aufgaben aus dem Gebiet des Magnetismus und der Elektrizität . . . . . 4
*Webster, A. G.*, The Dynamics of particles and of rigid, elastic und fluid bodies . . . . . 5
*Ebert, H.* und *Wiedemann, E.*, Physikalisches Praktikum . . . . . 5
*Poincaré, H.*, Leçons de Mécanique céleste . . . . . 5
*Salmon-Fiedler*, Analytische Geometrie der Kegelschnitte . . . . . 8
*Koenigsberger, Leo*, Carl Gustav Jacob Jacobi, Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages . . . . . 8
*Holzmüller, Gustav, Dr.*, Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik 10
*Barks, Heinrich, Dr.*, Mathematische Hauptsätze . . . . . 10
*Borst, H., Dr.*; *Crantz, P.*; *Haentzschel, E., Dr.*, Mathematischer Leitfaden für Realschulen . . . . . 11
*Müller, H., Kutnewsky, M.*, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie . . . . . 11
*Picard, Émile*, Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences . . . . . 11
*Baire, René*; Leçons sur les founctions discontinues . . . . . 12
*Fisher, Irving*; *Pinkus, N.*, Kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung . . . . . 13
*Schloemilch, Oskar*; *Naetsch, E.*, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis . . . . . 13
*Donle, Dr.*, Lehrbuch der Experimentalphysik . . . . . 13
*Snyder, Karl*; *Kleinpeter, H., Dr.*, Das Weltbild der modernen Naturwissenschaft . . . . . 14
*Laemmel, Rudolf, Dr.*, Die Methoden zur Ermittelung von Wahrscheinlichkeiten . . . . . 14
*Vonderlinn, J.*, Schattenkonstruktionen . . . . . 16


Digitized by Google

# MONATSHEFTE

FÜR

# MATHEMATIK UND PHYSIK.

MIT UNTERSTÜTZUNG DES

HOHEN K. K. MINISTERIUMS FÜR KULTUS UND UNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN VON

G. v. ESCHERICH, F. MERTENS und W. WIRTINGER

IN WIEN.

XVII. JAHRGANG.

WIEN, 1906.
VERLAG DES MATH. SEMINARS DER UNIVERSITÄT WIEN.
IM BUCHHANDEL DURCH J. EISENSTEIN & CO. IN WIEN.

Digitized by Google

Adresse für Manuskripte und Sendungen: Redaktion der Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien, I., Universität, math. Seminar.

91908

K. und K. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska in Teschen.

Digitized by Google

# Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale.

Von **M. Lerch** in Freiburg (Schweiz).

Es sei

$$c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots$$

eine unendliche Reihe irgend welcher Größen, und es werden in üblicher Weise mit $\Delta c_\nu = c_{\nu+1} - c_\nu$, $\Delta^2 c_\nu = \Delta c_{\nu+1} - \Delta c_\nu, \ldots$ $\Delta^n c_\nu = \Delta^{n-1} c_{\nu+1} - \Delta^{n-1} c_\nu$ die sukzessiven Differenzen bezeichnet, so daß bekanntlich z. B.

$$\Delta^n c_0 = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} c_{n-\mu}. \tag{1}$$

Sind die $c_\nu$ so beschaffen, daß die unendliche Reihe

$$\sum_0^\infty \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu$$

konvergiert, so besteht die Identität

$$e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n c_0}{n!} x^n, \tag{2}$$

von welcher namentlich Hermite einige Anwendungen publizierte. Der Beweis von (2) ergibt sich unmittelbar, wenn man in (2) die Exponentialreihe

$$e^{-x} = \sum_0^\infty (-1)^\mu \frac{x^\mu}{\mu!}$$

anwendet und bemerkt, daß der Koeffizient von $x^n$ im Produkt links den Wert

$$\sum_{\mu+\nu=n} (-1)^\mu \frac{c_\nu}{\mu!\ \nu!} = \frac{1}{n!} \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} c_{n-\mu} = \frac{\Delta^n c_0}{n!}$$

hat.



Digitized by Google

Als eine der einfachsten Anwendungen der Relation (2) betrachten wir den Fall

$$c_\nu = \frac{1}{a+\nu};$$

hier ist

$$\Delta^n c_0 = \Delta^n \frac{1}{a} = \frac{(-1)^n n!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)},$$

und wir erhalten

$$(3)\quad \sum_0^\infty \frac{x^\nu}{\nu!\,(a+\nu)} = e^x\left[\frac{1}{a} - \frac{x}{a(a+1)} + \frac{x^2}{a(a+1)(a+2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^3}{a(a+1)(a+2)(a+3)} + \ldots\right]$$

Setzt man hier $x = -\omega$, so entsteht die wohlbekannte mehrfach wiedergefundene Eulersche Beziehung

$$(3')\quad \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu \omega^\nu}{\nu!\,(a+\nu)} = e^{-\omega}\left[\frac{1}{a} + \frac{\omega}{a(a+1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega^2}{a(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{\omega^n}{a(a+1)\ldots(a+n)} + \ldots\right]$$

Dieselbe liefert für unendlich kleine $a$ diejenige Entwicklung des Integrallogarithmus, welche von Schendel besonders erwähnt und neulich von Herrn Nielsen wieder bewiesen wurde.

Um dies zu zeigen, beachten wir, daß in der Entwicklung nach steigenden Potenzen von $a$ das konstante Glied links in (3') lautet

$$\sum_{\nu=1}^\infty \frac{(-1)^\nu \omega^\nu}{\nu!\,\nu},$$

während das konstante Glied in der Entwicklung von

$$\frac{e^{-\omega}\omega^n}{a(a+1)\ldots(a+n)} \text{ durch } -\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{e^{-\omega}\omega^n}{n!}$$

gegeben ist. Also ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^\infty \frac{(-1)^\nu \omega^\nu}{\nu!\,\nu} = -e^{-\omega}\left[\omega + \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\omega^2}{1.2} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{\omega^3}{1.2.3} + \ldots\right.$$
$$(4)\qquad \left. + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{\omega^n}{n!} + \ldots\right].$$

Digitized by Google

Interessantere Beziehungen ergeben sich, wenn man in der bekannten Formel der Differenzenrechnung

$$f(a+\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n f(a)\binom{\xi}{n},\qquad(\Delta a=1),$$

für $\xi$ die Größe $-s$ setzt und dann auf beiden Seiten mit $\Gamma(s)$ multipliziert. Da offenbar

$$\binom{-s}{n}\Gamma(s)=(-1)^n\frac{\Gamma(s+n)}{n!}$$

ist, so kommt

$$\Gamma(s)f(a-s)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Delta^n f(a)}{n!}\Gamma(s+n).\tag{a}$$

Wird hier von der Integraldarstellung

$$\Gamma(s+n)=\int_0^{\infty}x^{s+n-1}e^{-x}\,dx$$

Gebrauch gemacht, so ergibt sich

$$\Gamma(s)f(a-s)=\int_0^{\infty}dx\;x^{s-1}e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Delta^n f(a)}{n!}x^n.$$

Die unter dem Integralzeichen vorkommende unendliche Reihe läßt sich mit Hilfe der Identität (2) umformen, und zwar hat man darin $x$ durch $-x$ zu ersetzen und

$$c_\nu=f(a+\nu)$$

zu wählen. So wird

$$\sum_0^{\infty}(-1)^n\frac{\Delta^n f(a)}{n!}x^n=e^x\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{f(a+\nu)}{\nu!}x^\nu,$$

und wir erhalten die Formel

$$\Gamma(s)f(a-s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}\,dx\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{f(a+\nu)}{\nu!}x^\nu.\tag{5}$$

Dieselbe wird durch die vorliegenden Ausführungen keineswegs begründet, da z. B. die Reihe (a) in den meisten Fällen divergiert; dies kann das Interesse an der Formel jedoch keineswegs beeinträchtigen, nur muß in jedem speziellen Falle ein strenger Beweis geführt werden.

Digitized by Google

Wählen wir z. B.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(x)},$$

so folgt aus (5)

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(a-s)} = \int_0^\infty x^{s-1}\, dx \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^\nu}{\nu!\,\Gamma(a+\nu)},$$

oder wenn man $a$ in $a+1$ verwandelt und von der Zerlegung

$$\Gamma(a+\nu+1) = \Gamma(a).a(a+1)\ldots(a+\nu)$$

Gebrauch macht,

$$(6)\qquad \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(s)}{\Gamma(a+1-s)} = \int_0^\infty x^{s-1}\, dx \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^\nu}{\nu!\; a(a+1)(a+2)\ldots(a+\nu)}.$$

Wählt man insbesondere $a = s$, so kommt

$$(7)\qquad \Gamma(s)^2 = \int_0^\infty x^{s-1}\, dx \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^\nu}{\nu!\; s(s+1)(s+2)\ldots(s+\nu)}.$$

Indem wir nun zur Formel (5) zurückkehren, betrachten wir darin die rechte Seite als den Grenzwert von

$$\int_0^\omega x^{s-1}\, dx \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{f(a+\nu)\,x^\nu}{\nu!} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{f(a+\nu)\,\omega^{s+\nu}}{\nu!\;(s+\nu)}.$$

Wir haben daher das neue Problem, die Grenzformel

$$(5^*)\qquad \lim_{\omega=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f(a+n)\,\omega^{s+n}}{n!\;(s+n)} = \Gamma(s)\,f(a-s)$$

unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen zu begründen.

Die aus der Theorie der Gammafunktion bekannte Grenzformel

$$\lim_{\omega=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{s+n}}{n!\;(s+n)} = \Gamma(s)$$

genügt, um die Formel (5*) für

$$f(x) = a^x,\; x^k,\; \frac{1}{(x-c)^k},\quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

zu verifizieren. Es wird also speziell (5*) richtig sein für sämtliche rationalen Funktionen $f(x)$, sobald der reelle Teil von $a-s$ den-

Digitized by Google

jenigen der sämtlichen Unendlichkeitsstellen von $f(x)$ übertrifft; ist letztere Bedingung nicht erfüllt, so wird der Grenzausdruck unendlich.

Setzen wir

$$f(x) = \frac{\sin x\pi}{x+u},$$

so wird

$$(-1)^n f(a+n) = \frac{\sin a\pi}{a+u+n},$$

und somit wird unser Ausdruck

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f(a+n)\ \omega^{s+n}}{n!\ (s+n)}$$

die Gestalt annehmen

$$G(\omega) = \sin a\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{s+n}}{n!\ (s+n)\ (a+u+n)}$$

oder also

(b)
$$G(\omega) =$$

$$= \frac{\sin a\pi}{a+u-s}\left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{s+n}}{n!\ (s+n)} - \omega^{s-a-u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{a+u+n}}{n!\ (a+u+n)} \right).$$

Ist $a$ eine ganze Zahl, so ist $G(\omega) = 0$, was jedoch von $\Gamma(s)\, f(a-s)$ verschieden ist; in diesem Falle besteht daher die Gleichung (5*) nicht, trotzdem die linke Seite konvergiert.

Ist zweitens $a$ gebrochen oder komplex und werden die reellen Teile von $s$ und $a+u$ positiv angenommen, so lautet der Ausdruck (b)

$$G(\omega) = \frac{\sin a\pi}{a+u-s}\left[ \int_0^{\infty} e^{x}\, x^{s-1}\, dx - \omega^{s-a-u} \int_0^{\omega} e^{x}\, x^{a+u-1}\, dx \right] =$$

$$= \frac{\sin a\pi}{a+u-s}\ \omega^{s} \int_0^{1} e^{\omega x} \left( x^{s-1} - x^{a+u-1} \right) dx,$$

und dieser Ausdruck wird mit $\omega$ unendlich groß, wenigstens für reelle $s$, $a+u$.

Wir können daher für $f(x)$ Funktionen setzen, welche wie hier

$$\frac{\sin x\pi}{x+u}$$

in ihrem ganzen Verlaufe beliebig klein bleiben (für hinreichend große Werte von $u$), ohne daß der Grenzausdruck (5*) zu konvergieren braucht.

Digitized by Google

Ist daher

$$f(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x) + \dots$$

eine unendliche Reihe, für deren sämtliche Glieder die Grenzformel (5*) besteht, so braucht letztere für die Summe $f(x)$ noch nicht zu bestehen.

Die der Funktion $f(x)$ aufzuerlegenden Beschränkungen zu erforschen ist eine Frage, die vorläufig offen bleibt. Ich bemerke nur, daß die Gleichung (6) sich mit Hilfe der in der Theorie der Besselschen Funktionen vorkommenden Integraldarstellungen streng begründen läßt, namentlich wenn der reelle Teil von $a$ größer als $-\frac{1}{2}$ und derjenige von $s$ zwischen Null und $\frac{1}{2}$ enthalten bleibt.

---

Bei der Anwendung des Mittag-Lefflerschen Satzes auf die Untersuchung von konkreten Transzendenten ist manchmal ein Prinzip von großem Nutzen, das ich auf einigen Beispielen klarlegen will. Ich bin auf dasselbe geführt worden durch die Erwägung, daß sich für die von Herrn Prym eingeführte Funktion

$$Q(s) = \Gamma(s) - P(s), \quad P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(s+n)}, \tag{8}$$

durch Anwendung von lediglich funktionentheoretischen Hilfsmitteln die Fundamentaleigenschaften leicht begründen lassen, dagegen aber die Integraldarstellung

$$Q(s) = \int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx \tag{9}$$

bis jetzt ohne Benützung der Gleichung

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx \tag{10}$$

nicht glückte. Indem ich die Γ-Funktion durch das Eulersche Produkt

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}{1+\frac{s}{n}}$$

definiere, dagegen aber die Darstellung (10) nicht voraussetze, will ich, ausgehend von der Definition (8), die Formel (9) erschließen.

Zu dem Zwecke zerlege ich die Funktion

$$\omega^{-s} P(s)$$

Digitized by Google

in ihre beiden Bestandteile nach dem Satze des Herrn Mittag-Leffler; es kommt

$$\omega^{-s} P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^n}{n!\,(s+n)} + \text{ganze Funktion},$$

und infolgedessen, wenn man mit $\omega^s$ multipliziert,

$$P(s) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{s+n}}{n!\,(s+n)} + \text{ ganze Funkt.};$$

dies gibt an die Hand, die Prymsche Zerlegung durch die folgende zu ersetzen:

$$\Gamma(s) = P(s,\ \omega) + Q(s,\ \omega), \tag{11}$$

wobei

$$P(s,\ \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{s+n}}{n!\,(s+n)} \tag{12}$$

und $Q(s, \omega)$ eine ganze Funktion von $s$ ist. Das Vorhanden des Parameters $\omega$ gestattet nun, $Q(s, \omega)$ als Funktion von $\omega$ zu untersuchen, um dann für $\omega = 1$ die Prymsche Funktion zu erhalten. Es folgt aus (12) durch Differentiation nach $\omega$

$$\frac{\partial P}{\partial \omega} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{s+n-1}}{n!} = e^{-\omega}\, \omega^{s-1},$$

und infolgedessen aus (11)

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega} = -\, e^{-\omega}\, \omega^{s-1},$$

Hieraus folgt offenbar

$$Q(s,\ \omega) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx + f(s),$$

und es bleibt noch die von $\omega$ unabhängige ganze Funktion $f(s)$ zu bestimmen.

Wir setzen zu dem Zwecke

$$\overline{Q}(s,\ \omega) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx, \tag{13}$$

und gehen zur Bestimmung der Funktion $f(s)$ über. Es ist

$$\Gamma(s) - f(s) = P(s,\ \omega) + \overline{Q}(s,\ \omega).$$

Digitized by Google

Nun ergibt sich aus (13) nach einer partiellen Integration

$$(\alpha) \qquad \overline{Q}(s, \omega) = -\frac{\omega^s e^{-\omega}}{s} + \frac{1}{s}\overline{Q}(s+1, \omega),$$

ferner folgt aus der Darstellung

$$P(s, \omega) = e^{-\omega}\left(\frac{\omega^s}{s} + \frac{\omega^{s+1}}{s(s+1)} + \frac{\omega^{s+2}}{s(s+1)(s+2)} + \dots\right)$$

die Beziehung

$$(\beta) \qquad P(s, \omega) = \frac{\omega^s e^{-\omega}}{s} + \frac{1}{s}P(s+1, \omega).$$

Aus $(\alpha)$ und $(\beta)$ folgt durch Addition

$$P(s, \omega) + \overline{Q}(s, \omega) = \frac{P(s+1, \omega) + \overline{Q}(s+1, \omega)}{s}$$

das heißt

$$\Gamma(s) - f(s) = \frac{\Gamma(s+1) - f(s+1)}{s},$$

und hieraus

$$(14) \qquad f(s+1) = s f(s).$$

Setzt man

$$\Phi(s) = \frac{f(s)}{\Gamma(s)},$$

so ist $\Phi(s)$ eine ganze Funktion und $\Phi(s+1) = \Phi(s)$; infolgedessen hat man eine in der ganzen $s$-Ebene gültige Entwicklung

$$(15) \qquad \Phi(s) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\nu s\pi i};$$

wir zeigen, daß die sämtlichen Koeffizienten in derselben Null sind, wodurch man $f(s) = 0$ erhält und damit die gewünschte Darstellung von $Q$ vollendet sein wird.

Ich setze nun $s = 1 + a + ib$, $0 \leqq a \leqq 1$, und beachte, daß alsdann

$$|P(s, \omega)| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{n+a+1}}{(n+1)!}, \quad |\overline{Q}(s, \omega)| < \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^a \, dx;$$

infolgedessen ist

$$|P(s, \omega) + \overline{Q}(s, \omega)| < M,$$

Digitized by Google

wenn $M$ eine weder von $a$ noch von $b$ abhängende Größe bedeutet, und daher

$$(16) \quad |\Gamma(s) - f(s)| < M; \quad (s = 1 + a + ib,\ 0 \leqq a \leqq 1).$$

Nun ist

$$\Gamma(1+a+ib) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a+ib}}{1+\frac{a+ib}{n}},$$

der absolute Betrag also

$$|\Gamma(1+a+ib)| = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a}}{1+\frac{a}{n}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{(a+n)^2}}}$$

Da

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{b^2}{(a+n)^2}\right) < \prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{b^2}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{|b|\pi} - e^{-|b|\pi}}{2|b|\pi} < \frac{1}{2\pi|b|} e^{|b\pi|},$$

so folgt

$$(17) \quad \left|\frac{1}{\Gamma(1+a+ib)}\right| < \frac{A}{\sqrt{|b|}} e^{|b|\frac{\pi}{2}}, \quad (0 \leqq a \leqq 1, \quad |b| > 0),$$

wobei $A$ eine von $a$ und $b$ unabhängige Größe ist.

Dividiert man nun (16) auf beiden Seiten mit $|\Gamma(1+a+ib)|$, so kommt demnach

$$|\Phi(1+a+ib) - 1| < \frac{M}{|\Gamma(1+a+ib)|} < \frac{AM}{\sqrt{|b|}} e^{|b|\frac{\pi}{2}}.$$

Nun ist in (15)

$$|c_\nu| < \frac{\mathfrak{M}}{e^{-2\nu b\pi}} \quad (\nu \gtrless 0),$$

wenn $\mathfrak{M}$ den Maximalwert von $\Phi(s) - 1$ für $s = x + ib$ bei konstantem $b$ bedeutet. Wählt man $b$ negativ und hinreichend groß, so wird der Quotient

$$\frac{\mathfrak{M}}{e^{-2\nu b\pi}} < \frac{AM}{\sqrt{|b|}} e^{\pi b\left(2\nu - \frac{1}{2}\right)}$$

Digitized by Google

beliebig klein für $\nu > 0$ und daher $c_\nu = 0$ für $\nu > 0$; ebenso ist $c_\nu = 0$ für $\nu < 0$, und wäre $c_0$ von Null verschieden, so hätte man

$$\Phi(s) = c_0, \quad f(s) = c_0 \Gamma(s),$$

und dies erfordert wiederum $c_0 = 0$, da sonst $f(s)$ keine ganze Funktion wäre. Es ist also $f(s) = 0$ und wir haben die Gleichungen

$$(18) \quad Q(s, \omega) = \int_\omega^\infty e^{-x} x^{s-1} dx, \quad \Gamma(s) = P(s, \omega) + Q(s, \omega).$$

Ist der reelle Teil von $s$ positiv, so ist $\lim_{\omega=0} \omega^s = 0$ und also auch $\lim_{\omega=0} P(s, \omega) = 0$, so daß man die Gleichung

$$\Gamma(s) = \lim_{\omega=0} \int_\omega^\infty e^{-x} x^{s-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

erhält.

---

Es sei nun $\Phi(s)$ eine Funktion, die in der ganzen Ebene den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, oder vielmehr derjenige Teil der Mittag-Lefflerschen Darstellung, der sich von einer solchen Funktion bloß um eine ganze Transzendente unterscheidet; die Funktion $\Phi(s)$ ist eine in der ganzen Ebene gleichmäßig konvergierende Reihe von rationalen Funktionen, so beschaffen, daß jeder Unendlichkeitsstelle von $\Phi(s)$ ein Glied der Reihe entspricht. Ist z. B. $-a$ eine Unendlichkeitsstelle von $\Phi(s)$, so ist das derselben entsprechende Glied der Reihe ein Aggregat von Gliedern wie

$$\Psi(s) = \frac{1}{(s+a)^m},$$

wozu noch eine ganze rationale Funktion hinzukommen kann.

Nun ist aber, falls $\omega$ eine positive reelle Größe bedeutet,

$$\omega^{-s} \Psi(s) = \omega^a \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu (\log \omega)^\nu}{\nu! \, (s+a)^{m-\nu}} + \text{ganze Funkt. } (s),$$

und somit auch

$$\Psi(s) = \Psi(s, \omega) + \text{ganze Funkt. } (s),$$

wenn

$$\Psi(s, \omega) = \omega^{s+a} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu (\log \omega)^\nu}{\nu! \, (s+a)^{m-\nu}}$$

gesetzt wird.

Digitized by Google

Führt man nun in die Entwicklung $\Phi(s)$ an Stelle der Elemente $\Psi(s)$ die entsprechenden Ausdrücke $\Psi(s, \omega)$ ein, so entsteht eine neue Funktion $\Phi(s, \omega)$, und diese hat die Eigenschaft, daß die partielle Ableitung

$$\frac{\partial \Phi(s, \omega)}{\partial \omega} = f(s, \omega)$$

eine ganze Funktion von $s$ ist, und es wird daher $\Phi(s, \omega)$ als analytische Fortsetzung eines Integrals

$$\int_a f(s, \omega)\, d\, a$$

aufgefaßt werden können, sobald $\Phi(s, a)$ identisch verschwindet.

---

Auf die eben auseinandergesetzte Weise lassen sich namentlich diejenigen Entwicklungen umformen, welche Hermite in Anschluß an den Satz des Herrn Mittag-Leffler abgeleitet hat. Es sei z. B

$$F(s) = \Gamma(s)\, \Gamma(s + a),$$

und $a$ keine ganze Zahl. Die Unendlichkeitsstellen von $F(s)$ sind durchaus einfach, und zwar von der Form

$$s_0 = -m, \quad s_1 = -a - n, \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die entsprechenden Residuen lauten

$$R_0 = (-1)^m \frac{\Gamma(a - m)}{m!} = \frac{1}{m!\, \Gamma(m + 1 - a)} \frac{\pi}{\sin a\, \pi},$$

$$R_1 = \frac{(-1)^n \Gamma(-a - n)}{n!} = -\frac{1}{n!\, \Gamma(n + 1 + a)} \cdot \frac{\pi}{\sin a\, \pi};$$

die durch den Mittag-Lefflerschen Satz erzeugte Entwicklung wäre also

$$\Phi(s) = \frac{\pi}{\sin a\, \pi} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\, \Gamma(m + 1 - a)(s + m)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, \Gamma(n + 1 + a)(s + a + n)} \right\}$$

und der Unterschied

$$F(s) - \Phi(s)$$

ist eine ganze Transzendente. Unser Verfahren besteht nun in der Bildung der Funktion

Digitized by Google

$$\Phi(s,\ \omega) = \frac{\pi}{\sin a\,\pi}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\omega^{s+m}}{m!\ \Gamma(m+1-a)(s+m)} - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^{s+a+n}}{n!\ \Gamma(n+1+a)(s+a+n)}\right\}. \tag{19}$$

Für dieselbe ist

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\Phi(s,\ \omega) = \frac{\pi}{\sin a\,\pi}\omega^{s-1}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\omega^{m}}{m!\ \Gamma(m+1-a)} - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^{a+n}}{n!\ \Gamma(n+1+a)}\right\}.$$

Wird nun mit $E(z,\ u)$ die Besselsche Funktion

$$E(z,\ u) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{m}}{m!\ \Gamma(u+m+1)}$$

bezeichnet, so lautet die letzte Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\Phi(s,\ \omega) = \frac{\pi}{\sin a\,\pi}\omega^{s-1}[E(\omega,\ -a) - \omega^{a}E(\omega,\ a)],$$

und hieraus

$$\Phi(s,\ \omega) = \frac{\pi}{\sin a\,\pi}\int_{0}^{\omega} z^{s-1}\,[E(z,\ -a) - z^{a}\,E(z,\ a)]\,dz, \tag{20}$$

sobald der reelle Teil von $s$ positiv ist, weil die Funktion $\Phi(s, \omega)$ unter dieser Annahme mit $\omega$ verschwindet.

Hier drängt sich die Frage nach der Existenz der Grenze

$$\lim_{\omega=\infty}\Phi(s,\ \omega)$$

auf, weil letztere vermutlich mit $F(s)$ zusammenfällt oder mindestens mit $F(s)$ eng zusammenhängt.

Um letzterer Frage näher zu treten, setze ich im Integral (20) $z = x^2$, und im Resultat

$$\Phi(s,\ \omega) = \frac{2\pi}{\sin a\,\pi}\int_{0}^{\sqrt{\omega}} x^{2s-1}\,dx\,[E(x^2,\ -a) - x^{2a}\,E(x^2,\ a)]$$

benütze ich die Integraldarstellung der $E$-Funktion

$$E(x^2,\ u) =$$

$$= x^{-u}\left\{-\frac{\sin u\,\pi}{\pi}\int_{0}^{1} e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)}\,t^{u-1}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x\cos\vartheta}\cos u\,\vartheta\,d\vartheta\right\}.$$

Digitized by Google

Nach Einführung dieser Darstellung zieht sich unser Ausdruck wie folgt zusammen

$$\Phi(s,\omega)=2\int_0^{\sqrt{\omega}}x^{2s+a-1}\,dx\int_0^1 e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)}\left(t^a+t^{-a}\right)\frac{dt}{t}$$

oder nach Umkehrung der Integrationenfolge (welche gestattet ist, falls der reelle Teil von $2s+a$ positiv ist)

$$(21)\quad \Phi(s,\omega)=2\int_0^1\left(t^a+t^{-a}\right)\frac{dt}{t}\int_0^{\sqrt{\omega}}e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)}x^{2s+a-1}\,dx.$$

Hier ist nun klar, daß der in Frage stehende Grenzwert existiert, und zwar ist

$$(22)\quad \lim_{\omega=\infty}\Phi(s,\omega)=2\int_0^1\left(t^a+t^{-a}\right)\frac{dt}{t}\int_0^{\infty}e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)}x^{2s+a-1}\,dx=\Psi(s).$$

Die innere Integration ist unmittelbar ausführbar und gibt

$$\Psi(s)=2\,\Gamma(2s+a)\int_0^1\frac{t^a+t^{-a}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^{2s+a}}\frac{dt}{t}$$

oder

$$\Psi(s)=2\Gamma(2s+a)\left[\int_0^1\frac{t^{2a+2s-1}\,dt}{(t^2+1)^{2s+a}}+\int_0^1\frac{t^{2s-1}\,dt}{(t^2+1)^{2s+a}}\right]$$

oder wenn in den Integralen $t^2=\frac{1}{x}$, resp. $t^2=x$ gesetzt wird,

$$\Psi(s)=\Gamma(2s+a)\left[\int_1^{\infty}\frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{2s+a}}+\int_0^1\frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{2s+a}}\right],$$

so daß schließlich

$$\Psi(s)=\Gamma(2s+a)\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{2s+a}}=\Gamma(s)\,\Gamma(a+s).$$

Der Grenzausdruck (22) stellt also tatsächlich die ursprüngliche Funktion

$$F(s)=\Gamma(s)\,\Gamma(s+a)$$

dar, sobald die reellen Teile der Größen $s$ und $2s+a$ positiv sind, und wir haben außer der Formel

Digitized by Google

$$(23)\quad \Gamma(s)\,\Gamma(s+a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\int_0^\infty x^{s-1}\,dx\,[E(x,\,-a) - x^a\,E(x,\,a)]$$

folgende Darstellungen für die ganze Funktion

$$(24)\qquad G(x) = \Gamma(s)\,\Gamma(s+a) - \Phi(s,\,\omega):$$

$$(24^1)\qquad G(x) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\int_\omega^\infty x^{s-1}\,dx\,[E(x,\,-a) - x^a\,E(x,\,a)],$$

$$(24^2)\qquad G(x) = 2\int_0^1 \frac{(t^{2a}+1)\,t^{2s-1}}{(t^2+1)^{2s+a}}\,Q\left(2s+a,\,\frac{t^2+1}{t}\sqrt{\omega}\right)dt.$$

Es ist nicht uninteressant in (23) den Grenzfall $a=0$ zu erledigen.

Da für $a=0$

$$\frac{\partial}{\partial a}E(x,\,-a) = \sum_{m=0}^\infty \frac{\Psi(m+1)}{m!\,m!}\,x^m,$$

wenn

$$\Psi(u) = \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}$$

gesetzt wird, so kommt

$$(25)\quad \Gamma(s)^2 = \int_0^\infty x^{s-1}\,dx\left[2\sum_0^\infty \frac{\Psi(m+1)}{m!\,m!}\,x^m - \log x\,.\,E(x,\,0)\right].$$

Noch einfacher schreibt sich das Resultat, das sich aus (24) und $(24^2)$ für $a=0$ ergibt:

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}&\Gamma(s)^2 - \sum_{m=0}^\infty\left[\frac{\omega^{s+m}}{m!\,m!\,(s+m)^2} + \frac{2\,\Psi(m+1) - \log\omega}{m!\,m!\,(s+m)}\,\omega^{s+m}\right] =\\ &\qquad = 4\int_0^1 \frac{t^{2s-1}\,dt}{(t^2+1)^{2s}}\,Q\left(2s,\,\frac{t^2+1}{t}\sqrt{\omega}\right).\end{aligned}\right.$$

Schreibt man hier $\omega = \frac{u^2}{4}$ und setzt

$$t + \frac{1}{t} = 2x,\quad t = x - \sqrt{x^2-1},\quad \frac{dt}{t} = -\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

so lautet die rechte Seite

Digitized by Google

$$(26^1) \qquad 4^{1-s} \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2s}\sqrt{x^2-1}}\, Q(2s,\ ux),$$

und diese Größe hat demnach den Wert

$$(26^2) \qquad \Gamma(s)^2 - \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{u^{2s+2m}}{4^{s+m}\, m!\, m!\, (s+m)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\Psi(m+1) - 2\log\frac{u}{2}}{4^{s+m}\, m!\ m!\ (s+m)}\, u^{2s+2m} \right].$$

Für unendlich kleine $s$ ergibt sich hieraus

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Gamma'(1)^2 + \Gamma''(1) - 2\left[2\Gamma'(1) - \log\frac{u}{2}\right]\log\frac{u}{2} - \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 + 2m\,\Psi(m+1) - 2m\log\frac{u}{2}}{4^m\, m!\ m!\ m^2}\, u^{2m} = \\ &= 4\int_1^\infty Q(0,\ ux)\,\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned} \right.$$

Beachtet man, daß

$$dQ(0,\ ux) = -e^{-ux}\,\frac{dx}{x},$$

so ergibt eine partielle Integration als den Wert der rechten Seite

$$(27^1) \qquad 4\int_1^\infty \frac{\log(x+\sqrt{x^2-1})}{x}\, e^{-ux}\, dx.$$

Für $s=1$ wird der Ausdruck $(26^1)$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}\, Q(2,\ ux);$$

wegen

$$\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = d\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, \qquad dQ(2,\ ux) = -e^{-ux}\,u^2 x\, dx$$



Digitized by Google

ergibt eine partielle Integration, wenn man zu gleicher Zeit mit $(26^2)$ vergleicht:

$$u^2 \int_1^\infty \sqrt{x^2-1}\, e^{-ux}\, dx =$$

(28)

$$= 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{u^{2m}}{4^m\, m!\, m!} + 2m \frac{\Psi(m) - \log \frac{u}{2}}{4^m\, m!\, m!}\, u^{2m} \right].$$

Digitized by Google

# Über die Determinante von Wronski.

Von **Alfred Meder** in Riga.

**1.** Es seien $u_1, u_2, \ldots u_\varkappa$ Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen $t$, für die wir das Vorhandensein von Differentialquotienten nach $t$ bis zu einer so hohen Ordnung hinauf annehmen, als sie in unseren Entwicklungen auftreten. Bezeichnen wir diese Differentialquotienten durch Akzente, so hat bekanntlich die folgende Determinante den Namen der Wronskischen erhalten:

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_\varkappa \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_\varkappa' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(\varkappa-1)} & u_2^{(\varkappa-1)} & \ldots & u_\varkappa^{(\varkappa-1)} \end{vmatrix}.$$

Wir werden es im folgenden hauptsächlich mit Unterdeterminanten der Determinante $D$ zu tun haben, deren Elemente den ersten aufeinanderfolgenden Horizontalreihen entnommen sind. Wir wollen daher für diese Unterdeterminanten besondere Bezeichnungen einführen, nämlich $u_{l,m,\ldots r}$ für diejenige Subdeterminante, die aus den Elementen der $l^{\text{ten}}$, $m^{\text{ten}}, \ldots r^{\text{ten}}$ Vertikalreihe und der $\alpha$ ersten Horizontalreihen der Determinante $D$ gebildet wird, wenn $\alpha$ die Anzahl der Größen $l, m, \ldots r$ ist:

$$(1) \qquad u_{l,m,\ldots r} = \begin{vmatrix} u_l & u_m & \ldots & u_r \\ u_l' & u_m' & \ldots & u_r' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_l^{(\alpha-1)} & u_m^{(\alpha-1)} & \ldots & u_r^{(\alpha-1)} \end{vmatrix}.$$

Im Speziellen deckt sich dann der Ausdruck für $u$ mit einem einzigen Index $u_l$ mit dem $l^{\text{ten}}$ Gliede der ersten Zeile der Determinante $D$ und es ist $u_{1,2,\ldots\varkappa} = D$.

**2.** Es mögen für irgend einen speziellen Wert $t_0$ der unabhängigen Variablen $t$ und bei jedem Wert von $l$ die Gleichungen bestehen:

$$(2) \qquad u_l = u_l' = \cdots = u_l^{(\nu_l - 1)} = 0, \quad u_l^{(\nu_l)} \neq 0.$$



Digitized by Google

Dann verschwinden für diesen Wert von $t$ alle Determinanten

$$u_{l,m} = \begin{vmatrix} u_l & u_m \\ u_l' & u_m' \end{vmatrix}$$

nebst ihren $2\nu_1 - 1$ ersten Ableitungen, während die $2\nu_1^{\text{ten}}$ Ableitungen von Null verschieden sein können.

In der Tat erhält man für eine beliebige, etwa die $i^{\text{te}}$ Ableitung von $u_{l,m}$:

$$u_{l,m}^{(i)} = \sum \varkappa_\lambda^{(i)} \begin{vmatrix} u_l^{(\lambda)} & u_m^{(\lambda)} \\ u_l^{(i+1-\lambda)} & u_m^{(i+1-\lambda)} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

wo $\varkappa_\lambda^{(i)}$ einen numerischen, positiven, nur von $i$ und $\lambda$, nicht aber von $l$ und $m$ abhängigen Koeffizienten bezeichnet und die Summe über alle ganzzahligen Werte $\lambda$ zu erstrecken ist, die den Ungleichungen

$$0 \leqq \lambda < i + 1 - \lambda \tag{4}$$

genügen, wobei wir unter $u_l^{(0)}$ den Wert $u_l$ selbst verstehen.

Wegen der Bedingungen (2) und der Ungleichungen (4) kann der Ausdruck $u_{l,m}^{(i)}$ an der Stelle $t = t_0$ nur dann von Null verschieden sein, wenn wir haben

$$\lambda \geqq \nu_1, \quad i + 1 - \lambda \geqq \nu_1 + 1,$$

woraus sich für $i$ ergibt

$$i \geqq 2\nu_1,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Aus der Gleichung (3) ergibt sich im Zusammenhang mit den Bedingungen (2) für die Stelle $t = t_0$:

$$u_{l,m}^{(2\nu_1)} = \varkappa_{\nu_1}^{(2\nu_1)} \begin{vmatrix} u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} \\ u_l^{(\nu_1+1)} & u_m^{(\nu_1+1)} \end{vmatrix}.$$

Aus diesem Ausdruck ist ersichtlich, daß es im Falle des Verschwindens von $u_{l,m}^{(2\nu_1)}$ von Null verschiedene von $t$ unabhängige Größen $a_1$ und $b_1$ gibt, welche das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 u_l^{(\nu_1)} + b_1 u_m^{(\nu_1)} &= 0, \\ a_1 u_l^{(\nu_1+1)} + b_1 u_m^{(\nu_1+1)} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

für $t = t_0$ befriedigen. Ist aber die Determinante $u_{l,m}^{(2\nu_1)}$ nicht gleich Null, so können die beiden Gleichungen (5) nicht gleichzeitig für von Null verschiedene Werte von $a_1$ und $b_1$ bestehen.

Digitized by Google

Bilden wir jetzt unter der weiteren Voraussetzung, daß für $t = t_0$ auch noch

$$u_{l,m}^{(2\nu_1)} = 0$$

ist, die folgende Ableitung von $u_{l,m}$:

$$u_{l,m}^{(2\nu_1+1)} = \sum \varkappa_\lambda^{(2\nu_1+1)} \begin{vmatrix} u_l^{(\lambda)} & u_m^{(\lambda)} \\ u_l^{(2\nu_1+2-\lambda)} & u_m^{(2\nu_1+2-\lambda)} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

so verschwinden in ihr, für $t = t_0$, wegen der Bedingungen (2) alle Summanden, für welche $\lambda < \nu_1$ ist, der ganze Ausdruck (6) reduziert sich auf ein einziges Glied:

$$u_{l,m}^{(2\nu_1+1)} = \varkappa_{\nu_1}^{(2\nu_1+1)} \begin{vmatrix} u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} \\ u_l^{(\nu_1+2)} & u_m^{(\nu_1+2)} \end{vmatrix}.$$

Ist dieser Ausdruck gleich Null, so tritt zu den Gleichungen (5) noch die folgende hinzu:

$$a_1 u_l^{(\nu_1+2)} + b_1 u_m^{(\nu_1+2)} = 0. \tag{7}$$

Ist dagegen $u_{l,m}^{(2\nu_1+1)}$ von Null verschieden, so muß auch

$$a_1 u_l^{(\nu_1+2)} + b_1 u_m^{(\nu_1+2)}$$

von Null verschieden sein.

So fortfahrend, habe man gezeigt, daß, wenn an der Stelle $t = t_0$ für jedes Wertepaar $l, m$ die Gleichungen

$$u_{l,m}^{(2\nu_1)} = u_{l,m}^{(2\nu_1+1)} = \cdots = u_{l,m}^{(\nu_2-1)} = 0 \tag{8}$$

bestehen, es von $t$ unabhängige und von Null verschiedene Größen $a_1$, $b_1$ gibt, die das folgende Gleichungssystem für $t = t_0$ erfüllen:

$$\begin{aligned} a_1 u_l^{(\nu_1)} + b_1 u_m^{(\nu_1)} &= 0, \\ a_1 u_l^{(\nu_1+1)} + b_1 u_m^{(\nu_1+1)} &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_1 u_l^{(\nu_2-\nu_1)} + b_1 u_m^{(\nu_2-\nu_1)} &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

wie es in der Tat für $\nu_2 = 2\nu_1 + 1$ und $\nu_2 = 2\nu_1 + 2$ gezeigt worden ist.

Bilden wir dann

$$u_{l,m}^{(\nu_2)} = \sum \varkappa_\lambda^{(\nu_2)} \begin{vmatrix} u_l^{(\lambda)} & u_m^{(\lambda)} \\ u_l^{(\nu_2+1-\lambda)} & u_m^{(\nu_2+1-\lambda)} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

Digitized by Google

so verschwinden auf der rechten Seite an der Stelle $t = t_0$ wegen der Bedingungen (2) alle Summanden bis auf diejenigen, in welchen

$$\lambda \geqq \nu_1$$

ist, und von diesen können wegen der Gleichungen (9) nur solche übrig bleiben, für welche wir haben:

$$\nu_2 + 1 - \lambda \geqq \nu_2 - \nu_1 + 1;$$

der ganze Ausdruck (10) reduziert sich auf das eine Glied

$$u_{l,m}^{(\nu_2)} = \varkappa_{\nu_1}^{(\nu_2)} \begin{vmatrix} u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} \\ u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} \end{vmatrix}.$$

Da $u_l^{(\nu_1)}$ und $u_m^{(\nu_1)}$ der Voraussetzung nach von Null verschieden sind, so folgt hieraus in Verbindung mit der ersten der Gleichungen (9), daß, je nachdem $u_{l,m}^{(\nu_2)}$ an Stelle $t = t_0$ gleich Null oder von Null verschieden ist, für diese Stelle die Gleichung

$$a_1 u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} + b_1 u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} = 0$$

besteht oder nicht.

**3.** Wir haben somit folgendes Resultat gefunden:
Ist für jeden Wert von $l$ und $m$ an der Stelle $t = t_0$:

$$(11) \qquad u_l = u_l' = \cdots = u_l^{(\nu_1-1)} = 0, \quad u_l^{(\nu_1)} \neq 0,$$

$$(12) \qquad u_{l,m} = u_{l,m}' = \cdots = u_{l,m}^{(\nu_2-1)} = 0, \quad u_{l,m}^{(\nu_2)} \neq 0,$$

so muß

$$\nu_2 \geqq 2\,\nu_1$$

sein und es besteht bei ebenfalls beliebigen Wertepaaren $l$, $m$ an dieser Stelle für von Null verschiedene Größen $a_1$, $b_1$ das Gleichungssystem

$$(13) \qquad \begin{aligned} a_1 u_l^{(\nu_1)} \quad &+ b_1 u_m^{(\nu_1)} \quad = 0, \\ a_1 u_l^{(\nu_1+1)} \quad &+ b_1 u_m^{(\nu_1+1)} \quad = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 u_l^{(\nu_2-\nu_1)} \quad &+ b_1 u_m^{(\nu_2-\nu_1)} \quad = 0, \\ a_1 u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} &+ b_1 u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} = 0. \end{aligned}$$

Die Größen $a_1$, $b_1$ hängen natürlich von den Zahlen $l$, $m$ ab, doch sind der Kürze wegen keine entsprechenden Indizes hinzugefügt worden.

Digitized by Google

Betrachten wir jetzt die Determinante dritter Ordnung

$$u_{l,m,n} = \begin{vmatrix} u_l & u_m & u_n \\ u_l' & u_m' & u_n' \\ u_l'' & u_m'' & u_n'' \end{vmatrix}.$$

Eine beliebige, etwa die $i^{\text{te}}$ Ableitung von $u_{l,m,n}$ hat die Gestalt

$$(14)\quad u^{(i)}_{l,m,n} = \sum \varkappa^{(i)}_{\lambda,\mu} \begin{vmatrix} u_l^{(\lambda)} & u_m^{(\lambda)} & u_n^{(\lambda)} \\ u_l^{(\mu)} & u_m^{(\mu)} & u_n^{(\mu)} \\ u_l^{(i+3-\lambda-\mu)} & u_m^{(i+3-\lambda-\mu)} & u_n^{(i+3-\lambda-\mu)} \end{vmatrix},$$

wo $\varkappa^{(i)}_{\lambda,\mu}$ einen numerischen, positiven, nur von $i$, $\lambda$, $\mu$, nicht aber von $l$, $m$, $n$ abhängigen Koeffizienten bezeichnet und die Summe über alle ganzzahligen Werte $\lambda$, $\mu$ zu erstrecken ist, die den Ungleichungen

$$(15)\quad 0 \leqq \lambda < \mu < i+3-\lambda-\mu$$

genügen.

An der Stelle $t = t_0$ verschwindet $u_{l,m,n}$ wegen der Bedingungen (11) und von $u^{(i)}_{l,m,n}$ können nur diejenigen Summanden übrig bleiben, für welche

$$\lambda \geqq \nu_1$$

ist. Von diesen wiederum können wegen der Gleichungen (13) nur diejenigen von Null verschieden sein, für welche

$$\mu \geqq \nu_2 - \nu_1 + 1$$

ist. Hierzu kommt noch infolge der Bedingung (15) die Ungleichung

$$i+3-\lambda-\mu \geqq \nu_2 - \nu_1 + 2.$$

Aus diesen drei Bedingungen ergibt sich für von Null verschiedene Summanden des Ausdrucks (14):

$$i \geqq 2\nu_2 - \nu_1.$$

Es verschwindet also an der Stelle $t = t_0$ die Determinante $u_{l,m,n}$ nebst ihren $2\nu_2 - \nu_1 - 1$ ersten Ableitungen, die $2\nu_2 - \nu_1^{\text{te}}$ Ableitung reduziert sich auf ein einziges Glied:

$$u^{(2\nu_2-\nu_1)}_{l,m,n} = \varkappa^{(2\nu_2-\nu_1)}_{\nu_1,\nu_2-\nu_1+1} \begin{vmatrix} u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} & u_n^{(\nu_1)} \\ u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_n^{(\nu_2-\nu_1+1)} \\ u_l^{(\nu_2-\nu_1+2)} & u_m^{(\nu_2-\nu_1+2)} & u_n^{(\nu_2-\nu_1+2)} \end{vmatrix}.$$

Digitized by Google

Hieraus ist ersichtlich, daß, je nachdem $u_{l,m,n}^{(2\nu_2-\nu_1)}$ an der Stelle $t=t_0$ verschwindet oder nicht, das Gleichungssystem

$$(16)\qquad \begin{aligned} &a_2 u_l^{(\nu_1)} + b_2 u_m^{(\nu_1)} + c_2 u_n^{(\nu_1)} = 0,\\ &a_2 u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} + b_2 u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} + c_2 u_n^{(\nu_2-\nu_1+1)} = 0,\\ &a_2 u_l^{(\nu_2-\nu_1+2)} + b_2 u_m^{(\nu_2-\nu_1+2)} + c_2 u_n^{(\nu_2-\nu_1+2)} = 0 \end{aligned}$$

an dieser Stelle durch von Null verschiedene Werte von $a_2, b_2, c_2$ befriedigt werden kann oder nicht. Daß in der Tat alle drei Größen $a_2$, $b_2$, $c_2$ von Null verschieden sind, ergibt sich daraus, daß dieselben nach den ersten beiden Gleichungen (16) den nachstehenden Determinanten proportional sind:

$$(17)\qquad a_2 : b_2 : c_2 =$$

$$\begin{vmatrix} u_m^{(\nu_1)} & u_n^{(\nu_1)} \\ u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_n^{(\nu_2-\nu_1+1)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_n^{(\nu_1)} & u_l^{(\nu_1)} \\ u_n^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} \\ u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} \end{vmatrix},$$

welche ihrerseits, wie aus dem System (13) in Verbindung mit der Ungleichung (11) hervorgeht, nicht den Wert Null haben können.

Dieses System (16) kann, wie eine einfache Betrachtung zeigt, durch das folgende ersetzt werden:

$$(18)\qquad \begin{aligned} &a_2 u_l + b_2 u_m + c_2 u_n = 0,\\ &a_2 u_l' + b_2 u_m' + c_2 u_n' = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &a_2 u_l^{(\nu_2-\nu_1+2)} + b_2 u_m^{(\nu_2-\nu_1+2)} + c_2 u_n^{(\nu_2-\nu_1+2)} = 0. \end{aligned}$$

Daß das Hinzufügen der ersten $\nu_1$ Gleichungen dieses Systems statthaft ist, folgt unmittelbar aus den Gleichungen (11). Es braucht also nur gezeigt zu werden, daß die Gleichung

$$(19)\qquad a_2 u_l^{(\mu)} + b_2 u_m^{(\mu)} + c_2 u_n^{(\mu)} = 0$$

an der Stelle $t=t_0$ für jeden Wert von $\mu$ besteht, der der Ungleichung

$$\nu_1 < \mu < \nu_2 - \nu_1 + 1$$

genügt.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} & u_n^{(\nu_1)} \\ u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_n^{(\nu_2-\nu_1+1)} \\ u_l^{(\mu)} & u_m^{(\mu)} & u_n^{(\mu)} \end{vmatrix}$$

hat für $t=t_0$ den Wert Null, denn es verschwinden nach den Gleichungen (13) ihre sämtlichen Unterdeterminanten zweiter Ord-

Digitized by Google

nung, die sich durch Unterdrückung der zweiten Zeile ergeben. Man kann daher drei von Null verschiedene Größen $A$, $B$, $C$ bestimmen, welche die für $t = t_0$ gebildeten Gleichungen

$$(20)\qquad \begin{aligned} &A\,u_l^{(\nu_1)} &&+ B\,u_m^{(\nu_1)} &&+ C\,u_n^{(\nu_1)} &&= 0,\\ &A\,u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} &&+ B\,u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} &&+ C\,u_n^{(\nu_2-\nu_1+1)} &&= 0,\\ &A\,u_l^{(\mu)} &&+ B\,u_m^{(\mu)} &&+ C\,u_n^{(\mu)} &&= 0 \end{aligned}$$

befriedigen. Aus den ersten beiden von diesen Gleichungen ergibt sich

$$A : B : C =$$

$$= \begin{vmatrix} u_m^{(\nu_1)} & u_n^{(\nu_1)} \\ u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_n^{(\nu_2-\nu_1+1)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_n^{(\nu_1)} & u_l^{(\nu_1)} \\ u_n^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} \\ u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} \end{vmatrix}.$$

Wir haben aber gesehen (17), daß $a_2$, $b_2$, $c_2$ denselben Determinanten proportional und diese Determinanten von Null verschieden sind; wir haben daher

$$A : B : C = a_2 : b_2 : c_2$$

und hieraus ergibt sich in Verbindung mit der letzten Gleichung (20) die zu beweisende Relation (19).

**4.** Es sei unter Beibehaltung der bisherigen Voraussetzungen (11) und (12) gefunden worden, daß, wenn für jede drei Werte von $l$, $m$, $n$ an der Stelle $t = t_0$ die Gleichungen

$$u_{l,m,n}^{(2\nu_2-\nu_1)} = u_{l,m,n}^{(2\nu_2-\nu_1+1)} = \cdots = u_{l,m,n}^{(\nu_3-1)} = 0$$

bestehen, die folgenden Gleichungssysteme an derselben Stelle durch von Null verschiedene Größen $a_2$, $b_2$, $c_2$ befriedigt werden:

$$(21)\qquad \begin{aligned} &a_2\,u_l &&+ b_2\,u_m &&+ c_2\,u_n &&= 0,\\ &a_2\,u_l' &&+ b_2\,u_m' &&+ c_2\,u_n' &&= 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots &&\cdots\cdots\cdots &&\cdots\cdots\cdots\cdots &&\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&&&&&\\ &a_2\,u_l^{(\nu_3-\nu_1+1)} &&+ b_2\,u_m^{(\nu_3-\nu_2+1)} &&+ c_2\,u_n^{(\nu_3-\nu_2+1)} &&= 0, \end{aligned}$$

wie es nach dem vorhergehenden für $\nu_3 = 2\nu_2 - \nu_1 + 1$ der Fall ist. Die Größen $a_2$, $b_2$, $c_2$ hängen natürlich von den Zahlen $l$, $m$, $n$ ab, doch sind wiederum der Kürze wegen keine Indizes hinzugefügt worden.

Bilden wir jetzt nach der Formel (14) die $\nu_3^{\text{te}}$ Ableitung von $u_{l,m,n}$:

Digitized by Google

$$(22)\quad u_{l,m,n}^{(\nu_3)} = \sum \varkappa_{\lambda,\mu}^{(\nu_3)} \begin{vmatrix} u_l^{(\lambda)} & u_m^{(\lambda)} & u_n^{(\lambda)} \\ u_l^{(\mu)} & u_m^{(\mu)} & u_n^{(\mu)} \\ u_l^{(\nu_3+3-\lambda-\mu)} & u_m^{(\nu_3+3-\lambda-\mu)} & u_n^{(\nu_3+3-\lambda-\mu)} \end{vmatrix}.$$

An der Stelle $t = t_0$ können wegen der Bedingungen (11) nur solche Summanden von Null verschieden sein, für welche

$$\lambda \geqq \nu_1$$

ist, wegen der Bedingungen (13) nur solche, für welche

$$\mu \geqq \nu_2 - \nu_1 + 1,$$

und endlich wegen der Bedingungen (21) nur solche, für welche

$$\nu_3 + 3 - \lambda - \mu \geqq \nu_3 - \nu_2 + 2$$

ist. Man sieht leicht, daß in diesen drei Ungleichungen nur die Gleichheitszeichen bestehen können, der ganze Ausdruck (22) reduziert sich daher auf ein einziges Glied:

$$u_{l,m,n}^{(\nu_3)} = \varkappa_{\nu_1,\nu_2-\nu_1+1}^{(\nu_3)} \begin{vmatrix} u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} & u_n^{(\nu_1)} \\ u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_n^{(\nu_2-\nu_1+1)} \\ u_l^{(\nu_3-\nu_2+2)} & u_m^{(\nu_3-\nu_2+2)} & u_n^{(\nu_3-\nu_2+2)} \end{vmatrix}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem System (21) und den Ungleichungen (11) und (13), so sieht man sofort, daß die Summe

$$a_2\, u_l^{(\nu_3-\nu_2+2)} + b_2\, u_m^{(\nu_3-\nu_2+2)} + c_2\, u_n^{(\nu_3-\nu_2+2)}$$

gleich Null oder von Null verschieden ist, je nachdem $u_{l,m,n}^{(\nu_3)}$ verschwindet oder nicht.

**5.** Es sei jetzt allgemein an der Stelle $t = t_0$ für alle nur möglichen Werte von $l, m, n, \ldots r$:

$$\begin{aligned}
&u_l = u_l' = \cdots = u_l^{(\nu_1-1)} = 0, \quad u_l^{(\nu_1)} \neq 0;\\
&u_{l,m} = u_{l,m}' = \cdots = u_{l,m}^{(\nu_2-1)} = 0, \quad u_{l,m}^{(\nu_2)} \neq 0;\\
&u_{l,m,n} = u_{l,m,n}' = \cdots = u_{l,m,n}^{(\nu_3-1)} = 0, \quad u_{l,m,n}^{(\nu_3)} \neq 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_{l,m,\ldots r} = u_{l,m,\ldots r}' = \cdots = u_{l,m,\ldots r}^{(\nu_\alpha-1)} = 0, \quad u_{l,m,\ldots r}^{(\nu_\alpha)} \neq 0.
\end{aligned}$$

Es sei bewiesen, wie wir es für $\alpha = 3$ getan haben, daß die Zahlen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots \nu_\alpha$ die Ungleichungen erfüllen:

$$\nu_2 \geqq 2\,\nu_1,\ \nu_3 \geqq 2\,\nu_2 - \nu_1,\ \ldots\ \nu_\alpha > 2\,\nu_{\alpha-1} - \nu_{\alpha-2}.$$

Digitized by Google

Es sei ferner bewiesen, wie ebenfalls für $\alpha = 3$ gezeigt worden ist, daß dann für $t = t_0$ die folgenden Systeme von Gleichungen und Ungleichungen für von Null verschiedene Werte von $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2, \ldots$ bei beliebig gegebenen $l, m, n, \ldots r$ bestehen:

$$
\begin{aligned}
& a_1 u_l + b_1 u_m = 0, \\
& a_1 u_l' + b_1 u_m' = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_1 u_l^{(\nu_2-\nu_1)} + b_1 u_m^{(\nu_2-\nu_1)} = 0, \\
& a_1 u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} + b_1 u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} = 0;
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
& a_2 u_l + b_2 u_m + c_2 u_n = 0, \\
& a_2 u_l' + b_2 u_m' + c_2 u_n' = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_2 u_l^{(\nu_3-\nu_2+1)} + b_2 u_n^{(\nu_3-\nu_2+1)} + c_2 u_n^{(\nu_3-\nu_2+1)} = 0, \\
& a_2 u_l^{(\nu_3-\nu_2+2)} + b_2 u_m^{(\nu_3-\nu_2+2)} + c_2 u_n^{(\nu_3-\nu_2+2)} = 0;
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
\begin{aligned}
& a_{\alpha-1} u_l + b_{\alpha-1} u_m + \cdots + g_{\alpha-1} u_r = 0, \\
& a_{\alpha-1} u_l' + b_{\alpha-1} u_m' + \cdots + g_{\alpha-1} u_r' = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{\alpha-1} u_l^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-2)} + b_{\alpha-1} u_m^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-2)} + \cdots + g_{\alpha-1} u_r^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-2)} = 0, \\
& a_{\alpha-1} u_l^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)} + b_{\alpha-1} u_m^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)} + \cdots + g_{\alpha-1} u_r^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)} = 0.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Auch in diesen Formeln hängen natürlich die Koeffizienten $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2, \ldots$ von den jeweiligen Werten von $l, m, n, \ldots$ ab, was ebenso, wie in den speziellen Fällen $\alpha = 2$, $\alpha = 3$ nicht besonders angedeutet ist.

Wir bilden jetzt die Determinante $\alpha + 1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$
u_{l,m,\ldots s} = \begin{vmatrix} u_l & u_m \cdots u_s \\ u_l' & u_m' \cdots u_s' \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_l^{(\alpha)} & u_m^{(\alpha)} \cdots u_s^{(\alpha)} \end{vmatrix}.
$$

Digitized by Google

Eine beliebige, etwa die $i^{\text{te}}$ Ableitung derselben hat die Gestalt:

$$(26)\qquad u^{(i)}_{l,m,\dots s} = \sum \varkappa^{(i)}_{\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_\alpha} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} u_l^{(\lambda_1)} & u_m^{(\lambda_1)} & \dots & u_s^{(\lambda_1)} \\ u_l^{(\lambda_2)} & u_m^{(\lambda_2)} & \dots & u_s^{(\lambda_2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_l^{(\lambda_\alpha)} & u_m^{(\lambda_\alpha)} & \dots & u_s^{(\lambda_\alpha)} \\ u_l^{(i+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}-\lambda_1-\dots-\lambda_\alpha)} & u_m^{(i+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}-\lambda_1-\dots-\lambda_\alpha)} & \dots & u_s^{(i+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}-\lambda_1-\dots-\lambda_\alpha)} \end{vmatrix},$$

wo $\varkappa^{(i)}_{\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_\alpha}$ einen numerischen, positiven, nur von $i, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\alpha$, nicht aber von $l, m, \dots s$ abhängigen Koeffizienten bezeichnet und die Summe über alle Werte von $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\alpha$ zu erstrecken ist, die den Ungleichungen

$$(27)\quad 0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_\alpha < i + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_\alpha$$

genügen.

An der Stelle $t = t_0$ ist $u_{l,m,\dots s} = 0$ und von $u^{(i)}_{l,m,\dots s}$ können wegen der am Anfang dieser Nummer formulierten Bedingungen und der Ungleichungen (27) nur diejenigen Summanden von Null verschieden sein, für welche wir haben:

$$\lambda_1 \geqq \nu_1, \lambda_2 \geqq \nu_2 - \nu_1 + 1, \lambda_3 \geqq \nu_3 - \nu_2 + 2, \dots \lambda_\alpha \geqq \nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha - 1,$$

$$i + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_\alpha \geqq \nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha.$$

Hieraus ergibt sich, daß der Ausdruck (26) nur dann von Null verschiedene Summanden besitzt, wenn

$$(28)\qquad i \geqq 2\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1}$$

ist. Es verschwindet also an der Stelle $t = t_0$ die Determinante $u_{l,m,\dots s}$ nebst ihren $2\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} - 1$ ersten Ableitungen. Die $2\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1}{}^{\text{te}}$ Ableitung reduziert sich auf ein einziges Glied:

$$u^{(2\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1})}_{l,m,\dots s} = \varkappa^{(2\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1})}_{\nu_1,\nu_2-\nu_1+1,\dots\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} & \dots & u_s^{(\nu_1)} \\ u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} & \dots & u_s^{(\nu_2-\nu_1+1)} \\ u_l^{(\nu_3-\nu_2+2)} & u_m^{(\nu_3-\nu_2+2)} & \dots & u_s^{(\nu_3-\nu_2+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_l^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)} & u_m^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)} & \dots & u_s^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)} \\ u_l^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha)} & u_m^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha)} & \dots & u_s^{(\nu_\alpha-\dots+\alpha)} \end{vmatrix}.$$

Digitized by Google

Hieraus ist ersichtlich, daß nur in dem Falle, daß an der Stelle $t = t_0$

$$u_{l, m, \dots s}^{(2\nu_\alpha - \nu_\alpha - 1)} = 0$$

ist, das Gleichungssystem

(29)
$$\begin{array}{llll}
a_\alpha u_l^{(\nu_1)} & + b_\alpha u_m^{(\nu_1)} & + \cdots + h_\alpha u_s^{(\nu_1)} & = 0, \\
a_\alpha u_l^{(\nu_2 - \nu_1 + 1)} & + b_\alpha u_m^{(\nu_2 - \nu_1 + 1)} & + \cdots + h_\alpha u_s^{(\nu_2 - \nu_1 + 1)} & = 0, \\
a_\alpha u_l^{(\nu_3 - \nu_2 + 2)} & + b_\alpha u_m^{(\nu_3 - \nu_2 + 2)} & + \cdots + h_\alpha u_s^{(\nu_3 - \nu_2 + 2)} & = 0, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_\alpha u_l^{(\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha - 1)} & + b_\alpha u_m^{(\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha - 1)} & + \cdots + h_\alpha u_s^{(\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha - 1)} & = 0, \\
a_\alpha u_l^{(\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha)} & + b_\alpha u_m^{(\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha)} & + \cdots + h_\alpha u_s^{(\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha)} & = 0
\end{array}$$

für $t = t_0$ durch von Null verschiedene Größen $a_\alpha$, $b_\alpha$, ... $h_\alpha$ befriedigt werden kann.

**6.** Dieses Gleichungssystem (29) kann durch das folgende ersetzt werden:

$$\begin{array}{llll}
a_\alpha u_l & + b_\alpha u_m & + \cdots + h_\alpha u_s & = 0, \\
a_\alpha u_l' & + b_\alpha u_m' & + \cdots + h_\alpha u_s' & = 0, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_\alpha u_l^{(\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha)} & + b_\alpha u_m^{(\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha)} & + \cdots + h_\alpha u_s^{(\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha)} & = 0.
\end{array}$$

Die $\nu_1$ ersten von diesen Gleichungen ergeben sich einfach daraus, daß alle Größen $u_l$ nebst ihren $\nu_1 - 1$ ersten Ableitungen für $t = t_0$ verschwinden. Wir brauchen also nur zu zeigen, daß man zu dem System (29) die Gleichung

(30)
$$a_\alpha u_l^{(\mu)} + b_\alpha u_m^{(\mu)} + \cdots + h_\alpha u_s^{(\mu)} = 0$$

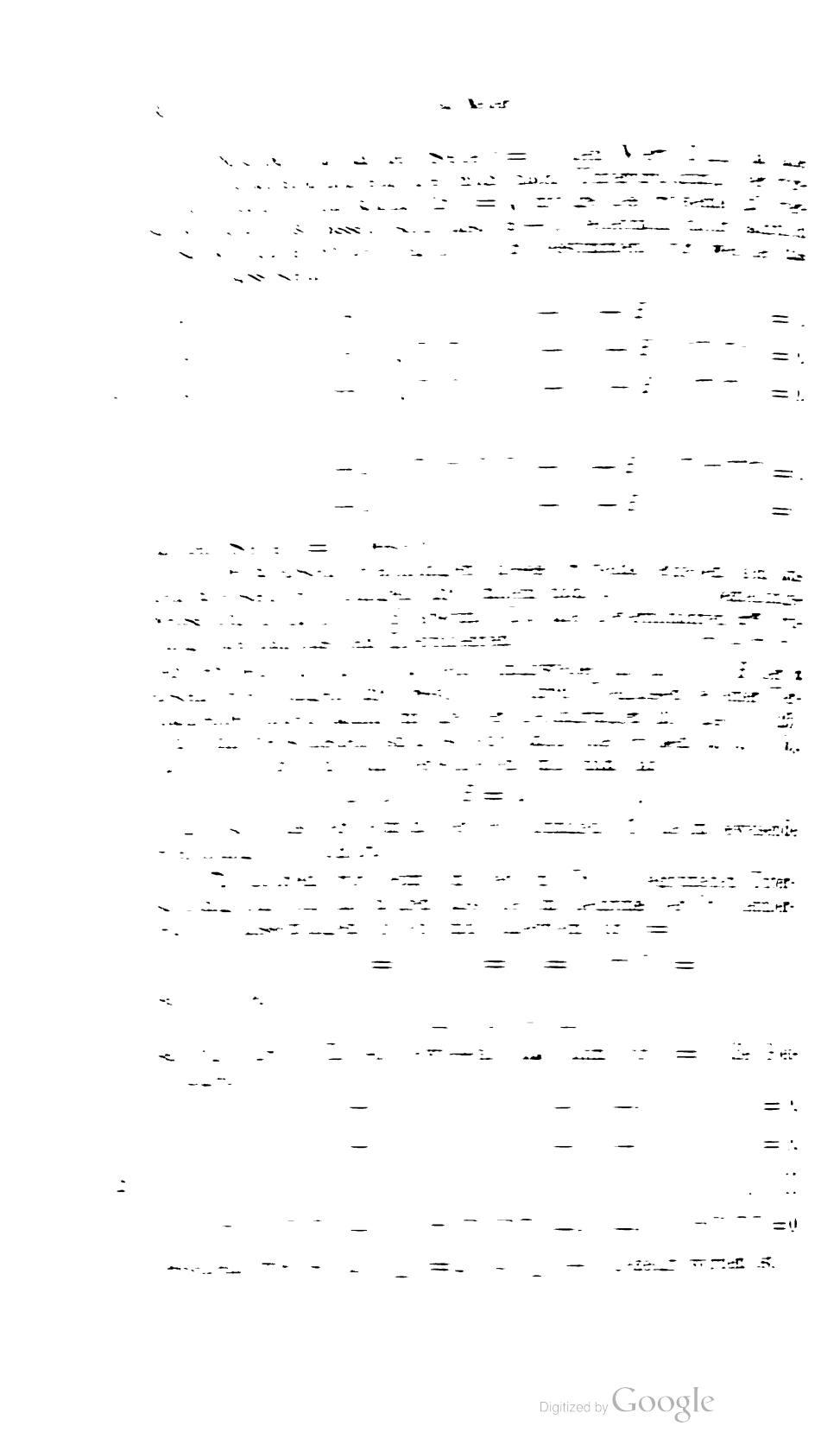
hinzufügen darf für jeden Wert von $\mu$, der größer als $\nu_1$, kleiner als $\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha - 1$ und nicht einer der folgenden Größen gleich ist:

$$\nu_2 - \nu_1 + 1,\ \nu_3 - \nu_2 + 2,\ \cdots \nu_{\alpha-1} - \nu_{\alpha-2} + \alpha - 2.$$

Wir betrachten die Determinante

$$\begin{vmatrix}
u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} & \cdots u_s^{(\nu_1)} \\
u_l^{(\nu_2 - \nu_1 + 1)} & u_m^{(\nu_2 - \nu_1 + 1)} & \cdots u_s^{(\nu_2 - \nu_1 + 1)} \\
u_l^{(\nu_3 - \nu_2 + 2)} & u_m^{(\nu_3 - \nu_2 + 2)} & \cdots u_s^{(\nu_3 - \nu_2 + 2)} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
u_l^{(\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha - 1)} & u_m^{(\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha - 1)} & \cdots u_s^{(\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha - 1)} \\
u_l^{(\mu)} & u_m^{(\mu)} & \cdots u_s^{(\mu)}
\end{vmatrix}$$

Digitized by Google



Digitized by Google

Bilden wir dann nach der Formel (26) den Ausdruck $u_{l,m,\ldots s}^{(\nu_\alpha+1)}$, so können für $t=t_0$ auf der rechten Seite nur solche Summanden von Null verschieden sein, für welche wir haben

$$\lambda_1 \geqq \nu_1, \lambda_2 \geqq \nu_2 - \nu_1 + 1, \lambda_3 \geqq \nu_3 - \nu_2 + 2, \cdots \lambda_\alpha \geqq \nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \alpha - 1,$$

$$\nu_{\alpha+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_\alpha \geqq \nu_{\alpha+1} - \nu_\alpha + \alpha,$$

wie aus den am Anfang der Nr. 5 formulierten Bedingungen und den Gleichungen (32) hervorgeht. In den letzten Ungleichungen können, wie durch Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\alpha$ folgt, nur die Gleichheitszeichen gelten, der gesuchte Ausdruck reduziert sich auf ein einziges Glied:

$$u_{l,m,\ldots s}^{(\nu_\alpha+1)} = \varkappa_{\nu_1, \nu_2-\nu_1+1, \ldots \nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1}^{(\nu_\alpha+1)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} & \cdots & u_s^{(\nu_1)} \\ u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} & \cdots & u_s^{(\nu_2-\nu_1+1)} \\ u_l^{(\nu_3-\nu_2+2)} & u_m^{(\nu_3-\nu_2+2)} & \cdots & u_s^{(\nu_3-\nu_2+2)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ u_l^{(\nu_\alpha+1-\nu_\alpha+\alpha)} & u_m^{(\nu_\alpha+1-\nu_\alpha+\alpha)} & \cdots & u_s^{(\nu_\alpha+1-\nu_\alpha+\alpha)} \end{vmatrix}.$$

Wir erkennen hieraus sofort mit Hilfe der Gleichungen (32), daß die beiden Ausdrücke

$$u_{l,m,\ldots s}^{(\nu_\alpha+1)} \text{ und } a_\alpha u_l^{(\nu_\alpha+1-\nu_\alpha+\alpha)} + b_\alpha u_m^{(\nu_\alpha+1-\nu_\alpha+\alpha)} + \cdots + h_\alpha u_s^{(\nu_\alpha+1-\nu_\alpha+\alpha)}$$

entweder gleichzeitig verschwinden oder gleichzeitig von Null verschieden sind.

Die hiermit aus den am Anfang der Nr. 5 formulierten Voraussetzungen abgeleiteten Folgerungen ergeben sich aus diesen Voraussetzungen, wenn man $\alpha$ durch $\alpha+1$ ersetzt. Da nun die genannten Voraussetzungen für $\alpha=3$ gelten, wie in Nr. 3 und Nr. 4 ausführlich bewiesen ist, so gelten sie auch allgemein für jeden beliebigen Wert der positiven ganzen Zahl $\alpha$.

**8.** Die Gleichungssysteme (23), (24), ... (25) kann man durch Elimination der Größen $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2, \ldots$ auch in anderer Gestalt darstellen.

Beginnen wir mit dem System (23). Die Ausdrücke $u_l, u_m, u_l', u_m', \ldots u_l^{(\nu_1-1)}, u_m^{(\nu_1-1)}$ sind der Voraussetzung nach gleich Null. Sind alle Größen $u_l^{(\nu_1)}, u_m^{(\nu_1)}, \cdots u_l^{(\nu_2-\nu_1)}, u_m^{(\nu_2-\nu_1)}$ von Null verschieden, was bei den ersten beiden sicher der Fall ist, so ergibt sich aus dem System (23):

Digitized by Google

$$(33) \qquad u_l^{(\nu_1)} : u_m^{(\nu_1)} = u_l^{(\nu_1+1)} : u_m^{(\nu_1+1)} = \cdots = u_l^{(\nu_2-\nu_1)} : u_m^{(\nu_2-\nu_1)},$$

während das Verhältnis

$$u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} : u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)}$$

von den vorhergehenden verschieden sein muß und auch die beiden Ausdrücke

$$u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} \text{ und } u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)}$$

nicht gleichzeitig Null sein können.

Da die Gleichungen (23) für jeden Wert von $l$ und $m$ gelten, so findet dasselbe bei den aus ihnen hergeleiteten Relationen (33) statt und wir erhalten

$$(34) \qquad u_1^{(\nu_1)} : u_2^{(\nu_1)} : \cdots : u_\varkappa^{(\nu_1)} = u_1^{(\nu_1+1)} : u_2^{(\nu_1+1)} : \cdots : u_\varkappa^{(\nu_1+1)} = \cdots$$

$$\cdots = u_1^{(\nu_2-\nu_1)} : u_2^{(\nu_2-\nu_1)} : \cdots : u_\varkappa^{(\nu_2-\nu_1)},$$

während infolge der Ungleichung des Systems (23) die Verhältnisse

$$u_1^{(\nu_2-\nu_1+1)} : u_2^{(\nu_2-\nu_1+1)} : \cdots : u_\varkappa^{(\nu_2-\nu_1+1)}$$

sicher von den vorhergehenden ihnen entsprechenden verschieden sind und von den einzelnen Gliedern

$$u_1^{(\nu_2-\nu_1+1)}, u_2^{(\nu_2-\nu_1+1)}, \cdots u_\varkappa^{(\nu_2-\nu_1+1)}$$

höchstens ein einziges den Wert Null haben kann.

Es ist natürlich auch möglich, daß für gewisse Werte von $\rho$, die dem Intervall

$$\nu_1 < \rho < \nu_2 - \nu_1 + 1$$

angehören, an der Stelle $t = t_0$

$$u_l^{(\varrho)} = 0$$

ist. In diesem Falle reduziert sich die Gleichung

$$A_l u_l^{(\varrho)} + A_i u_i^{(\varrho)} = 0,$$

die nach dem System (23) bei jedem Werte von $i$ für von Null verschiedene Größen $A_l$, $A_i$ besteht, auf

$$A_i u_i^{(\varrho)} = 0$$

oder

$$u_i^{(\varrho)} = 0,$$

d. h. es verschwinden dann an der Stelle $t = t_0$ alle Ausdrücke

$$u_1^{(\varrho)}, u_2^{(\varrho)}, \cdots u_\varkappa^{(\varrho)}.$$

Digitized by Google

Für solche Werte $\rho$ ist die Schlußfolgerung, die zu den Proportionen (34) führte, nicht statthaft, wir wollen jedoch auch in diesem Falle die Folgerungen aus den Gleichungen (23) in der Form (34) schreiben. Wir haben dieses dann so zu verstehen, daß alle diese Verhältnisse

$$u_1^{(\varrho)} : u_2^{(\varrho)} : \cdots : u_\varkappa^{(\varrho)}$$

aus dem System (34) wegzulassen und anstatt dessen zu demselben die Gleichungen

$$u_1^{(\varrho)} = u_2^{(\varrho)} = \cdots = u_\varkappa^{(\varrho)} = 0$$

für die betreffenden Werte von $\rho$ hinzuzufügen sind.

**9.** Gehen wir jetzt zu dem allgemeinen Falle, nämlich zu dem System (25) über. Wir bilden die Determinante $\alpha - 1^{\text{ter}}$ Ordnung $u_{l,m,\ldots q}^{(\nu_\alpha - 1)}$, welche der Voraussetzung nach für $t = t_0$ von Null verschieden ist. Sie reduziert sich für diesen Wert von $t$ auf ein einziges Glied:

$$(35) \qquad u_{l,m,\ldots q}^{(\nu_\alpha - 1)} = \varkappa_{\nu_1, \nu_2 - \nu_1 + 1, \ldots \nu_{\alpha-2} - \nu_{\alpha-3} + \alpha - 3}^{(\nu_\alpha - 1)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} & \cdots & u_q^{(\nu_1)} \\ u_l^{(\nu_2 - \nu_1 + 1)} & u_m^{(\nu_2 - \nu_1 + 1)} & \cdots & u_q^{(\nu_2 - \nu_1 + 1)} \\ u_l^{(\nu_3 - \nu_2 + 2)} & u_m^{(\nu_3 - \nu_2 + 2)} & \cdots & u_q^{(\nu_3 - \nu_2 + 2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_l^{(\nu_{\alpha-2} - \nu_{\alpha-3} + \alpha - 3)} & u_m^{(\nu_{\alpha-2} - \nu_{\alpha-3} + \alpha - 3)} & \cdots & u_q^{(\nu_{\alpha-2} - \nu_{\alpha-3} + \alpha - 3)} \\ u_l^{(\nu_{\alpha-1} - \nu_{\alpha-2} + \alpha - 2)} & u_m^{(\nu_{\alpha-1} - \nu_{\alpha-2} + \alpha - 2)} & \cdots & u_q^{(\nu_{\alpha-1} - \nu_{\alpha-2} + \alpha - 2)} \end{vmatrix}$$

Betrachten wir das System (25) als System von Gleichungen für die $\alpha$ unbekannten Größen $a_{\alpha-1}, b_{\alpha-1}, \ldots g_{\alpha-1}$, so erkennen wir, daß die Determinante auf der rechten Seite des Ausdrucks (35) die Determinante der Koeffizienten von $a_{\alpha-1}, b_{\alpha-1}, \ldots f_{\alpha-1}$ (wenn das $f_{\alpha-1}$ enthaltende Glied dem Gliede mit $g_{\alpha-1}$ vorhergeht) in gewissen $\alpha - 1$ Gleichungen des Systems (25) ist.

Bilden wir jetzt, für $t = t_0$, die $\nu_{\alpha-1}{}^{\text{ten}}$ Ableitungen der übrigen Determinanten $\alpha - 1^{\text{ter}}$ Ordnung, die sich durch Unterdrückung je eines Index der Reihe $l, m, \cdots q, r$ ergeben, so erhält man mit Hilfe der Gleichungen (25) die Proportionen

$$(36) \quad u_{m,n,\ldots r}^{(\nu_\alpha - 1)} : u_{l,n,\ldots r}^{(\nu_\alpha - 1)} : \cdots : u_{l,m,\ldots q}^{(\nu_\alpha - 1)} = a_{\alpha-1} : -b_{\alpha-1} : \cdots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1}.$$

Für die folgenden Ableitungen von $u_{l,m,\ldots q}$ bis zur Ordnung $\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \nu_{\alpha-2}$ inklusive ergeben sich, wie eine leichte Betrachtung zeigt, an der Stelle $t = t_0$ Ausdrücke von der Form



Digitized by Google

$$u^{(\varrho)}_{l,m,\dots q} = \lambda_1 U^{(1)}_r + \lambda_2 U^{(2)}_r + \cdots + \lambda_i U^{(i)}_r, \tag{37}$$

wo $U^{(1)}_r, U^{(2)}_r, \cdots U^{(i)}_r$ Determinanten $\alpha - 1^{\text{ter}}$ Ordnung bezeichnen, die sich mit $\varrho$ ändern und aus den Koeffizienten von $a_{\alpha-1}$, $b_{\alpha-1}, \cdots f_{\alpha-1}$ in gewissen $\alpha - 1$ Gleichungen des Systems (25) gebildet sind, die Größen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_i$ dagegen von $l, m, \cdots r$ unabhängige, von $\varrho$ aber abhängige Faktoren sind.

Nimmt man anstatt $l, m, \cdots q$ alle möglichen anderen Zusammenstellungen von je $\alpha - 1$ verschiedenen Indizes der Reihe $l, m, \cdots q, r$, so ergeben sich Gleichungen, die der Gleichung (37) analog sind, und man erhält das System

$$\begin{aligned}
u^{(\varrho)}_{m,n,\dots r} &= \lambda_1 \quad U^{(1)}_l + \lambda_2 \quad U^{(2)}_l + \cdots + \lambda_i \quad U^{(i)}_l, \\
u^{(\varrho)}_{l,n,\dots r} &= \lambda_1 \quad U^{(1)}_m + \lambda_2 \quad U^{(2)}_m + \cdots + \lambda_i \quad U^{(i)}_m, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u^{(\varrho)}_{l,m,\dots q} &= \lambda_1 \quad U^{(1)}_r + \lambda_2 \quad U^{(2)}_r + \cdots + \lambda_i \quad U^{(i)}_r.
\end{aligned} \tag{38}$$

Hierbei sind $U^{(1)}_l, U^{(1)}_m, \cdots U^{(1)}_r$ Determinanten aus den Koeffizienten von $a_{\alpha-1}, b_{\alpha-1}, \cdots g_{\alpha-1}$, die denselben Gleichungen des Systems (25) entnommen sind wie $U^{(1)}_r$; $U^{(2)}_l, U^{(2)}_m, \cdots U^{(2)}_r$ sind Determinaten, die denselben Gleichungen entstammen wie $U^{(2)}_r$, u. s. f. Durch die resp. Indizes $l, m, \cdots r$ ist angedeutet, welche Vertikalreihe der Koeffizienten in den betreffenden Gleichungen unterdrückt ist.

Nun bestehen aber, wenn man sich die Bildungsweise der Determinanten $U^{(1)}_l, U^{(2)}_l, \cdots U^{(i)}_r$ vergegenwärtigt, nach den Gleichungen (25) die Proportionen

$$\begin{aligned}
U^{(1)}_l : U^{(1)}_m : \cdots : U^{(1)}_r &= a_{\alpha-1} : -b_{\alpha-1} : \cdots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1}, \\
U^{(2)}_l : U^{(2)}_m : \cdots : U^{(2)}_r &= a_{\alpha-1} : -b_{\alpha-1} : \cdots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
U^{(i)}_l : U^{(i)}_m : \cdots : U^{(i)}_r &= a_{\alpha-1} : -b_{\alpha-1} : \cdots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1},
\end{aligned} \tag{39}$$

und daher, wegen (38) auch

$$u^{(\varrho)}_{m,n,\dots r} : u^{(\varrho)}_{l,n,\dots r} : \cdots : u^{(\varrho)}_{l,m,\dots q} = a_{\alpha-1} : -b_{\alpha-1} : \cdots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1}.$$

Setzen wir hierin $\varrho$ der Reihe nach gleich

$$\nu_{\alpha-1} + 1, \ \nu_{\alpha-1} + 2, \cdots, \nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \nu_{\alpha-2},$$

so erhalten wir, indem wir die Relation (36) nochmals hinschreiben,

Digitized by Google

$$u_{m,n,\dots r}^{(\nu_\alpha-1)} : u_{l,n,\dots r}^{(\nu_\alpha-1)} : \dots : u_{l,m,\dots q}^{(\nu_\alpha-1)} = a_{\alpha-1} :$$

$$: -b_{\alpha-1} : \dots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1},$$

$$u_{m,n,\dots r}^{(\nu_\alpha-1+1)} : u_{l,n,\dots r}^{(\nu_\alpha-1+1)} : \dots : u_{l,m,\dots q}^{(\nu_\alpha-1+1)} = a_{\alpha-1} :$$

(40) $$: -b^{\alpha-1} : \dots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$u_{m,n,\dots r}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} : u_{l,n,\dots r}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} : \dots : u_{l,m,\dots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} =$$

$$= a_{\alpha-1} : -b_{\alpha-1} : \dots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1}.$$

Es kann natürlich auch der Fall eintreten, daß für gewisse Werte von $\varrho$ an der Stelle $t = t_0$

$$u_{l,m,\dots q}^{(\varrho)} = 0$$

ist, in welchem Falle alle Größen

$$u_{m,n,\dots r}^{(\varrho)}, \quad u_{l,n,\dots r}^{(\varrho)}, \quad \dots \quad u_{l,m,\dots q}^{(\varrho)}$$

an dieser Stelle verschwinden, da sonst die Proportionen

$$u_{m,n,\dots r}^{(\varrho)} : u_{l,n,\dots r}^{(\varrho)} : \dots : u_{l,m,\dots q}^{(\varrho)} = a_{\alpha-1} :$$

$$: -b_{\alpha-1} : \dots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1}$$

nicht bestehen könnten, weil nach Nr. 6 sämtliche Größen $a_{\alpha-1}$, $b_{\alpha-1}, \dots g_{\alpha-1}$ von Null verschieden sind. Für solche Werte von $\varrho$ ist die Schlußfolgerung, die zu den Proportionen (40) führt, nicht statthaft, die entsprechenden Zeilen sind aus dem System (40) auszuschließen, dafür ist das Gleichungssystem

$$u_{m,n,\dots r}^{(\varrho)} = u_{l,n,\dots r}^{(\varrho)} = \dots = u_{l,m,\dots q}^{(\varrho)} = 0$$

für diese Werte von $\varrho$ hinzuzufügen.

Bilden wir jetzt die $\nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \nu_{\alpha-2} + 1^{\text{te}}$ Ableitung von $u_{l,m,\dots q}$. Dieselbe hat an der Stelle $t = t_0$ die Gestalt

(41) $$u_{l,m,\dots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} = \mu_0 W_r + \mu_1 V_r^{(1)} + \mu_2 V_r^{(2)} + \dots + \mu_j V_r^{(j)},$$

wo $V_r^{(1)}, V_r^{(2)}, \dots V_r^{(j)}$ und $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots \mu_j$ eine ähnliche Bedeutung haben wie die Größen $U_r^{(1)}, U_r^{(2)}, \dots U_r^{(i)}$ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i$ im Ausdruck (37) und $W_r$ die folgende Determinante bezeichnet:



Digitized by Google

$$W_r = \begin{vmatrix} u_l^{(\nu_1)} & u_m^{(\nu_1)} & \cdots & u_q^{(\nu_1)} \\ u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} & u_m^{(\nu_2-\nu_1+1)} & \cdots & u_q^{(\nu_2-\nu_1+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_l^{(\nu_{\alpha-2}-\nu_{\alpha-3}+\alpha-3)} & u_m^{(\nu_{\alpha-2}-\nu_{\alpha-3}+\alpha-3)} & \cdots & u_q^{(\nu_{\alpha-2}-\nu_{\alpha-3}+\alpha-3)} \\ u_l^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)} & u_m^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)} & \cdots & u_q^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)} \end{vmatrix}$$

Für andere Zusammenstellungen von je $\alpha - 1$ Indizes der Reihe $l, m, \ldots q, r$ ergeben sich der Gleichung (41) analoge Beziehungen und man erhält das System:

$$u_{m,n,\ldots r}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} = \mu_0 W_l + \mu_1 V_l^{(1)} + \mu_2 V_l^{(2)} + \cdots + \mu_j V_l^{(j)},$$
$$u_{l,n,\ldots r}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} = \mu_0 W_m + \mu_1 V_m^{(1)} + \mu_2 V_m^{(2)} + \cdots + \mu_j V_m^{(j)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{l,m,\ldots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} = \mu_0 W_r + \mu_1 V_r^{(1)} + \mu_2 V_r^{(2)} + \cdots + \mu_j V_r^{(j)}.$$

Hierbei sind die Größen $V$ Determinanten $\alpha - 1^{\text{ter}}$ Ordnung, die aus den Koeffizienten von $a_{\alpha-1}, b_{\alpha-1}, \ldots g_{\alpha-1}$ in gewissen Gleichungen des Systems (25) gebildet sind, und zwar sind die Determinanten $V$ derselben Vertikalreihe denselben Gleichungen entnommen, die Determinanten $V$ derselben Horizontalreihe durch Unterdrückung desselben Index gewonnen. Die Größen $W$ stehen in derselben Beziehung zu einander und zu den Größen $V$, nur enthalten sie auch die Koeffizienten der Ungleichung des Systems (25).

Aus der Bildungsweise der Determinanten $V$ ergibt sich:

$$V_l^{(1)} : V_m^{(1)} : \cdots : V_r^{(1)} = a_{\alpha-1} : -b_{\alpha-1} : \cdots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1},$$
$$V_l^{(2)} : V_m^{(2)} : \cdots : V_r^{(2)} = a_{\alpha-1} : -b_{\alpha-1} : \cdots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_l^{(j)} : V_m^{(j)} : \cdots : V_r^{(j)} = a_{\alpha-1} : -b_{\alpha-1} : \cdots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1}.$$

Wäre nun

$$u_{m,n,\ldots r}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} : u_{l,n,\ldots r}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} : \cdots : u_{l,m,\ldots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} =$$
$$= a_{\alpha-1} : -b_{\alpha-1} : \cdots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1}, \tag{42}$$

so müßte sein

$$W_l : W_m : \cdots : W_r = a_{\alpha-1} : -b_{\alpha-1} : \cdots : (-1)^{\alpha-1} g_{\alpha-1}.$$

Setzen wir aber statt $a_{\alpha-1}, b_{\alpha-1}, \cdots g_{\alpha-1}$ die Größen $W_l, W_m, \cdots (-1)^{\alpha-1} W_r$ in den Ausdruck

Digitized by Google

$$a_{\alpha-1}\, u_l^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)} + b_{\alpha-1}\, u_m^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)} + \cdots$$

$$\cdots + g_{\alpha-1}\, u_r^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)}$$

ein, so verwandelt sich dieser in eine Determinante mit zwei identischen Reihen von der Form

$$(43)\qquad u_l^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)},\ u_m^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)},\ \cdots u_r^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\alpha-1)},$$

hätte also den Wert Null, während er nach der Ungleichung des Systems (25) von Null verschieden ist. Die Beziehung (42) kann also nicht bestehen, auch können aus demselben Grunde die Ausdrücke (43) nicht sämtlich für $t = t_0$ verschwinden.

Aus dem System (40) erhalten wir die Relationen

$$u_{m,\,n,\,\ldots r}^{(\nu_\alpha-1)} : u_{l,\,n,\,\ldots r}^{(\nu_\alpha-1)} : \cdots : u_{l,\,m,\,\ldots q}^{(\nu_\alpha-1)} = u_{m,\,n,\,\ldots r}^{(\nu_\alpha-1+1)} : u_{l,\,n,\,\ldots r}^{(\nu_\alpha-1+1)} : \cdots$$

$$\cdots : u_{l,\,m,\,\ldots q}^{(\nu_\alpha-1+1)} = \cdots = u_{m,\,n,\,\ldots r}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} : u_{l,\,n,\,\ldots r}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} : \cdots$$

$$\cdots : u_{l,\,m,\,\ldots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})},$$

während die Verhältnisse

$$u_{m,\,n,\,\ldots r}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} : u_{l,\,n,\,\ldots r}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} : \cdots : u_{l,\,m,\,\ldots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)},$$

wie eben gezeigt ist, nicht sämtlich den entsprechenden vorhergehenden gleich sind.

Da endlich $l, m, n, \ldots q, r$ nur dadurch bestimmt sind, daß ihre Anzahl gleich $\alpha$ ist und keine zwei von ihnen einander gleich sind, so erhalten wir, wenn wir diesen Zahlen alle möglichen Werte beilegen, das gesuchte Resultat

$$u_{1,\,2,\,\ldots\,\alpha-1}^{(\nu_\alpha-1)} : \cdots : u_{l,\,m,\,\ldots q}^{(\nu_\alpha-1)} : \cdots = u_{1,\,2,\,\ldots\,\alpha-1}^{(\nu_\alpha-1+1)} : \cdots : u_{l,\,m,\,\ldots q}^{(\nu_\alpha-1+1)} : \cdots = \cdots$$

$$\cdots = u_{1,\,2,\,\ldots\,\alpha-1}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} : \cdots : u_{l,\,m,\,\ldots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} : \cdots,$$

und es sind die Verhältnisse

$$u_{1,\,2,\,\ldots\,\alpha-1}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} : \cdots : u_{l,\,m,\,\ldots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} : \cdots$$

nicht sämtlich den entsprechenden vorhergehenden gleich, auch können von den Gliedern dieser Verhältnisse

$$u_{1,\,2,\,\ldots\,\alpha-1}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)},\ \cdots u_{l,\,m,\,\ldots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)},\ \cdots$$

höchstens $\alpha - 1$ den Wert Null haben.

Für den Fall, daß alle Ableitungen einer gewissen Ordnung $\rho$,

$$\nu_{\alpha-1} < \rho < \nu_\alpha - \nu_{\alpha-1} + \nu_{\alpha-2} + 1,$$

den Wert Null haben, gilt dieselbe Bemerkung wie in Nr. 8.

Digitized by Google

**10.** Die wesentlichsten der gefundenen Resultate lassen sic
in den folgenden Satz zusammenfassen:

Ist für einen speziellen Wert $t_0$ der unabhängigen Verä
derlichen $t$ und bei allen Werten von $l, m, n, \ldots$

$$
\begin{array}{llllll}
u_l & = u'_l & = \cdots = u_l^{(\nu_1 - 1)} & = 0, & u_l^{(\nu_1)} & \neq 0, \\
u_{l,m} & = u'_{l,m} & = \cdots = u_{l,m}^{(\nu_2 - 1)} & = 0, & u_{l,m}^{(\nu_2)} & \neq 0, \\
u_{l,m,n} & = u'_{l,m,n} & = \cdots = u_{l,m,n}^{(\nu_3 - 1)} & = 0, & u_{l,m,n}^{(\nu_3)} & \neq 0, \\
\cdots & & & & & \\
\cdots & & & & & \\
u_{l,m,\ldots q,r} & = u'_{l,m,\ldots q,r} & = \cdots = u_{l,m,\ldots q,r}^{(\nu_\alpha - 1)} & = 0, & u_{l,m,\ldots q,r}^{(\nu_\alpha)} & \neq 0,
\end{array}
$$

so bestehen die Ungleichungen

$$\nu_2 \geqq 2\nu_1, \quad \nu_3 \geqq 2\nu_2 - \nu_1, \ldots \nu_\alpha > 2\nu_{\alpha-1} - \nu_{\alpha-2}$$

und ebenfalls für $t = t_0$ die Proportionen

$$
\text{(A)} \quad
\begin{array}{l}
u_1^{(\nu_1)} : \cdots : u_l^{(\nu_1)} : \cdots = u_1^{(\nu_1+1)} : \cdots : u_l^{(\nu_1+1)} : \cdots = \cdots \\
\qquad \cdots = u_1^{(\nu_2-\nu_1)} : \cdots : u_l^{(\nu_2-\nu_1)} : \cdots, \\
u_{1,2}^{(\nu_2)} : \cdots : u_{l,m}^{(\nu_2)} : \cdots = u_{1,2}^{(\nu_2+1)} : \cdots : u_{l,m}^{(\nu_2+1)} : \cdots = \cdots \\
\qquad \cdots = u_{1,2}^{(\nu_3-\nu_2+\nu_1)} : \cdots : u_{l,m}^{(\nu_3-\nu_2+\nu_1)} : \cdots, \\
\cdots \\
\cdots \\
u_{1,2,\ldots a-1}^{(\nu_\alpha-1)} : \cdots : u_{l,m,\ldots q}^{(\nu_\alpha-1)} : \cdots = u_{1,2,\ldots a-1}^{(\nu_{\alpha-1}+1)} : \cdots : u_{l,m,\ldots q}^{(\nu_{\alpha-1}+1)} : \cdots = \\
\qquad = \cdots = u_{1,2,\ldots a-1}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} : \cdots : u_{l,m,\ldots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} \cdots,
\end{array}
$$

während von den Verhältnissen

$$
\text{(B)} \quad
\begin{array}{lll}
u_1^{(\nu_2-\nu_1+1)} & : \cdots : u_l^{(\nu_2-\nu_1+1)} & : \cdots, \\
u_{1,2}^{(\nu_3-\nu_2+\nu_1+1)} & : \cdots : u_{l,m}^{(\nu_3-\nu_2+\nu_1+1)} & : \cdots, \\
\cdots & & \\
\cdots & & \\
u_{1,2,\ldots \alpha-1}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} & : \cdots : u_{l,m,\ldots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2}+1)} & : \cdots
\end{array}
$$

nicht alle in einer Zeile stehenden den entsprechenden des S
stems (A) gleich sind und auch nicht die sämtlichen Glieder ein
Zeile des Systems (B) verschwinden.

**11.** Es bleibt uns noch übrig zu untersuchen, ob irgend welc
Modifikationen an dem soeben formulierten Satze anzubringen sin
wenn die in den Voraussetzungen enthaltenen Ungleichungen nic
für alle Werte von $l, m, \ldots q, r$ gelten.

Digitized by Google

Zu diesem Zwecke unterwerfen wir die Größen $u_1, u_2, \ldots u_\varkappa$ einer orthogonalen Substitution mit konstanten Koeffizienten; sie mögen dabei in folgender Weise in die Ausdrücke $v_1, v_2, \ldots v_\varkappa$ übergehen:

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1^{(1)} u_1 + \alpha_2^{(1)} u_2 + \cdots + \alpha_\varkappa^{(1)} u_\varkappa, \\ v_2 &= \alpha_1^{(2)} u_1 + \alpha_2^{(2)} u_2 + \cdots + \alpha_\varkappa^{(2)} u_\varkappa, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_\varkappa &= \alpha_1^{(\varkappa)} u_1 + \alpha_2^{(\varkappa)} u_2 + \cdots + \alpha_\varkappa^{(\varkappa)} u_\varkappa. \end{aligned} \tag{44}$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, daß, wenn für einen speziellen Wert der unabhängigen Veränderlichen $t = t_0$ alle Größen $u_1, u_2, \ldots u_\varkappa$ verschwinden, dasselbe mit den transformierten $v_1, v_2, \ldots v_\varkappa$ der Fall ist. Dieses gilt auch für alle Ableitungen gleicher Ordnung der Größen $u_1, u_2, \ldots u_\varkappa$ und $v_1, v_2, \ldots v_\varkappa$, wie sich durch Differentiation der Gleichungen (44) ergibt.

Bilden wir jetzt aus den Größen $v_1, v_2, \ldots v_\varkappa$ und ihren Ableitungen eine Determinante $v_{l,m,\ldots r}$ in derselben Weise, wie wir aus den Ausdrücken $u_1, u_2, \ldots u_\varkappa$ die Determinante $u_{l,m,\ldots r}$ hergestellt haben:

$$v_{l,m,\ldots r} = \begin{vmatrix} v_l & v_m & \cdots v_r \\ v_l' & v_m' & \cdots v_r' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ v_l^{(\alpha-1)} & v_m^{(\alpha-1)} & \cdots v_r^{(\alpha-1)} \end{vmatrix},$$

so ergibt sich für diese nach den Gleichungen (44):

$$v_{l,m,\ldots r} = \sum \begin{vmatrix} \alpha_\lambda^{(l)} & \alpha_\mu^{(l)} & \cdots \alpha_\varrho^{(l)} \\ \alpha_\lambda^{(m)} & \alpha_\mu^{(m)} & \cdots \alpha_\varrho^{(m)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_\lambda^{(r)} & \alpha_\mu^{(r)} & \cdots \alpha_\varrho^{(r)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_\lambda & u_\mu & \cdots u_\varrho \\ u_\lambda' & u_\mu' & \cdots u_\varrho' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ u_\lambda^{(\alpha-1)} & u_\mu^{(\alpha-1)} & \cdots u_\varrho^{(\alpha-1)} \end{vmatrix},$$

$$v_{l,m,\ldots r} = \sum A^{l,m,\ldots r}_{\lambda,\mu,\ldots\varrho}\, u_{\lambda,\mu,\ldots\varrho}. \tag{45}$$

Hierbei ist die Summe für alle ganzzahligen Wertsysteme $\lambda, \mu, \ldots \varrho$ zu bilden, die den Ungleichungen

$$1 \leqq \lambda < \mu < \ldots < \varrho \leqq \varkappa$$

genügen, und es sind die Koeffizienten $A^{l,m,\ldots r}_{\lambda,\mu,\ldots\varrho}$ Subdeterminanten $\alpha^{\text{ter}}$ Ordnung der Substitutionsdeterminante, die aus Elementen der $l^{\text{ten}}, m^{\text{ten}}, \ldots r^{\text{ten}}$ Zeile derselben gebildet sind.

Digitized by Google

Bilden wir die Ausdrücke $v_{l,m,\ldots r}$ für alle möglichen Werte von $l, m, \ldots r$, die den Ungleichungen

$$1 \leqq l < m < \ldots < r \leqq \varkappa$$

genügen, so erhalten wir ein System von Gleichungen, welches die Abhängigkeit aller Determinanten $v_{l,m,\ldots r}$ einer gewissen Ordnung $\alpha$ von den entsprechenden Determinanten $u_{\lambda,\mu,\ldots\varrho}$ derselben Ordnung $\alpha$ bestimmt, und es ist diese Abhängigkeit ebenfalls eine orthogonale. Wenn daher für einen speziellen Wert der unabhängigen Veränderlichen $t = t_0$ alle Größen $u_{\lambda,\mu,\ldots\varrho}$, die sich durch alle nur möglichen Kombinationen der Indizes $\lambda, \mu, \ldots \varrho$ ergeben, den Wert Null haben, so ist dasselbe mit allen entsprechenden Größen $v_{l,m,\ldots r}$ für denselben Wert von $t$ der Fall und umgekehrt. Dasselbe gilt für Ableitungen gleicher Ordnung der Ausdrücke $u_{\lambda,\mu,\ldots\varrho}$ und $v_{l,m,\ldots r}$, wie sich durch Differentiation der Gleichungen (45) ergibt.

**12.** Es mögen jetzt an der Stelle $t = t_0$ einige von den Größen

$$u_l,\ u_{l,m},\ \ldots\ u_{l,m,\ldots r} \tag{46}$$

und deren Ableitungen bei gewissen Werten der Indizes $l, m, \ldots r$ verschwinden, dann lassen sich die Koeffizienten der Substitution (44) stets und auf unendlich mannigfaltige Weise derart bestimmen, daß die entsprechenden Ausdrücke

$$v_l, v_{l,m}, \ldots v_{l,m,\ldots r} \tag{47}$$

und ihre Ableitungen an derselben Stelle für sämtliche Kombinationen der Zahlen $l, m, \ldots r$ von Null verschiedene Werte haben, mit Ausnahme des in Nr. 11 behandelten Falles, daß von den Determinanten (46) alle Determinanten gleicher Ordnung, oder die Ableitungen gleich hoher Ordnung aller solcher Determinanten verschwinden.

Um diese Behauptung zu beweisen, fassen wir die Substitution (44) näher ins Auge. Zwischen den Koeffizienten derselben $\alpha_1^{(1)}, \ldots \alpha_\varkappa^{(\varkappa)}$ bestehen $\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1)$ Gleichungen, daher sind unter ihnen nur

$$\varkappa^2 - \frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1) = \frac{1}{2}\varkappa(\varkappa-1)$$

unabhängige. Die Gesamtheit aller Koeffizienten einer orthogonalen Substitution (44) bildet daher eine Mannigfaltigkeit von $\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa-1)$ Dimensionen. Von dieser Mannigfaltigkeit sind nun diejenigen Werte der Koeffizienten auszuschließen, für welche an der Stelle $t = t_0$ die Ausdrücke (47) und ihre Ableitungen bis zu einer ge-

Digitized by Google

wissen Ordnung hinauf und zwar für jede Kombination der Indizes $l, m, \ldots r$ den Wert Null erhalten. Die Ausdrücke (47) ergeben sich nach der Substitution (44) in der Form:

$$(48) \qquad \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda}^{(l)} u_{\lambda}, \quad \sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda,\mu}^{l,m} u_{\lambda,\mu}, \ldots \sum_{\lambda,\mu,\ldots\varrho} A_{\lambda,\mu,\ldots\varrho}^{l,m,\ldots r} u_{\lambda,\mu,\ldots\varrho}.$$

Durch das Nullsetzen eines solchen Ausdrucks erhält man eine Mannigfaltigkeit von $\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa-1)-1$ Dimensionen. Es muß also, wenn unsere Behauptung richtig ist, aus der Mannigfaltigkeit von $\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa-1)$ Dimensionen eine gewisse Anzahl von Mannigfaltigkeiten, deren Dimension um Eins niedriger ist, ausgeschieden werden können. Dieses ist aber stets und auf unendlich mannigfaltige Weise möglich, es sei denn, daß die auszuscheidende Mannigfaltigkeit identisch, das heißt in unserem Falle für jeden beliebigen Wert der Koeffizienten $\alpha_1^{(1)}, \ldots \alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}$ besteht. Dieser Ausnahmefall ist aber gerade derjenige, den wir bei unserer Behauptung als Ausnahme angeführt und in der vorigen Nr. 11 behandelt haben.

**13.** Wir können jetzt zu den am Anfang der Nr. 11 angedeuteten Untersuchungen übergehen.

Es mögen für einen speziellen Wert $t_0$ der unabhängigen Veränderlichen $t$ und bei allen Werten von $l, m, \ldots r$ die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
u_l &= u_l' &&= \cdots = u_l^{(\nu_1-1)} &&= 0,\\
u_{l,m} &= u_{l,m}' &&= \cdots = u_{l,m}^{(\nu_2-1)} &&= 0,\\
u_{l,m,n} &= u_{l,m,n}' &&= \cdots = u_{l,m,n}^{(\nu_3-1)} &&= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_{l,m,\ldots q,r} &= u_{l,m,\ldots q,r}' &&= \cdots = u_{l,m,\ldots q,r}^{(\nu_a-1)} &&= 0,
\end{aligned}$$

während von den Ausdrücken

$$(49) \qquad u_l^{(\nu_1)}, \; u_{l,m}^{(\nu_2)}, \; u_{l,m,n}^{(\nu_3)}, \ldots u_{l,m,\ldots q,r}^{(\nu_a)}$$

der erste für mindestens einen Wert von $l$, der zweite für mindestens ein Wertepaar $l, m$, und so fort von Null verschieden ist.

Dann kann man, nach Nr. 12, auf unendlich mannigfaltige Weise die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution (44) derart bestimmen, daß für die transformierten Größen $v_1, v_2, \ldots v_{\varkappa}$ an der Stelle $t=t_0$ sowohl die Gleichungen als auch die Ungleichungen des folgenden Systems bei allen Werten von $l, m, \ldots r$ bestehen:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{llll}
v_l & = v_l' & = \cdots = v_l^{(\nu_1-1)} & = 0,\ v_l^{(\nu_1)} \neq 0, \\
v_{l,m} & = v_{l,m}' & = \cdots = v_{l,m}^{(\nu_2-1)} & = 0,\ v_{l,m}^{(\nu_2)} \neq 0, \\
v_{l,m,n} & = v_{l,m,n}' & = \cdots = v_{l,m,n}^{(\nu_3-1)} & = 0,\ v_{l,m,n}^{(\nu_3)} \neq 0, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
v_{l,m,\ldots q,r} & = v_{l,m,\ldots q,r}' & = \cdots = v_{l,m,\ldots q,r}^{(\nu_\alpha-1)} & = 0,\ v_{l,m,\ldots q,r}^{(\nu_\alpha)} \neq 0.
\end{array}
$$

Es sind daher, nach Nr. 10, auch jetzt noch die nachstehenden Ungleichungen erfüllt:

$$\nu_2 \geqq 2\nu_1,\ \ \nu_3 \geqq 2\nu_2 - \nu_1, \cdots \nu_\alpha > 2\nu_{\alpha-1} - \nu_{\alpha-2}.$$

Ferner bestehen, nach Nr. 10, für die Größen $v$ an der Stelle $t = t_0$ die Proportionen:

$$
\begin{array}{l}
v_1^{(\nu_1)} : \cdots : v_l^{(\nu_1)} : \cdots = v_1^{(\nu_1+1)} : \cdots : v_l^{(\nu_1+1)} : \cdots = \cdots \\
\qquad \cdots = v_1^{(\nu_2-\nu_1)} : \cdots : v_l^{(\nu_2-\nu_1)} : \cdots, \\
v_{1,2}^{(\nu_2)} : \cdots : v_{l,m}^{(\nu_2)} : \cdots = v_{1,2}^{(\nu_2+1)} : \cdots v_{l,m}^{(\nu_2+1)} : \cdots = \cdots \\
\qquad \cdots = v_{1,2}^{(\nu_3-\nu_2+\nu_1)} : \cdots : v_{l,m}^{(\nu_3-\nu_2+\nu_1)} : \cdots, \\
\cdots \\
\cdots \\
v_{1,2,\ldots\alpha-1}^{(\nu_\alpha-1)} : \cdots : v_{l,m,\ldots q}^{(\nu_\alpha-1)} : \cdots = v_{1,2,\ldots\alpha-1}^{(\nu_{\alpha-1}+1)} : \cdots : v_{l,m,\ldots q}^{(\nu_{\alpha-1}+1)} : \cdots = \\
= \cdots = v_{1,2,\ldots\alpha-1}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} : \cdots : v_{l,m,\ldots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} : \cdots.
\end{array}
\tag{50}
$$

Ersetzt man in diesen Proportionen die Größen $v$ wiederum durch die Größen $u$ mit Hilfe der Substitution (44) und der aus ihr hervorgehenden Gleichung (45), so sieht man sofort, daß das System (50) in das analoge System der Ausdrücke $u$ übergeht.

$$
\begin{array}{l}
u_1^{(\nu_1)} : \cdots : u_l^{(\nu_1)} : \cdots = u_1^{(\nu_1+1)} : \cdots : u_l^{(\nu_1+1)} : \cdots = \cdots \\
\qquad \cdots = u_1^{(\nu_2-\nu_1)} : \cdots : u_l^{(\nu_2-\nu_1)} : \cdots, \\
u_{1,2}^{(\nu_2)} : \cdots : u_{l,m}^{(\nu_2)} : \cdots = u_{1,2}^{(\nu_2+1)} : \cdots : u_{l,m}^{(\nu_2+1)} : \cdots = \cdots \\
\qquad \cdots = u_{1,2}^{(\nu_3-\nu_2+\nu_1)} : \cdots : u_{l,m}^{(\nu_3-\nu_2+\nu_1)} : \cdots, \\
\cdots \\
\cdots \\
u_{1,2,\ldots\alpha-1}^{(\nu_\alpha-1)} : \cdots : u_{l,m,\ldots q}^{(\nu_\alpha-1)} : \cdots = u_{1,2,\ldots\alpha-1}^{(\nu_{\alpha-1}+1)} : \cdots : u_{l,m,\ldots q}^{(\nu_{\alpha-1}+1)} : \cdots = \\
= \cdots = u_{1,2,\ldots\alpha-1}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} : \cdots : u_{l,m,\ldots q}^{(\nu_\alpha-\nu_{\alpha-1}+\nu_{\alpha-2})} : \cdots.
\end{array}
\tag{51}
$$

Den Verhältnissen (50) sind, nach Nr. 10, die resp. Verhältnisse

Digitized by Google

$$
(52)\qquad
\begin{array}{llll}
v_1^{(r_2 - r_1 + 1)} & : \cdots : v_l^{(r_2 - r_1 + 1)} & : \cdots, \\
v_{1,2}^{(r_3 - r_2 + r_1 + 1)} & : \cdots : v_{l,m}^{(r_3 - r_2 + r_1 + 1)} & : \cdots, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
v_{1,2,\ldots \alpha - 1}^{(r_\alpha - r_{\alpha-1} + r_{\alpha-2} + 1)} & : \cdots : v_{l,m,\ldots q}^{(r_\alpha - r_{\alpha-1} + r_{\alpha-2} + 1)} & : \cdots
\end{array}
$$

für $t = t_0$ nicht sämtlich gleich und es können nicht alle Glieder einer Zeile im System (52) für diesen Wert von $t$ verschwinden. Hieraus schließen wir, daß auch die Verhältnisse

$$
(53)\qquad
\begin{array}{llll}
u_1^{(r_2 - r_1 + 1)} & : \cdots : u_l^{(r_2 - r_1 + 1)} & : \cdots, \\
u_{1,2}^{(r_3 - r_2 + r_1 + 1)} & : \cdots : u_{l,m}^{(r_3 - r_2 + r_1 + 1)} & : \cdots, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
u_{1,2,\ldots \alpha - 1}^{(r_\alpha - r_{\alpha-1} + r_{\alpha-2} + 1)} & : \cdots : u_{l,m,\ldots q}^{(r_\alpha - r_{\alpha-1} + r_{\alpha-2} + 1)} & : \cdots
\end{array}
$$

für $t = t_0$ nicht sämtlich den entsprechenden Verhältnissen des Systems (51) gleich sind, da sich dann das gleiche für die Größen $v$ ergeben und dieses einen Widerspruch liefern würde. Aus demselben Grunde können auch nicht alle in einer Zeile stehenden Glieder des Systems (53) für $t = t_0$ verschwinden.

Wir sehen also, daß der Satz in Nr. 10 auch dann noch bestehen bleibt, wenn die in den Voraussetzungen angenommenen Ungleichungen nicht mehr für alle Wertsysteme $l, m, \ldots r$ gelten.

**14.** Sind die Koordinaten $x, y, z$ der Punkte einer Raumkurve als Funktionen eines Parameters $t$ gegeben und setzt man

$$u_1 = x',\ u_2 = y',\ u_3 = z',$$

so wird

$$u_{2,3} = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix},\ u_{3,1} = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix},\ u_{1,2} = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix};\ u_{1,2,3} = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Diese Ausdrücke spielen bekanntlich eine große Rolle in der Theorie der Raumkurven und es sei bemerkt,[1]) daß die in der vorliegenden Arbeit angestellten Betrachtungen von Wichtigkeit sind bei der Untersuchung der singulären Punkte einer Kurve, wenn die Singularität darin besteht, daß Punkt, Tangente oder Schmiegungsebene der Kurve Rückkehrelemente sind.

---

[1]) Vgl. d. Verf.: Über einige Arten singulärer Punkte von Raumkurven, J. f. Math., Bd. 116.

Digitized by Google

# Konstruktion der Brennpunkte der ebenen Schnitte eines Kegels zweiter Ordnung.

Von L. Klug in Klausenburg.

In den Büchern über darstellende oder projektive Geometrie findet man keine Lösung obiger Aufgabe zweiten Grades. Chasles gibt zwar in seiner Geschichte der Geometrie (Note IV) diesbezüglich einen Satz an, der beiläufig so lautet: Schreibt man einem Kegel zweiter Ordnung eine Fläche zweiter Ordnung ein, welche von der Ebene $\sigma$ in einem Nabelpunkte berührt wird, so ist dieser Nabelpunkt ein Brennpunkt desjenigen Kegelschnittes, in welchem $\sigma$ den Kegel trifft. Er fügt aber hinzu, daß dieser Satz nicht geeignet ist zur Bestimmung jenes Brennpunktes. Und doch ist die Lösung der Aufgabe eine so einfache, daß ich Bedenken habe, ob ich im folgenden nicht längst Bekanntes wiederhole.

Es sei $C^{(2)}$ ein Kegel zweiter Ordnung mit dem Scheitel $C$, ferner sei $\sigma$ eine beliebige Ebene, welche $C^{(2)}$ in dem Kegelschnitt $k^{(2)}$ trifft, dessen Brennpunkte $FF_1$ konstruiert werden sollen.

Man hat die Achsen $ff_1$ derjenigen involutorischen Büschel mit in bezug auf $C^{(2)}$ konjugierten Polarebenen zu suchen, welche $\sigma$ in orthogonalen Strahleninvolutionen treffen; die Spuren von $ff_1$ in $\sigma$ sind die gewünschten Brennpunkte des Kegelschnittes $k^{(2)}$.

In der durch $C$ gehenden und zu $\sigma$ parallelen Ebene $\gamma$ bestimme man die rechtwinkligen konjugierten Polarstrahlen $ab$ und verbinde dieselben durch die Ebenen $\alpha \equiv [bc]$, $\beta \equiv [ac]$ mit dem Polarstrahle $c$ von $\gamma$ in bezug auf $C^{(2)}$. Die Ebenen $\alpha$ und $\beta$ treffen schon $\sigma$ in den zu $b$ und $a$ parallelen Achsen von $k^{(2)}$ und es liegen daher die Strahlen $ff_1$ in einer der Ebenen $\alpha\beta$.

Es sei $zz_1$ ein konjug. Strahlenpaar der im Büschel $(C, \gamma)$ liegenden orthogonalen Involution. Man betrachtet $z$ als die Achse eines Ebenenbüschels und $z_1$ als die Achse eines anderen Ebenenbüschels, dessen Ebenen zu den Ebenen des ersteren Büschels in bezug auf $C^{(2)}$ konjugierte Polarebenen sind. Diese zwei projektiven Ebenenbüschel treffen die Ebene $\alpha$ in den projektiven Strahlenbüscheln $[x]\,[x_1]$ und die Ebene $\beta$ in den projektiven Strahlenbüscheln $[y]\,[y_1]$, welche beide involutorisch liegen. Denn den Ebenen $[z\,a\,b] \equiv \gamma$, $[z\,c]$ im

Digitized by Google

ersten Büschel entsprechen die Ebenen $[z_1 c]$, $[z_1 b a] \equiv \gamma$ im zweiten; also fallen die zu diesen Ebenen gehörigen Spuren $x x_1$ nach $bc$ und $cb$ und $y y_1$ nach $ac$ und $ca$.

Von diesen involutorischen Büscheln $[x x_1]$, $[y y_1]$ in den Ebenen $\alpha, \beta$ ist die eine hyperbolisch und die andere elliptisch. Denn die rechtwinkligen Strahlen $z z_1$ auf der Fläche $ab$ des einfachen Dreikantes $C(abc)$ trennen die rechtwinkligen Kanten $ab$, so daß z. B. $z$ auf der eigentlichen Fläche $ab$ des Dreikantes liegt, $z_1$ aber auf der verlängerten Fläche. Jede Ebene des Büschels $z$ trifft nur noch eine der zwei anderen Flächen $bc$, $ac$ des Dreikantes, während die ihr entsprechende Ebene des Büschels $z_1$ entweder beide auf den Flächen selbst oder aber beide auf ihren Verlängerungen schneidet. Es wird daher von den Strahlenpaaren $x x_1, bc$; $y y_1, ac$ entweder bloß das erste oder bloß das zweite Paar voneinander getrennt.

Ist $[x x_1]$ die hyperbolische Involution mit den Doppelstrahlen $f f_1$, so treffen die konjugierten Polarbenen $fz, f z_1$; $fa, fb$ die Ebene $\gamma$ und also auch die zu $\gamma$ parallele Ebene $\sigma$ in rechtwinkligen Strahlenpaaren und demnach trifft $f$ (und ebenso $f_1$) diese Ebene $\sigma$ in einem Brennpunkte von $k^{(2)}$. Es treffen aber nicht nur jene zwei Paare, sondern alle Paare konjugierter Polarebenen von $f$ (und $f_1$) die parallelen Ebenen $\gamma$, $\sigma$ in rechtwinkligen Strahlenpaaren, so daß man die nämlichen Doppelstrahlen $f f_1$ in $\alpha$ erhalten würde, wenn man anstatt von $z z_1$ von einem anderen Strahlenpaare der orthogonalen Involution $[z z_1]$ in $\gamma$ ausgegangen wäre. Aber nicht nur die Involution $[x x_1]$ in $\alpha$, sondern auch die Involution $[y y]_1$ in $\beta$ ist unabhängig von dem zuerst angenommenen Strahlenpaar $z z_1$. Denn es sind die Projektionen des Büschels $[z]$ aus einem Strahle $x$ und $[z_1]$ aus dem entsprechenden Strahle $x_1$ auf die Ebene $\beta$ projektiv, wobei die Strahlen $ca$ in diesen Projektionen einander abwechselnd entsprechen. Es treffen also die Doppelstrahlen der Involutionen $[x x_1]$, $[y y_1]$ die Ebene $\sigma$ in den reellen und imaginären Brennpunkten des Kegelschnittes $k^{(2)}$.

Ist die Involution der Polarstrahlen in bezug auf $C^{(2)}$ in der Ebene $\gamma$ eine orthogonale, also mit $[z z_1]$ identisch, so werden die involutorischen Strahlenbüschel $[x x_1]$, $[y y_1]$ parabolisch und die Doppelstrahlen $f f_1$ vereinigen sich in dem singulären Strahle $c$. $k^{(2)} \equiv (\sigma, C^{(2)})$ ist dann ein Kreis und der Mittelpunkt $(c, \sigma)$ ist sein Brennpunkt.

Ist die Involution der Polarstrahlen in $\gamma$ eine parabolische, also berührt $\gamma$ den Kegel $C^{(2)}$ in dem Strahle $c \equiv b$, und ist $\alpha$ die Polarebene des auf $b$ senkrechten Strahles $a$ im Büschel $(C, \gamma)$, so fällt $[ca] \equiv \beta$ mit $\gamma$ und $[z z_1]$ mit $[y y_1]$ zusammen; $c \equiv b$ ist der eine Doppelstrahl $f_1$ der Involution $[x x_1]$ und der andere Doppelstrahl $f$ begegnet $\sigma$ in dem Brennpunkte der Parabel $k^{(2)} \equiv (\sigma, C^{(2)})$.

Den von Chasles oben angegebenen Satz kann man nun leicht einsehen und die hier gegebene Konstruktion zur Bestim-

Digitized by Google

mung von solchen dem Kegel $C^{(2)}$ einbeschriebenen Flächen zweiter Ordnung benützen, welche von einer gegebenen Ebene $\sigma$ in einem ihrer Nabelpunkte berührt werden.

Ist nämlich $F^{(2)}$ eine Fläche zweiter Ordnung, welche die Ebene $\sigma$ in dem Brennpunkte $F$ des Kegelschnitts $k^{(2)} \equiv (C^{(2)}, \sigma)$ und den Kegel $C^{(2)}$ längs des Kegelschnittes $l^{(2)}$ berührt, so trifft die Ebene $\lambda$ von $l^{(2)}$ die Ebene $\sigma$ in der Polare der Geraden $FC$ in bezug auf $F^{(2)}$ und in der Polare $m$ des Brennpunktes $F$ in bezug auf $k^{(2)}$. Die Ebenenpaare, welche die auf $m$ liegenden konjugierten Pole in bezug auf $F^{(2)}$, $C^{(2)}$, $k^{(2)}$ oder $l^{(2)}$ aus der Achse $FC$ projizieren, sind konjugierte Polarebenen in bezug auf $F^{(2)}$ und $C^{(2)}$ und ihre Spuren in $\sigma$ sind konjugierte Polaren in bezug auf $k^{(2)}$. Da aber die letzteren eine orthogonale Involution bilden, so ist $F$ ein Nabelpunkt von $F^{(2)}$.

Hat man umgekehrt, wenn der Kegel $C^{(2)}$ und die Ebene $\sigma$ gegeben ist, den Brennpunkt $F$ des Kegelschnittes $k^{(2)} \equiv (C^{(2)}, \sigma)$ laut dem Obigen bestimmt und legt durch die Polare von $F$ in bezug auf $k^{(2)}$ eine beliebige Ebene, welche den Kegel $C^{(2)}$ in dem Kegelschnitt $l^{(2)}$ trifft, dann gibt es eine Fläche zweiter Ordnung, welche dem Kegel längs $l^{(2)}$ einbeschrieben ist und von $\sigma$ in ihrem Nabelpunkte $F$ berührt wird.

Aus obigen Betrachtungen, oder auch unabhängig von ihnen, kann man leicht diejenigen Punkte in dem Punktfelde $\Sigma$ eines Kegelschnittes $k^{(2)}$ bestimmen, welche den Brennpunkten des dem $k^{(2)}$ entsprechenden Kegelschnittes $k'^{(2)}$ in einem mit $\Sigma$ kollinearem Felde $\Sigma'$ zugeordnet sind.

Es sei $r$ die Gegenachse in $\Sigma$, d. h. die der unendlich fernen Geraden $r'$ des Feldes $\Sigma'$ entsprechende Gerade. Ferner entspreche die Punktinvolution $[ZZ_1]$ auf $r$ derjenigen Punktinvolution auf $r'$, in welchen diese Gerade von einer orthogonalen Strahleninvolution des Feldes $\Sigma'$ getroffen wird.

Unter den durch den Pol $C$ von $r$ in bezug auf $k^{(2)}$ gehenden konjugierten Polaren gibt es ein Paar $a\,b$, welches zugleich ein konjugiertes Punktpaar der Involution $[ZZ_1]$ projiziert; dieses Polarenpaar entspricht den Achsen $a'\,b'$ von $k'^{(2)}$. Legt man nun durch ein anderes konjugiertes Punktpaar von $[ZZ_1]$ konjugierte Polaren in bezug auf $k^{(2)}$, so treffen dieselben $a$ und $b$ in den Punktinvolutionen $[XX_1]$ und $[YY_1]$; und die Doppelpunkte dieser Involutionen sind den Brennpunkten von $k'^{(2)}$ in der Kollineation zugeordnet.

Digitized by Google

# Über bestimmte Integrale mit der Prymschen $Q$-Funktion.

Von **Niels Nielsen** in Kopenhagen.

## § 1. Das Analogon des zweiten Eulerschen Integrals.

Für die in der Theorie der Gammafunktion auftretende, in $\nu$ ganze transzendente Funktion

$$Q(x, 1-\nu) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^\nu}\, dt \tag{1}$$

habe ich neuerdings diese asymptotische Reihe [1])

$$e^x\, Q(x, 1-\nu) \sim \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s\, \Gamma(\nu+s)}{x^{\nu+s}}, \tag{2}$$

welche für jeden überaus großen Wert von $|x|$ anwendbar ist, entwickelt.

Als Spezialfälle der Funktion $Q(x, 1-\nu)$ wollen wir hier den Integrallogarithmus $\mathrm{li}(e^{-x})$ und die Krampsche Transzendente $K(x)$ hervorheben.

Setzt man nämlich

$$\mathrm{li}(e^{-x}) = C + \log x + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\, x^s}{s!\, s}, \tag{3}$$

wo $C$ die Eulersche Konstante bedeutet, während der Logarithmus rechter Hand so zu bestimmen ist, daß er für positive $x$ reell wird, so ist bekanntlich

$$\mathrm{li}(e^{-x}) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt = -Q(x, 0). \tag{4}$$

Die entsprechende, aus (2) für $\nu = 1$, erhaltene asymptotische Reihe zeigt, daß der Integrallogarithmus sich für überaus große

[1]) **Mathematische Annalen**, Bd. 59, p. 92; 1904.
[2]) **loc. cit.** p. 100.

Digitized by Google

Werte des Argumentes $x$ wie die Exponentialfunktion verhält. Die entsprechenden Analogien der trigonometrischen Funktionen werden von dem Integralcosinus $C_i(x)$ und dem Integralsinus $S_i(x)$ gebildet; diese beiden Funktionen werden am einfachsten durch die Identitäten

$$C_i(x) = \frac{\mathrm{li}(e^{ix}) + \mathrm{li}(e^{-ix})}{2} \tag{5}$$

$$S_i(x) = \frac{\mathrm{li}(e^{ix}) - \mathrm{li}(e^{-ix})}{2i} \tag{6}$$

definiert, wo, wie überall in den folgenden Formeln

$$\pm i = e^{\pm \frac{\pi i}{2}}$$

zu setzen ist.

Was die Krampsche Transzendente $K(x)$ betrifft, so kann dieselbe folgendermaßen definiert werden

$$K(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{s!\,(2s+1)}, \tag{7}$$

und somit gibt die Substitution $t = \sqrt{z}$ diese andere Darstellung

$$K(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \cdot \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \cdot Q\left(x, \frac{1}{2}\right). \tag{8}$$

Als die entsprechenden Analogien der trigonometrischen Funktionen haben wir hier die Fresnelschen Integrale $F_1(x)$ und $F_2(x)$, nämlich

$$F_1(x) = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}} \cdot K\left(x \cdot e^{\frac{\pi i}{4}}\right) + e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot K\left(x \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)}{2} \tag{9}$$

$$F_2(x) = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}} \cdot K\left(x \cdot e^{\frac{\pi i}{4}}\right) - e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot K\left(x \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)}{2i}. \tag{10}$$

Um nun die so eingeführten Funktionen für bestimmte Integrale anwenden zu können, bemerken wir zuerst, daß (1) diese andere Formel

$$D_x Q(x, 1-\nu) = -\frac{e^{-x}}{x^\nu} \tag{11}$$

liefert und somit ergibt ein bekannter Satz [1]) den Grenzwert

$$\lim_{x=0} \left(x^{\nu-1+\sigma} \cdot Q(x, 1-\nu)\right) = 0, \tag{12}$$

[1]) U. Dini: Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer reellen veränderlichen Größe, p. 105; Leipzig, Teubner 1892.

Digitized by Google

wo $\sigma$ eine angebbare positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet.

Nach diesen Erörterungen betrachten wir nunmehr das folgende Analogon des zweiten Eulerschen Integrals

$$J(\nu, \rho) = \int_0^\infty Q(tx, 1-\nu) \cdot t^{\rho-1}\, dt,$$

welches demnach einen Sinn hat, falls allgemein $\Re(x) > 0$, $\Re(\rho-\nu) > -1$ oder speziell $\Re(x) = 0$, $-1 < \Re(\rho-\nu) < +1$ angenommen werden.

Eine partielle Integration liefert aber nun ohne Mühe

$$J(\nu, \rho) = \left[\frac{t^\rho}{\rho} \cdot Q(tx, 1-\nu)\right]_0^\infty + \frac{x^{1-\nu}}{\rho} \cdot \int_0^\infty e^{-tx}\, t^{\rho-\nu}\, dt,$$

woraus unter Anwendung einer bekannten Integralformel [1]) das erwünschte Resultat:

$$(13) \qquad \int_0^\infty Q(tx, 1-\nu)\, t^{\rho-1}\, dt = \frac{\Gamma(\rho-\nu+1)}{\rho \cdot x^\rho},$$

welche Formel ja mit der soeben angewendeten aus der Theorie der Gammafunktion ganz ähnlich ist.

Aus (13) kann man eine andere interessante Formel herleiten, indem man nach $\rho$ differentiert und dann $\rho = 1$ setzt; man findet dadurch

$$(14) \qquad \int_0^\infty Q(tx, 1-\nu) \log t\, dt = \frac{\Gamma(2-\nu)}{x} (\Psi(2-\nu) - 1 - \log x),$$

wo gesetzt ist:

$$(15) \qquad \Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right),$$

und $C$ die Eulersche Konstante bedeutet.

Für die oben eingeführten Spezialfälle der $Q$-Funktion ergeben sich nun aus (13) ohne weiteres die entsprechenden Formeln:

$$(16) \qquad \int_0^\infty \mathrm{li}(e^{-tx}) \cdot t^{\rho-1} dt = -\frac{\Gamma(\rho)}{\rho \cdot x^\rho}$$

$$(17) \qquad \int_0^\infty K(tx)\, t^{2\rho-1} dt = \frac{\Gamma\left(\rho + \frac{1}{2}\right)}{4\rho \cdot x^{2\rho}},$$

von welchen die erste schon Schlömilch [2]) bekannt war.

[1]) Man vergleiche mein Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 151.
[2]) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, p. 74; Jena 1843.



Digitized by Google

Eine Anwendung der Identitäten (5) und (6) liefert dann wegen (16) die ähnlichen Formeln

$$(18) \qquad \int_0^\infty C_i(tx) \cdot t^{\varrho-1}\, dt = -\frac{\Gamma(\varrho)\cos\frac{\pi\varrho}{2}}{\varrho \cdot x^\varrho}$$

$$(19) \qquad \int_0^\infty S_i(tx) \cdot t^{\varrho-1}\, dt = -\frac{\Gamma(\varrho)\sin\frac{\pi\varrho}{2}}{\varrho \cdot x^\varrho},$$

welche also nur für positive $x$ und für $0 < \Re(\varrho) < 2$ anwendbar sind. Das Integral (18) verschwindet für $\varrho = 1$. Die Analogie zwischen den Integralen (16), (18) und (19) und denjenigen, welche die Exponentialfunktion oder die trigonometrischen Funktionen enthalten, ist vollkommen.

In ähnlicher Weise findet man aus (17) wegen (9) und (10) die weiteren Formeln

$$(20) \qquad \int_0^\infty F_1(tx)\, t^{2\varrho-1}\, dt = \frac{\Gamma\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)\cos(2\varrho+1)\frac{\pi}{4}}{\varrho \cdot x^{2\varrho}}$$

$$(21) \qquad \int_0^\infty F_2(tx)\, t^{2\varrho-1}\, dt = \frac{\Gamma\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)\sin(2\varrho+1)\frac{\pi}{4}}{\varrho \cdot x^{2\varrho}},$$

wo man also $x$ als positiv und $-\frac{1}{2} < \Re(\varrho) < \frac{3}{2}$ annehmen muß. Für $\varrho = \frac{1}{2}$ verschwindet das Integral (20).

Wir erwähnen noch die folgenden aus (14) für $\nu = 1$ hergeleiteten Formeln

$$(22) \qquad \int_0^\infty \mathrm{li}(e^{-t}) \cdot \log t\, dt = \int_0^\infty S_i(t) \cdot \log t\, dt = C + 1$$

$$(23) \qquad \int_0^\infty C_i(t) \cdot \log t\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

## § 2. Herleitung eines allgemeinen Integralsatzes.

Wir wollen nunmehr aus unseren Analogon des zweiten Eulerschen Integrals § 1, (13) den folgenden allgemeinen Satz herleiten:

Digitized by Google

Es sei

$$F(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{\Gamma(\varrho - \nu + s + 1)} \cdot x^s \tag{1}$$

eine solche ganze transzendente Funktion in $x$, daß der Konvergenzradius $r$ der Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{2}$$

eine angebbare Größe ist, dann hat man allgemein

$$\int_0^\infty Q(ty, 1-\nu)\, F(tx)\, t^{\varrho-1}\, dt = x^{-\varrho} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{\varrho + s} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\varrho+s}, \tag{3}$$

und diese Formel bleibt richtig, falls gleichzeitig $\Re(y) > 0$, $|x| < r \cdot |y|$ und $\Re(\varrho - \nu) > -1$ angenommen werden.

Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{Q(ty, 1-\nu)\, a_s\, t^{\varrho+s-1}}{\Gamma(\varrho - \nu + s + 1)} \tag{4}$$

im Intervall $0 \leqq t \leqq K$, wo $K$ eine endliche aber beliebig große positive Zahl bedeutet, in $t$ eine gliedweise integrable und, für $t > 0$, eine gleichmäßig konvergente ist, falls nur $\Re(\varrho - \nu) > -1$ vorausgesetzt wird. Setzt man demnach in der durch gliedweise Integration aus (4) erhaltenen Reihe $K = \infty$, so kommt, wegen § 1, (13) eben die Reihe rechter Hand in (3). Da nun diese Reihe immer, außer für $\varrho = -p$, wo $p$ eine ganze nicht negative Zahl bedeutet, da konvergiert, wo dies mit der aus (2) erhaltenen Potenzreihe für $f\left(\frac{x}{y}\right)$ der Fall ist, [1]) so gibt ein allgemeiner Satz [2]) über die gliedweise Integration einer unendlichen Reihe unmittelbar die Formel (3).

Als die erste unter den zahlreichen Anwendungen von (3), welche uns auf bekannte Funktionen führen, betrachten wir den einfachsten Fall, wo $a_s = 1$ angenommen wird. Die entsprechende Funktion $F(x)$ reduziert sich dann auf die zu $Q(x, \nu)$ komplementäre Funktion $P(x, \nu)$, nämlich

$$P(x, \nu) = \int_0^x e^{-t}\, t^{\nu-1}\, dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\, x^{\nu+s}}{s!\,(\nu + s)}, \tag{5}$$

so daß allgemein

$$P(x, \nu) + Q(x, \nu) = \Gamma(\nu)$$

sein muß.

[1]) Man vergleiche mein Hanbbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 127.
[2]) U. Dini, Grundlagen etc., p. 523.



Digitized by Google

Eine wiederholte partielle Integration ergibt indessen vermöge (5) für $F(x, \nu)$ diese andere Reihenentwicklung

$$(6) \qquad P(x, \nu) = \Gamma(\nu) \cdot e^{-x} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{x^{\nu+s}}{\Gamma(\nu+s+1)} \cdot$$

Für $\nu = 1$ findet man speziell aus (5) oder (6)

$$(7) \qquad P(x, 1) = 1 - e^{-x}.$$

Nach diesen Erörterungen findet man für $a_s = 1$ diesen Ausdruck für die entsprechende Funktion $F(x)$, nämlich

$$F(tx) = \frac{e^{tx}(tx)^{\nu-\varrho}}{\Gamma(\varrho-\nu)} \cdot P(tx, 1-\nu),$$

und somit ergibt sich wegen (3) diese Integralformel

$$(8) \quad \int_0^\infty Q(ty, 1-\nu) \cdot P(tx, \varrho-\nu) \cdot e^{tx} t^{\nu-1} dt = \frac{\Gamma(\varrho-\nu)}{x^\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\varrho+s} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\varrho+s},$$

wo also im allgemeinen $|x| < |y|$, $\Re(y-x) > 0$, $\Re(\varrho-\nu) > -1$ oder speziell $|x| < |y|$, $\Re(y-x) = 0$, $-1 < \Re(\varrho-\nu) < +1$ anzunehmen sind.

Setzt man demnach in (8) $\varrho = 1$ und $1-\nu$ statt $\nu$, so entfließt die elegantere Formel

$$9) \qquad \int_0^\infty Q(ty, \nu) P(tx, \nu) e^{tx} t^{-\nu} dt = -\frac{\Gamma(\nu)}{x^{1-\nu}} \cdot \log\left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot$$

Als zweites Beispiel setzen wir in (3)

$$a_s = \frac{(-1)^s \Gamma(\varrho-\nu+s+1)}{s!},$$

und somit entfließt diese andere Formel

$$(10) \int_0^\infty e^{-tx} Q(ty, 1-\nu) t^{\varrho-1} dt = x^{-\varrho} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma(\varrho-\nu+s+1)}{s!(\varrho+s)} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\varrho+s},$$

welche allgemein für $\Re(y+x) > 0$, $|x| < |y|$ und $\Re(\varrho-\nu) > -1$ oder speziell, wenn $\Re(y+x) = 0$, $-1 < \Re(\varrho-\nu) < +1$, anwendbar ist.

Unter den zahlreichen Formeln, welche aus (10) hergeleitet werden können, betrachten wir zuerst den Fall $x = y = 1$, $\varrho = \nu$;

Digitized by Google

eine leichte Änderung der Bezeichnungen ergibt dann ohne weiteres die Formel

$$(11)\quad \int_0^\infty Q(t, 1-x)\, e^{-t}\, t^{x-1}\, dt = \beta(x) = -D_x \log \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}.$$

Als zweites Beispiel setzen wir in (10) $x=-1$, $y=+1$, die Gaußsche Formel

$$(12)\quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$$

gibt dann mit Zuhilfenahme der Eulerschen Identität

$$(13)\quad \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

diese andere Integraldarstellung

$$(14)\quad \int_0^\infty e^t\, Q(t, 1-\nu)\, t^{\varrho-1}\, dt = \frac{\pi\,\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\nu)\sin\pi(\nu-\varrho)},$$

wo man also $1 > \Re(\varrho-\nu) > 0$ voraussetzen muß.

Um die in § 1 besprochenen Spezialfälle der $Q$-Funktion einzuführen, setzen wir zuerst in (10) $\varrho=\nu=1$; dann kommt

$$(15)\quad \int_0^\infty e^{-tx}\,\mathrm{li}(e^{-ty})\,dt = -\frac{1}{x}\cdot\log\left(1+\frac{x}{y}\right),$$

wo man also $\Re(y+x) \leqq 0$ und $x+y$ von Null verschieden annehmen muß; aus § 1, (5) und (6) folgert man dann ohne weiteres die beiden ähnlichen Formeln

$$(16)\quad \int_0^\infty e^{-tx}\, C_i(ty)\, dt = -\frac{1}{x}\cdot\log\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)$$

$$(17)\quad \int_0^\infty e^{-tx}\, S_i(ty)\, dt = -\frac{1}{x}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{y},$$

wo also $\Re(x \pm iy) > 0$ und $x \pm iy$ von $-1$ verschieden angenommen werden muß; die Formel (15) war schon Schlömilch[1]) bekannt.

[1]) Beiträge, p. 74.

Digitized by Google

In ähnlicher Weise findet man aus (15) die beiden anderen Formelgruppen

$$(18) \qquad \int_0^\infty \cos(tx)\,\mathrm{li}(e^{-ty})\,dt = -\frac{1}{x}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$$

$$(19) \qquad \int_0^\infty \cos(tx)\,C_i(ty)\,dt = 0$$

$$(20) \qquad \int_0^\infty \cos(tx)\,S_i(ty)\,dt = \frac{1}{2x}\cdot \log\frac{y-x}{y+x},$$

von welchen (18) von Schlömilch [1]) gefunden worden ist und

$$(21) \qquad \int_0^\infty \sin(tx)\,\mathrm{li}(e^{-ty})\,dt = -\frac{1}{2x}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$$

$$(22) \qquad \int_0^\infty \sin(tx)\,C_i(ty)\,dt = -\frac{1}{x}\cdot \log\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)$$

$$(23) \qquad \int_0^\infty \sin(tx)\,S_i(ty)\,dt = 0,$$

von welchen die erste ebenfalls Schlömilch [2]) angehört.

In (18) und (21) muß man $\Re(y \pm ix) > 0$ annehmen, während die vier übrigen Formeln nur für reelle und verschiedene Wertepaare von $x$ und $y$ einen Sinn haben.

Setzt man endlich in (10) $\rho = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$, so folgt nach einer einfachen Änderung der Bezeichnungen diese andere von Schlömilch [3]) herrührende Formel

$$(24) \qquad \int_0^\infty e^{t^2x^2}\,\mathrm{li}(e^{-t^2})\,dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{x}\cdot \arcsin x,$$

welche für $x = 0$, $y = 1$ interessante numerische Resultate liefert.

## § 3. Bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen.

Es ist sehr bemerkenswert, daß die Analogie der Funktionen $Q(x, \nu)$ und $e^x$ auch auf bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen ausgedehnt werden kann, indem es möglich ist, eine Reihe solcher

[1]) [2]) [3]) Beiträge, p. 75.

Digitized by Google

Integrale, welche den altbekannten mit Zylinderfunktionen und der Exponentialfunktion [1]) analog sind, mittels bekannter Funktionen auszudrücken.

Erstens setzen wir in § 2, (3)

$$a_s = \frac{(-1)^s}{s!},$$

dann kommt

$$F(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{s!\,\Gamma(\rho - \nu + s + 1)} = x^{\frac{\nu-\rho}{2}} \cdot J^{\rho-\nu}(2\sqrt{x}),$$

und somit findet man

$$(1) \qquad \int_0^\infty Q(ty, 1-\nu)\, J^{\rho-\nu}(2\sqrt{tx})\, t^{\frac{\nu+\rho}{2}-1}\, dt = x^{-\frac{\nu+\rho}{2}} P\left(\frac{x}{y}, \rho\right),$$

wo $P(x, \nu)$ diejenige in § 2 eingeführte komplementäre Funktion bedeutet; in (1) muß man offenbar allgemein $\Re(y) > 0$, $\Re(\rho - \nu) > -1$ oder speziell wegen des asymptotischen Ausdruckes für $J^\nu(x)$, [2]) $\Re(y) = 0$, $x$ positiv und $-1 < \Re(\rho - \nu) < 3$ annehmen.

Aus (1) findet man daher für $x = y = 1$ die elegantere Formel:

$$(2) \qquad \int_0^\infty Q(t, 1-\nu)\, J^{\rho-\nu}(2\sqrt{t})\, t^{\frac{\nu+\rho}{2}-1}\, dt = P(\rho),$$

während die Annahme $\rho = 1$, nach einer leichten Änderung der Bezeichnungen, wegen § 2, (7) diese andere Integraldarstellung liefert:

$$(3) \qquad \int_0^\infty Q(ty, \nu)\, J^\nu(2\sqrt{tx})\, t^{-\frac{\nu}{2}}\, dt = x^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{x}{y}}\right),$$

woraus für $\nu = 0$ die spezielleren Formeln

$$(4) \qquad \int_0^\infty \mathrm{li}(e^{-t})\, J^0(2\sqrt{tx})\, dt = \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

$$(5) \qquad \int_0^\infty C_i(t)\, J^0(2\sqrt{tx})\, dt = -\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$(6) \qquad \int_0^\infty S_i(t)\, J^0(2\sqrt{tx})\, dt = -\frac{\sin x}{x};$$

in den beiden letzten Formeln darf $x$ nur positiv sein.

[1]) Man vergleiche mein Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 184 ff.; Leipzig, Teubner, 1904.

[2]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 156 und 7.

Digitized by Google

Weiter gibt eine Anwendung der Formel [1])

$$J^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x,$$

indem man in (3) $\nu = \frac{1}{2}$ einführt, diese andere Formelgruppe mit Krampschen und Fresnelschen Integralen:

$$(8) \qquad \int_0^\infty K(t) \sin(2tx)\, dt = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \cdot (1 - e^{-x^2})$$

$$(9) \qquad \int_0^\infty F_1(t) \sin(2tx)\, dt = -\frac{2 \sin\frac{\pi}{8} \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{\pi}}$$

$$(10) \qquad \int_0^\infty F_2(t) \sin(2tx)\, dt = -\frac{2 \cos\frac{\pi}{8} \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{\pi}};$$

in (9) und (10) darf $x$ wieder nur als *reell* angesehen werden.

Als zweites Beispiel setzen wir in § 2, (3)

$$a_s = \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\rho - \nu + 1}{2} + s\right)}{s!};$$

die bekannte Reihenentwicklung [2])

$$(11) \qquad e^{-x} J^\nu(xi) = \frac{(2xi)^\nu}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma\left(\nu + s + \frac{1}{2}\right)}{s!\, \Gamma(2\nu + s + 1)} \cdot (2x)^s$$

ergibt dann unmittelbar diese andere Integralformel

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty Q(ty, 1-\nu)\, J^{\frac{\rho-\nu}{2}}\left(\frac{txi}{2}\right) e^{-\frac{tx}{2}} t^{\frac{\nu-\rho}{2}}\, dt = \\ = \frac{i^{\frac{\rho-\nu}{2}}}{x^{\frac{\nu+\rho}{2}}\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\rho-\nu+1}{2} + s\right)}{s!\,(\rho+s)} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\rho+s}, \end{array} \right.$$

woraus für $\nu = \rho = \frac{1}{2}$ diese speziellere Formel

$$(13) \qquad \int_0^\infty K(t)\, e^{-\frac{t^2x^2}{2}} J^0\left(\frac{t^2x^2 i}{2}\right) dt = \frac{2}{x} \cdot \log(x + \sqrt{1+x^2});$$

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 156 und 7.
[2]) Ebenda, p. 21, 87 und 227.

Digitized by Google

setzt man noch in (13) $xi$ statt $x$, so erhält man eine Integraldarstellung für arc sin $x$.

Weiter setzen wir in (12) $\rho = \nu + 1$, dann kommt wegen (7) die Formel § 2, (10) für $\rho = \nu$.

Als drittes Beispiel setzen wir in § 2, (3)

$$\nu = \frac{\rho+1}{2} \qquad a_s = \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}+s\right)}{s!\,\Gamma(\rho+s)};$$

dann entfließt wegen (11) diese andere Formel

$$(14)\qquad \int_0^\infty Q\left(ty, \frac{1-\rho}{2}\right) J^{\rho-1}(2\sqrt{tx})\, t^{\frac{\rho-1}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{i^{\frac{\rho}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}}} \cdot J^{\frac{\rho}{2}}\left(\frac{xi}{2}\right),$$

woraus für $\rho = 1$ die Formel (4).

Wir haben noch in diesem Zusammenhang die Lommelsche Funktion [1])

$$(15)\quad \Pi^{a,b}(x) = \cos\frac{\pi}{2}(a-b) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{b+2s}}{\Gamma\left(\frac{b+a}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{b-a}{2}+s+1\right)},$$

anzuwenden. Zu dem Ende setzen wir in § 2, (3)

$$a_s = \frac{1}{\Gamma(\rho+s)};$$

dann kommt diese andere Darstellung der $P$-Funktion

$$(16)\quad \begin{cases} \int_0^\infty Q(ty, 1-\nu)\, \Pi^{\nu-1,\, 2\rho-\nu-1}(2i\sqrt{tx})\, t^{\frac{\nu-1}{2}}\, dt = \\ \qquad = \dfrac{i^{2\rho-\nu-1} \cdot \cos\frac{\pi}{2}(\rho-\nu)}{\Gamma(\rho)\, x^{\frac{\nu-1}{2}}} \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot P\left(\frac{x}{y}, \rho\right), \end{cases}$$

woraus für $\rho = 1$ eine neue Herleitung der Formel (3); denn es ist offenbar

$$\Pi^{a,\,a}(x) = J^a(x), \quad \Pi^{a,\,-a}(x) = \cos a\pi \,.\, J^{-a}(x).$$

Setzt man weiter in (16) $\rho = \nu$, so kommt nach einer leichten Änderung der Bezeichnungen die andere Formel

$$(17)\quad \int_0^\infty Q(ty, \nu) J^{-\nu}(2i\sqrt{tx})\, t^{-\frac{\nu}{2}}\, dt = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} \cdot x^{\frac{\nu}{2}-1}}{\Gamma(1-\nu)} \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot P\left(\frac{x}{y}, 1-\nu\right);$$

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 21, 87 und 227.

Digitized by Google

kombiniert man demnach diese Formel mit der aus (3) erhaltenen, indem man dort $-x = x \cdot e^{\pi i}$ statt $x$ einführt, so gibt die Definition der Zylinderfunktion zweiter Art [1])

$$Y^{\nu}(x) = \cot \nu\pi \cdot J^{\nu}(x) - \frac{1}{\sin \nu\pi} \cdot J^{-\nu}(x)$$

diese andere Formel

$$(18)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} Q(t,\nu)\, Y^{\nu}(2i\sqrt{t}x)\, t^{-\frac{\nu}{2}}\, dt = \\ i^{-\nu} x^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{x}\left[(1-e^{-x})\, e^{\nu\pi i} \cdot \cot \nu\pi - \frac{1}{\Gamma(1-\nu)\sin \nu\pi} \cdot P(x, 1-\nu)\right]. \end{cases}$$

Für $\nu = 0$ wird der Ausdruck rechter Hand in (18) unbestimmt; die gewöhnliche Methode liefert, aber durch Anwendung der Identität [2])

$$Y^{0}\left(x \cdot e^{\frac{\pi i}{2}}\right) = Y^{0}(x) + \pi i \cdot J^{0}(x)$$

und der Formel (4), diese neue Integraldarstellung

$$(19)\quad \int_0^{\infty} \mathrm{li}(e^{-t})\, Y^{0}(2\sqrt{t}x)\, dt = \frac{1}{\pi x} \cdot \left[C + \log x - e^{x}\,\mathrm{li}(e^{-x})\right],$$

und somit erlaubt die Differentialformel [3])

$$D_x^{n}\, Y^{0}(2\sqrt{t}x) = \left(-2\sqrt{\frac{t}{x}}\right)^{n} \cdot Y^{n}(2\sqrt{t}x)$$

dieses noch allgemeinere Integral

$$\int_0^{\infty} \mathrm{li}(e^{-t})\, Y^{n}(2\sqrt{t}x)\, t^{\frac{n}{2}}\, dt$$

zu bestimmen; der so erhaltene Ausdruck wird indessen äußerst kompliziert.

Setzt man endlich in (17) $\nu = \frac{1}{2}$, so kommt diese mit (19) analoge Formel

$$(20)\quad \int_0^{\infty} K(t) \cos(2i\sqrt{t}x)\, dt = \frac{2e^{x^2}}{\pi x} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - K(x)\right).$$

Kopenhagen, 2. Oktober 1905.

[1]) [2]) [3]) Handbuch der Zylinderfunktionen. p. 11, 12 und 28.

Digitized by Google

# Zur Theorie der Jacobischen Differentialgleichung.

Von **Karl Carda** in Wien.

Eduard Weyr hat in einer interessanten Arbeit über Differentialgleichungen mit Fundamentallösungen das folgende Theorem bewiesen:

Die aus den Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - B(u)}{x - A(u)},$$

$$x \cdot p(u) + y \cdot q(u) + r(u) = 0$$

durch Elimination von $u$ entstehende Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $x$ und $y$ läßt sich durch Quadraturen integrieren, sobald *eine* Lösung derselben bekannt ist. Insbesondere ist dies der Fall, wenn die Kurve

$$x = A(u)$$
$$y = B(u)$$

eine Gerade ist.[1])

Wir wollen zeigen, daß das Theorem von Eduard Weyr die Theorie der Jacobischen Differentialgleichung umfaßt. Zu diesem Zwecke genügt es, das genannte Theorem für einen besonders einfachen Fall zu beweisen.

## 1.

Wir definieren in der Ebene der $x$, $y$ $\infty^2$ Linienelemente in folgender Weise. Wir ordnen den Punkten $(X, Y)$ einer Kurve $K$ die Strahlen eines Büschels, dessen Scheitel wir der Einfachheit halber in den Koordinatenursprung verlegen, durch Gleichungen von beliebiger Form zu,

$$X = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$Y = \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

[1]) Zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung. Abhandlungen der k. böhm. Ges. der Wiss. Prag 1875.

Digitized by Google

Die Strahlen des Büschels, dessen Scheitel der Punkt $(X, Y)$ ist, bestimmen in ihren Schnittpunkten mit dem dem Scheitel $(X, Y)$ entsprechenden Strahl des Büschels $y = a\,x$ $\infty^1$ Linienelemente. Wir erhalten so in der Ebene der $x$, $y$ $\infty^2$ Linienelemente, welche eine gewisse Differentialgleichung erster Ordnung bestimmen. Diese lautet offenbar

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y - \psi\left(\frac{y}{x}\right)}{x - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{1}$$

Durch die projektive Transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y}{x}, \\ y_1 &= \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{2}$$

geht das Büschel $y = a\,x$ in das Büschel $x_1 = \text{konst.}$ über, also gehen die $\infty^2$ früher definierten Linienelemente in die Figur über, welche die Lagerung der $\infty^2$ Linienelemente einer **linearen** Differentialgleichung veranschaulicht. Durch die projektive Transformation (2) geht also die Gleichung (1) in eine **lineare** Gleichung über. Die Rechnung liefert in der Tat als Differentialgleichung zwischen $x_1$, $y_1$

$$\frac{d\,y_1}{d\,x_1} + \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1) - x_1\,\varphi'(x_1)} \cdot y_1 = \frac{1}{\psi'(x_1) - x_1\,\varphi'(x_1)}. \tag{3}$$

## 2.

Wir wollen nun die allgemeinste Differentialgleichung (1) aufstellen, für welche die Kurve $K$ eine Gerade ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) &\equiv -\frac{A + B\,\vartheta\left(\frac{y}{x}\right)}{a + b\,\vartheta\left(\frac{y}{x}\right)} \\ \psi\left(\frac{y}{x}\right) &\equiv -\frac{C + D\,\vartheta\left(\frac{y}{x}\right)}{a + b\,\vartheta\left(\frac{y}{x}\right)} \end{aligned} \tag{4}$$

ist, wo $\vartheta$ eine willkürliche Funktion bedeutet, während $A$, $B$, $C$, $D$, $a$, $b$ willkürliche Konstante sind. Die Gleichung (1) erhält dann die Form

Digitized by Google

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(by+D)\,\vartheta\left(\frac{y}{x}\right) + ay + C}{(bx+B)\,\vartheta\left(\frac{y}{x}\right) + ax + A}. \tag{5}$$

Wenn die Kurve $K$ eine Gerade allgemeiner Lage ist, so ist sie stets eine Integralkurve der Gleichung (1). Dies ist geometrisch klar.

Die Gleichung dieser Geraden ergibt sich aus (4)

$$\left|\begin{matrix} a & C \\ b & D \end{matrix}\right| \cdot x - \left|\begin{matrix} a & A \\ b & B \end{matrix}\right| \cdot y + \left|\begin{matrix} A & C \\ B & D \end{matrix}\right| = 0.$$

Vermöge der projektiven Transformation (2) erhält man hieraus die Gerade

$$\left|\begin{matrix} a & C \\ b & D \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} a & A \\ b & B \end{matrix}\right| \cdot x_1 + \left|\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}\right| \cdot y_1 = 0. \tag{6}$$

Wenn nun

$$\left|\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}\right| \gtrless 0$$

ist, so gibt (6) eine Integralgerade der Gleichung (3). Demnach kommt die Integration dieser Gleichung auf die Ausführung einer Quadratur hinaus.

Ist dagegen

$$\left|\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}\right| = 0,$$

so ist der Quotient $\varphi : \psi$ eine Konstante. Daher läßt sich die Gleichung (3) auch in diesem Falle durch eine Quadratur integrieren. Demnach ergibt sich:

Jede Gleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(by+D)\,\vartheta\left(\frac{y}{x}\right) + ay + C}{(bx+B)\,\vartheta\left(\frac{y}{x}\right) + ax + A}$$

läßt sich durch eine einzige Quadratur integrieren.

3.

Wir wollen die in der Gleichung (5) auftretende willkürliche Funktion $\vartheta$ durch eine rationale Funktion ihres Argumentes ersetzen. Dann kommt die Integration der betreffenden Differentialgleichung, wie aus (3) erhellt, auf die Integration einer gewissen rationalen Funktion hinaus. Da diese Integration immer in geschlossener Form durchgeführt werden kann, so ergibt sich:

Digitized by Google

Jede Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(by+D)\,R\left(\frac{y}{x}\right)+ay+C}{(bx+B)\,R\left(\frac{y}{x}\right)+ax+A},$$

wo $R$ eine rationale Funktion ihres Argumentes bedeutet, läßt sich ohne Quadraturen integrieren.

Wir betrachten jetzt insbesondere den Fall

$$R\left(\frac{y}{x}\right) \equiv \frac{y}{x}.$$

Die zugehörige Differentialgleichung läßt sich in der Form schreiben

$$(7) \qquad \frac{dx}{Ax+By+ax^2+bxy} = \frac{dy}{Cx+Dy+axy+by^2}.$$

Diese Gleichung ist offenbar eine Jacobische Differentialgleichung. Die allgemeine Jacobische Differentialgleichung hat die Form

$$(8) \qquad \frac{dx}{a_1+a_2x+a_3y+ax^2+bxy} = \frac{dy}{b_1+b_2x+b_3y+axy+by^2}$$

Um diese Gleichung zu integrieren, wird man sie zunächst vermöge einer passenden Translation um die Strecken $\alpha$, $\beta$ auf die Form (7) bringen. Diese Aufgabe ist äquivalent der Aufgabe die Schnittpunkte der beiden Kegesschnitte

$$a_1+a_2\alpha+a_3\beta+a\alpha^2+b\alpha\beta = 0,$$
$$b_1+b_2\alpha+b_3\beta+a\alpha\beta+b\beta^2 = 0$$

zu finden. Da unter den vier Asymptoten dieser Kegelschnitte bekanntlich zwei von gleicher Richtung sind, so kommt die Aufgabe die allgemeine Jacobische Differentialgleichung zu integrieren auf die Lösung einer kubischen Gleichung zurück. Die Gleichung (8) läßt sich im allgemeinen auf drei verschiedene Arten in eine Gleichung von der Form (7) transformieren. Hieraus schließt man, daß die allgemeine Jacobische Gleichung unter ihren Integralkurven drei Gerade besitzt.

Digitized by Google

# Über einen Satz von Osgood in der Variationsrechnung.

Von **Hans Hahn** in Wien.

## § 1.

In der Theorie der Maxima und Minima stetiger Funktionen besteht der folgende Satz: Es sei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in der Umgebung der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ stetig und habe an dieser Stelle ein eigentliches Minimum, so daß eine Umgebung dieser Stelle besteht, in der die Ungleichung gilt:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) > 0.$$

Ist dann $U'$ ein zweites Gebiet, das ganz im Innern von $U$ liegt und den Punkt $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ in seinem Innern enthält, so gibt es eine positive Konstante $\varepsilon$, derart, daß für alle Punkte von $U$, die nicht zu $U'$ gehören, die weitere Ungleichung besteht:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) > \varepsilon.$$

Herr Osgood [1]) hat nun — unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen — das Bestehen eines analogen Satzes für das einfachste Problem der Variationsrechnung nachgewiesen. Sein Beweis hat seither wesentliche Vereinfachungen erfahren. [2]) Ein ganz ähnliches Theorem diente Herrn Kneser [3]) zum Nachweise der Stabilität des Gleichgewichtes schwerer hängender Fäden, also bei einem speziellen isoperimetrischen Problem. Im folgenden will ich eine Methode angeben, die der von Herrn Kneser verwendeten sehr ähnlich ist und die in überaus einfacher Weise zum Ziele führt. Im Falle des einfachsten Problems liefert sie mit geringen Einschränkungen das gewünschte Resultat in allen Fällen, in denen man das starke Extremum allgemein nachweisen kann, und sie gestattet in einfacher Weise eine Verallgemeinerung auf fast alle Probleme der Variationsrechnung, die sich mit einfachen Integralen beschäftigen.

[1]) W. F. Osgood, Amer. Trans. 2 (1901), p. 273.

[2]) O. Bolza, Amer. Trans. 2 (1901), p. 422 und Lectures on the calculus of variations (1904), p. 190. — E. Goursat. Amer. Trans. 5 (1904), p. 110.

[3]) A. Kneser, J. f. Math. 125 (1903), p. 189.

Digitized by Google

Wir beginnen mit dem einfachsten Problem. Es sei ein sich selbst nicht schneidender Bogen einer Extremale des Integrals:

$$(1) \qquad J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\, dt$$

gegeben,[1]) der den folgenden Bedingungen genüge:

*a*) In keinem seiner Punkte verschwinden $x'$ und $y'$ gleichzeitig.

*b*) Die durch die Relationen:

$$\frac{1}{y'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = -\frac{1}{x'y'}\frac{\partial^2 F}{\partial x'\,\partial y'} = \frac{1}{x'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = F_1$$

definierte Funktion $F_1(x, y, x', y')$ ist auf ihm durchwegs von Null verschieden, d. h. keines seiner Elemente ist ein singuläres Element der zum Integral (1) gehörenden Lagrangeschen Differentialgleichungen.

*c*) Die Weierstraßsche $E$-Funktion:

$$E(x, y;\, x', y';\, \bar{x}', \bar{y}') = \bar{x}'\left\{\frac{\partial F}{\partial x'}(x, y, \bar{x}', \bar{y}') - \frac{\partial F}{\partial x'}(x, y, x', y')\right\} +$$
$$+ \bar{y}'\left\{\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, \bar{x}', \bar{y}') - \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, x', y')\right\}$$

ist auf ihm für alle $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ positiv und verschwindet nur in ordentlicher Weise.

*d*) Er enthält den zu seinem Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht.

Dann läßt sich bekanntlich nachweisen, daß unser Extremalenbogen dem Integral (1) einen kleineren Wert erteilt, als jede andere genügend benachbarte, dieselben Punkte verbindende Vergleichskurve.[2])

Wir wollen darüber hinaus — mit einer später zu erwähnenden Einschränkung — den folgenden Satz beweisen (Satz von Osgood):

Es läßt sich eine Nachbarschaft $U'$ unseres Extremalenbogens angeben von der nachstehenden Eigenschaft. Zu jeder ganz im Innern von $U$ liegenden Nachbarschaft $U''$ unserer Extremale gehört eine positive Konstante $\varepsilon$, derart, daß jede ganz in $U'$, aber nicht ganz in $U''$ verlaufende Vergleichskurve dem Integral (1) einen um mindestens $\varepsilon$ größeren Wert erteilt als die Extremale.

---

[1]) Die Funktion $F(x, y, x', y')$ möge dabei die in der Variationsrechnung üblichen Voraussetzungen erfüllen. Siehe etwa Bolza, Lectures, p. 115 ff.

[2]) Als Vergleichskurve kann, wenn man vom Lebesgueschen Integralbegriff Gebrauch macht, jede rektifizierbare Kurve betrachtet werden.

Digitized by Google

Eine vielleicht etwas anschaulichere Formulierung dieses Satzes ist die folgende:

Es besteht eine Umgebung $U$ unseres Extremalenbogens von der nachstehenden Eigenschaft: Es seien $C_1, C_2, \ldots$ eine Folge ganz in $U$ gelegener Vergleichskurven; $J_1, J_2, \ldots$ seien die Werte, die diese Kurven dem Integral (1) erteilen. Ist dann $\lim_{n=\infty} J_n$ gleich dem Werte, den die Extremale dem Integral erteilt, so konvergieren die Kurven $C_1, C_2, \ldots$ gegen die Extremale.

Wir gehen nun an den Beweis dieses Satzes. Der Anfangspunkt unseres Extremalenbogens werde kurz als Punkt 0 bezeichnet, der Endpunkt als Punkt 1. Allgemein heiße der zu einem Parameterwert $\nu$ gehörige Punkt der Punkt $\nu$. Wir können dann unsere Extremale über die Punkte 0 und 1 hinaus fortsetzen, ohne daß die Bedingungen *a*) *b*) *c*) *d*) zu bestehen aufhören. Ein so erhaltener Bogen $0'\,1'$ unserer Extremale, der nun den Bogen 0 1 in seinem Innern enthält, liefert gleichfalls ein starkes Extremum des Integrals (1).

Es bedeute:

$$x = x(t, a) \quad y = y(t, a) \tag{2}$$

die durch den Punkt $0'$ hindurchgehende einparametrige Extremalenschar; unsere Extremale $0'\,1'$ werde hieraus erhalten für $a = a_0$. Da der Bogen $0'\,1'$ den zu $0'$ konjugierten Punkt nicht enthalten soll, besteht für $a = a_0$, $t_0' < t \leqq t_1'$ die Ungleichung:

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial t} \neq 0,$$

aus der in bekannter Weise abgeleitet werden kann, daß sich der Bogen 0 1 mit einer Nachbarschaft $U$ umgeben läßt, deren jeder Punkt sich mit $0'$ durch eine und — wenn man weiter verlangt, daß $|a - a_0|$ unter einer gewissen Grenze bleiben soll — nur eine Extremale der Schar (2) verbinden läßt.

Es bedeute weiter:

$$x = x^*(t, \alpha) \quad y = y^*(t, \alpha) \tag{2a}$$

die durch den Punkt $1'$ hindurchgehende einparametrige Extremalenschar, die für $\alpha = \alpha_0$ unsere Extremale $0'\,1'$ liefere. Dann kann bekanntlich die Determinante:

$$\frac{\partial x^*}{\partial t}\frac{\partial y^*}{\partial \alpha} - \frac{\partial x^*}{\partial \alpha}\frac{\partial y^*}{\partial t}$$

für $\alpha = \alpha_0$, $t_0' \leqq t < t_1'$ nicht verschwinden, woraus folgt, daß das Gebiet $U$ auch so gewählt werden kann, daß jeder seiner Punkte mit $1'$ durch eine und — sofern $|\alpha - \alpha_0|$ genügend klein sein soll — nur eine Extremale der Schar (2*a*) sich verbinden läßt.



Digitized by Google

Endlich ergibt sich sehr leicht, daß man das Gebiet $U$ auch noch so wählen kann, daß es auch der folgenden Forderung genügt: Wenn 2 einen beliebigen Punkt von $U$ bezeichnet, so erteilt die Extremale $0'2$ dem Integral (1) einen kleineren Wert als jede andere Kurve $0'2$, die von $0'$ bis 0 mit der Extremale $0'1'$ zusammenfällt, von 0 bis 2 aber im Gebiete $U$ verbleibt, während die analoge Aussage auch von der Extremale $21'$ gelten soll.

Es werde nun mit $J^*$ der Wert bezeichnet, den das Integral (1) erhält, wenn man es von $0'$ bis 2 über die Extremale $0'2$, von 2 bis $1'$ über die Extremale $21'$ erstreckt. Offenbar ist dann die im Gebiete $U$ eindeutig definierte Funktion $J^*$ in diesem Gebiete eine stetige Funktion des Punktes 2. Nehmen wir also im Innern von $U$ ein zweites Gebiet $U'$ an und beschränken den Punkt 2 auf jenes Teilgebiet von $U$, das außerhalb von $u'$ liegt und das mit $U''$ bezeichnet werde, so muß in diesem Teilgebiete — wenn wir seine Begrenzung mit zu diesem Gebiete rechnen — die Funktion $J^*$ eine untere Grenze $J_0^*$ besitzen und in einem Punkte dieses Gebietes gleich $J_0^*$ werden. Enthält speziell das Gebiet $U''$ keinen einzigen Punkt des Extremalenbogens $0'1'$ und bezeichnet $J_0'$ den Wert, den die Extremale $0'1'$ dem Integral (1) erteilt, so ist sicher $J_0^* > J_0'$, da ja die Extremale $0'1'$ das Integral (1) zu einem starken Minimum macht.

Sei nun irgend eine von 0 nach 1 gehende, ganz in $U$ gelegene Vergleichskurve gegeben, deren mindestens ein Punkt nach $U''$ fällt. Sei etwa 2 ein solcher Punkt. Wir ergänzen diese Kurve durch die Extremalenstücke $0'0$ und $11'$ zu einer die Punkte $0'$ und $1'$ verbindenden Kurve. Der Bogen $0'2$ dieser Kurve erteilt dem Integral (1) einen größeren Wert als der Extremalenbogen $0'2$ und dasselbe gilt von ihrem Bogen $21'$ und dem Extremalenbogen $21'$. Es ist daher der Wert, den unsere Vergleichskurve $0'1'$ dem Integral (1) erteilt, sicher größer als $J_0^*$, daher mindestens um $J_0^* - J_0'$ größer als $J_0'$. Daraus folgt unmittelbar, daß auch der Wert, den unsere ursprüngliche Vergleichskurve 01 dem Integral (1) erteilt, mindestens um die positive Größe $J_0^* - J_0'$ größer ist als der Wert, den die Extremale 01 diesem Integral erteilt.

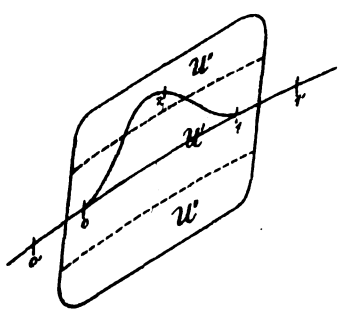


Fig. 1.

Unser Satz ist also bewiesen, allerdings unter einer einschränkenden Voraussetzung über das Gebiet $U'$. Dasselbe muß so beschaffen sein, daß das Gebiet $U''$, durch welches $U'$ zu $U$ ergänzt wird, mit der Verlängerung unserer Extremale über 0 und 1 hinaus keinen Punkt gemeinsam hat. Fig. 1 erläutert diese Einschränkung. [1])

[1]) Es sei bemerkt, daß beim Problem $\int f(x, y, y')\,dx$ diese Einschränkung nicht zur Geltung kommt, so daß man bei diesem Problem, sobald man die

Digitized by Google

Um uns von dieser Einschränkung zu befreien, machen wir eine weitere Voraussetzung, betreffend die Funktion $F_1(x, y, x', y')$. Es werde nämlich angenommen:

*e*) In den beiden Punkten 0 und 1 sei $F_1(x, y, \bar{x}', \bar{y}')$ von Null verschieden für alle $\bar{x}', \bar{y}'$.

Da dann nämlich der Satz gilt, daß jeder dem Punkte 0 beziehungsweise dem Punkte 1 genügend nahe liegende Punkt mit 0 beziehungsweise 1 durch eine und nur eine Extremale des Integrals (1) verbunden werden kann,[1]) so überzeugt man sich leicht, daß folgende Behauptung richtig ist:

Der Extremalenbogen 0 1 läßt sich mit einem Gebiete $U$ umgeben, das sowohl von einem von 0, als von einem von 1 ausgehenden Felde von Extremalen einfach und vollständig überdeckt wird.

Hieraus folgt in bekannter Weise, daß, wenn mit 2 irgend ein Punkt von $U$ bezeichnet wird, die Extremale 0 2 dem Integral (1) einen kleineren Wert erteilt, als jede andere ganz in $U$ von 0 nach 2 laufende Kurve, und die analoge Behauptung gilt für die Extremale 2 1. Auf Grund dieser Bemerkung läßt sich aber unser obiger Beweis Wort für Wort wiederholen, wenn man in ihm die Extremalen 0′ 2 und 2 1′ durch 0 2 und 2 1 ersetzt und man gelangt so — nunmehr ohne jede Einschränkung — zu dem Osgoodschen Satze.

Schließlich sei noch erwähnt, daß der Inhalt dieses Satzes in einem speziellen, aber besonders wichtigen Falle einer Verschärfung fähig ist. Es sei nämlich von einem Extremalenbogen 0 1 bekannt, daß er dem Integral (1) einen kleineren Wert erteile als jede andere in einem gewissen Gebiete $R$ verlaufende Vergleichskurve 0 1, und es sei in dem Gebiete $R$ durchwegs:

$$F(x, y, \bar{x}', \bar{y}') > 0; \quad F_1(x, y, \bar{x}', \bar{y}') > 0.$$

Es sind dies die Bedingungen,[2]) unter denen der bekannte Hilbertsche Existenzbeweis geführt werden kann,[3]) aus dem unmittelbar folgt, daß jetzt für das in unserem Satze vorkommende Gebiet $U$ das Gebiet $R$ selbst gewählt werden kann.

---

in Bolza, Lectures, p. 94, aufgezählten hinreichenden Bedingungen als erfüllt annimmt, den Osgoodschen Satz ganz allgemein aussprechen kann.

[1]) Ausführlich bewiesen von G. A. Bliss, Amer. Trans. 5 (1904), p. 115.

[2]) Der Beweis, den Osgood für seinen Satz gegeben hat, setzt gerade voraus, daß die angeschriebenen Bedingungen für alle von Punkten unseres Extremalenbogens ausgehenden Linienelemente erfüllt sind. Bolzas Beweis bedarf der ersten der beiden Ungleichungen nicht.

[3]) Siehe Bolza, Lectures, p. 245 ff. Bolza setzt dort voraus, das Gebiet $R$ sei konvex, doch genügt es zu wissen, daß, wenn zwei Punkte von $R$ gegeneinander konvergieren, die Länge ihrer kürzesten Verbindungslinie in $R$ gegen Null konvergiert.



Digitized by Google

## § 2.

Wir gehen nun über zum einfachsten Typus isoperimetrischer Probleme. Es sei das Integral:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\, dt \tag{3}$$

zu einem Minimum zu machen gegenüber allen Kurven, die dem Integral:

$$K = \int_{t_0}^{t_1} G(x, y, x', y')\, dt \tag{4}$$

einen vorgeschriebenen Wert erteilen, und es sei eine sich selbst nicht schneidende, die beiden Punkte 0 und 1 verbindende Extremale dieses isoperimetrischen Problems gegeben, das ist also eine für einen geeigneten Wert $\lambda_0$ der „isoperimetrischen Konstante" $\lambda$ den Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} + \lambda\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial x'}\right) = 0; \\ &\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial y'}\right) = 0 \end{aligned}\right. \tag{5}$$

genügende Kurve. Wir setzen:

$$F(x, y, x', y') + \lambda_0 G(x, y, x', y') = H(x, y, x', y'). \tag{6}$$

Über den Extremalenbogen 0 1 mögen die folgenden Voraussetzungen eingeführt werden: [1])

*a*) In keinem seiner Punkte verschwinden $x'$ und $y'$ gleichzeitig.

*b*) Die durch die Relationen:

$$\frac{1}{y'^2}\frac{\partial^2 H}{\partial x'^2} = -\frac{1}{x'y'}\frac{\partial^2 H}{\partial x'\partial y'} = \frac{1}{x'^2}\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2} = H_1$$

definierte Funktion $H_1(x, y, x', y')$ ist für alle seine Elemente von Null verschieden, so daß keines dieser Elemente ein singuläres Element der Differentialgleichungen (5) ist.

*c*) Die Weierstraßsche $E$-Funktion:

$$\left\{\begin{aligned} E(x, y, x', y', \bar{x}', \bar{y}') = \bar{x}'&\left\{\frac{\partial H}{\partial x'}(x, y, \bar{x}', \bar{y}') - \frac{\partial H}{\partial x'}(x, y, x', y')\right\} + \\ &+ \bar{y}'\left\{\frac{\partial H}{\partial y'}(x, y, \bar{x}', \bar{y}') - \frac{\partial H}{\partial y'}(x, y, x', y')\right\} \end{aligned}\right.$$

[1]) Es sind dies die Voraussetzungen, unter denen neuerdings J. W. Lindeberg das Bestehen eines starken Minimums nachgewiesen hat. Math. Ann. 69 (1904). p. 333.

Digitized by Google

ist auf ihm für alle $\bar{x}', \bar{y}'$ positiv und verschwindet nur in ordentlicher Weise.

*d*) Er genügt **nicht** den Gleichungen:

$$(7) \qquad \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial x'} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial y'} = 0,$$

d. h. er ist nicht Bogen einer Extremale des Integrals (4) im Sinne des absoluten Extremums.

*e*) Er enthält den zu seinem Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht.

Diese letztere Bedingung drückt sich analytisch bekanntlich in folgender Weise aus. Es sei:

$$(8) \qquad x = x(t, a, b) \qquad y = y(t, a, b)$$

die durch den Punkt 0 gehende zweiparametrige Schar von Extremalen[1]) und der Bogen 0 1 unserer Extremale werde aus (8) erhalten für $a = a_0$, $b = b_0$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$. Auf der durch die beiden Konstanten $a, b$, bestimmten Extremale entspreche dem Punkte 0 der Parameterwert $t_{ab}$ und es werde gesetzt:

$$(9) \quad z(t, a, b) = \int_{t_{ab}}^{t} G[x(t, a, b), y(t, a, b), x'(t, a, b), y'(t, a, b)]\, dt.$$

Dann muß für $a = a_0$, $b = b_0$, $t_0 < t \leqq t_1$ die Ungleichung bestehen:

$$(10) \qquad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, a, b)} \neq 0.$$

Es sei ferner:

$$(8a) \qquad x = x^*(t, \alpha, \beta) \qquad y = y^*(t, \alpha, \beta)$$

die durch den Punkt 1 gehende zweiparametrige Extremalenschar, die den Bogen 0 1 für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$ liefere, und zwar entspreche auf der durch die beiden Konstanten $\alpha, \beta$ definierten Extremale dem Punkte 1 der Parameterwert $t_{\alpha\beta}$. Setzen wir dann noch:

$$z_1 = \int_{t_0}^{t_1} G[x(t, a_0, b_0), y(t, a_0, b_0), x'(t, a_0, b_0), y'(t, a_0, b_0)]\, dt$$

und definieren eine Größe $z^*$ durch

$$(9a) \quad z_1 - z^*(t, \alpha, \beta) = \int_{t}^{t_{\alpha\beta}} G[x(t, \alpha, \beta), y(t, \alpha, \beta), x'(t, \alpha, \beta), y'(t, \alpha, \beta)]\, dt,$$

[1]) d. i. Lösungen der Gleichungen (5). Die Größe $\lambda$ gilt dabei als variabler Parameter.

Digitized by Google

so ist auch die Determinante:

$$\frac{\partial(x^*, y^*, z^*)}{\partial(t, \alpha, \beta)} \tag{10a}$$

für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $t_0 \leqq t < t_1$ von Null verschieden.

Um nun den Osgoodschen Satz auch für unser isoperimetrisches Problem zu beweisen, führen wir eine weitere Voraussetzung ein:

*f*) Auf dem Extremalenbogen 0 1 sei für alle $\bar{x}', \bar{y}'$:

$$G(x, y, \bar{x}', \bar{y}') > 0; \quad G_1(x, y, \bar{x}', \bar{y}') > 0,$$

eine Voraussetzung, die bei den wichtigeren Problemen dieser Art gewöhnlich erfüllt ist. [1])

Wir konstruieren nun eine Nachbarschaft des Extremalenbogens 0 1, indem wir den Mittelpunkt eines Kreises vom Radius $\rho$ diesen Bogen durchlaufen lassen; der von diesem Kreise überstrichene Flächenstreifen heiße die Nachbarschaft ($\rho$).

Wir umgeben einen beliebigen Punkt 2 unseres Extremalenbogens mit einem Kreise vom Radius $\rho$; 3 sei ein beliebiger im Innern dieses Kreises liegender Punkt irgend einer in der Nachbarschaft ($\rho$) verbleibenden, zulässigen Vergleichskurve. Die Voraussetzung *f*) bewirkt das Bestehen des folgenden Satzes:

Die Größe $\rho$ läßt sich — unabhängig von der Wahl des Punktes 2 — so bestimmen, daß sich der Wert, den der Bogen 0 3 der Vergleichskurve dem Integral (4) erteilt, vom Werte, den der Extremalenbogen 0 2 diesem Integral erteilt, um weniger als $\varepsilon$ unterscheidet.

Bemerken wir zunächst, daß sich die Nachbarschaft ($\rho$) gewiß so wählen läßt, daß in jedem ihrer Punkte die Voraussetzung *f*) erfüllt bleibt. Dann sind aber in der ganzen Nachbarschaft ($\rho$) die Bedingungen erfüllt, unter denen gezeigt werden kann, [2]) daß sich je zwei ihrer Punkte durch eine Kurve verbinden lassen, derart, daß keine andere dieselben Punkte verbindende Kurve dem Integrale (4) einen kleineren Wert erteilt. Wir wollen eine solche Kurve kurz als Minimalkurve bezeichnen. Sie muß, wo sie nicht mit der Randkurve der Nachbarschaft ($\rho$) zusammenfällt, den Gleichungen (7) genügen — d. h. eine Extremale des Integrals (4) im Sinne des absoluten Extremums sein — und wo sie die Randkurve der Nachbarschaft trifft, muß sie dieselbe berühren. [3])

Wir beweisen zuerst folgende Behauptung: Wenn nur der Radius $\rho$ unserer Nachbarschaft hinlänglich klein gewählt wird, so können der Bogen 0 2 unserer Extremale (des isoperimetrischen

[1]) Vielleicht ließe sich bei Verwendung des Gedankens von Lindeberg (siehe Fußnote [1]) auf Seite 68) diese Voraussetzung zum Teile vermeiden.

[2]) Siehe Bolza, Lectures, p. 245 ff.

[3]) Siehe Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, p. 176.

Digitized by Google

Problems) und der Bogen 0 3 unserer Minimalkurve [des Integrals (4)] punktweise so aufeinander bezogen werden, daß diese Kurven in entsprechenden Punkten beliebig wenig gegeneinander geneigt sind.

Offenbar ist die Randkurve der Nachbarschaft ($\rho$) — ausgenommen zwei beliebig kurze Strecken in der Nähe der Punkte 0 und 1, die aber, wie man sofort sieht, die folgende Argumentation nicht stören — bei genügend kleinem $\rho$ beliebig wenig gegen die Extremale geneigt; dasselbe gilt daher von den Teilen der Minimalkurve, die etwa mit dieser Randkurve zusammenfallen. Für die übrigen Teile ergibt es sich durch folgende Überlegung.

Die Krümmung einer Extremale des Integrals (4) ist gegeben durch:

$$\frac{1}{r} = \frac{\partial^2 G}{\partial x' \partial y} - \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y'},$$
$$G_1$$

wo unter den Funktionszeichen für $x', y'$ die Richtungskosinus des betreffenden Linienelementes zu setzen sind. Diese Krümmung liegt also für alle unserer Nachbarschaft angehörenden Bögen von Extremalen des Integrals (4) unter derselben Grenze. Das gleiche gilt natürlich von der Randkurve der Nachbarschaft. Die Neigung dieser letzteren gegen die Extremale nimmt, wie schon bemerkt, mit abnehmendem $\rho$ selbst unendlich ab. Gälte nun nicht dasselbe von der Minimalkurve, so müßte sie die Randkurve unter einem nicht verschwindenden Winkel treffen, was unmöglich ist. Unsere Behauptung ist also richtig.

Hieraus folgt ohne weiteres: Es läßt sich $\rho$ so klein wählen, daß der Wert, den die Minimalkurve 0 3 dem Integral (4) erteilt, sich von dem Werte, den die Extremale 0 2 diesem Integral erteilt, um weniger als $\varepsilon$ unterscheidet.

Unsere ursprüngliche Behauptung ergibt sich nun in folgender Weise. Es bezeichne $K_{02}$ das von 0 bis 2 über die Extremale erstreckte Integral (4), $K_{03}$ dasselbe Integral, von 0 bis 3 über die Minimalkurve, $K_{03}$ über eine beliebige Vergleichskurve erstreckt. Dann ist, wie eben gezeigt:

$$K_{03} \geqq K_{03} > K_{02} - \varepsilon; \quad K_{31} \geqq K_{31} > K_{21} - \varepsilon$$

und da:

$$K_{03} + K_{31} = K_{02} + K_{21}$$

sein muß, folgt daraus unmittelbar:

$$K_{03} < K_{02} + \varepsilon; \quad K_{31} < K_{21} + \varepsilon.$$

Das ist gerade das, was wir behauptet hatten.

Digitized by Google

Es sei nun $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$ irgend eine, die beiden Punkte 0 und 1 verbindende zulässige Kurve, $\tau_0$ der zum Punkte 0 gehörende Parameterwert. Wir führen die Größe:

$$z = \int_{\tau_0}^{\tau} G[x(\tau), y(\tau), x'(\tau), y'(\tau)]\, d\tau \tag{11}$$

als dritte Raumkoordinate ein. Alle zulässigen ebenen Kurven werden dadurch auf gewisse, die beiden Raumpunkte 0 und 1 verbindende Raumkurven abgebildet. Unser eben bewiesener Satz sagt dann, daß man in der Ebene die Nachbarschaft $(\rho)$ des Extremalenbogens 0 1 so wählen kann, daß die räumlichen Bilder aller in der Nachbarschaft $(\rho)$ verlaufenden zulässigen Vergleichskurven in eine vorgegebene räumliche Nachbarschaft des Bildes der Extremale 0 1 hineinfallen.

Nun gehen wir so vor, wie im ersten Paragraphen. Wir verlängern den Bogen 0 1 unserer Extremale über 0 und 1 hinaus bis zu den Punkten 0′ und 1′, und zwar so, daß auch der Bogen 0′ 1′ noch allen unseren Forderungen genügt. Die Theorie der isoperimetrischen Probleme lehrt, daß man dann eine räumliche Nachbarschaft $U$ des im Raume gedeuteten Extremalenbogens 0 1 angeben kann, derart, daß:

1. jeder beliebige Punkt 4 derselben sowohl mit 0′ als mit 1′ durch eine eindeutig definierbare Extremale verbunden werden kann; und daß:

2. jeder Bogen 0′ 4 oder 4 1′ einer solchen Extremale dem Integral einen kleineren Wert erteilt als jede zulässige Vergleichskurve, die von 0′ bis 0 (beziehungsweise von 1 bis 1′) mit der Extremale 0′ 1 zusammenfällt, von 0 bis 4 aber (beziehungsweise von 4 bis 1) in der vorgeschriebenen Nachbarschaft verbleibt.

Wie in § 1, leitet man hieraus das Bestehen des folgenden Satzes ab: Es sei $U'$ eine Nachbarschaft des Extremalenbogens 0 1, die ganz im Innern von $U$ liegt, und das Gebiet $U''$, das $U'$ zu $U$ ergänzt, habe mit dem Extremalenbogen 0′ 1′ keinen Punkt gemein. Jede von 0 nach 1 laufende zulässige Vergleichskurve, die mit $U''$ einen Punkt gemein hat, erteilt dem Integral (3) einen um mindestens $\varepsilon$ größeren Wert, als die Extremale 0 1.

Kehren wir zurück in die Ebene. Wir wählen eine ebene Nachbarschaft $\Omega$ des Extremalenbogens 0 1, und zwar so, daß die räumlichen Bilder aller in $\Omega$ verlaufenden zulässigen Vergleichskurven ganz im Gebiete $U$ des eben ausgesprochenen Satzes verbleiben. Im Innern von $\Omega$ nehmen wir — und zwar ganz beliebig — eine Nachbarschaft $\Omega'$ des Extremalenbogens 0 1 an. Dann behaupten wir: Es läßt sich im Innern von $U$ eine räumliche Nachbarschaft $U'$ des räumlich gedeuteten Extremalenbogens 0 1 angeben, welche der Bedingung unseres obigen Satzes genügt und weiter die Eigenschaft hat, daß das räumliche Bild jeder zulässigen Vergleichskurve, die nicht ganz in $\Omega'$ liegt, auch nicht ganz in $U'$ liegt.

Digitized by Google

Führen wir zunächst ein Gebiet $U^*$ ein, das ganz im Innern von $U$ liege, dessen Projektion auf die $xy$-Ebene gerade das Gebiet $\Omega'$ sei, das aber sonst ganz willkürlich sein möge. Dieses Gebiet wird im allgemeinen noch nicht das verlangte Gebiet $U'$ sein. Denn, wenn das Gebiet $\Omega''$, welches $\Omega'$ zu $\Omega$ ergänzt, ein Stück des Extremalenbogens $0'1'$, etwa das Stück $0'2$, enthält, so wird das Gebiet $U^{**}$, das $U^*$ zu $U$ ergänzt, das räumliche Bild des Bogens $0'2$ enthalten.

Nun beachten wir die Voraussetzung $f$). Auf Grund derselben läßt sich das Gebiet $\Omega$ gewiß so wählen, daß in allen seinen Punkten für beliebige $\bar{x}'$ die Ungleichung gilt:

$$G(x, y, \bar{x}', \bar{y}') > g,$$

wo $g$ eine positive Konstante bedeutet. Auf dem Extremalenbogen $0'1'$ ist also fortwährend $\frac{dz}{dt} > g$. Und da die $z$-Koordinate des Punktes 0 Null ist, so sind die $z$-Koordinaten der Punkte des Bogens $0'2$ durchwegs kleiner als eine negative Größe $\zeta$.

Anderseits hat die Entfernung eines beliebigen Punktes des Gebietes $\Omega''$ vom Punkte 0 eine von Null verschiedene untere Grenze $\rho$. Liegt also der Punkt 3 einer Vergleichskurve in $\Omega''$, so hat der Bogen 03 dieser Kurve mindestens die Länge $\rho$, und bei der räumlichen Abbildung dieser Kurve erhält der Punkt 3 eine $z$-Koordinate, die nicht kleiner sein kann als die positive Größe $\rho g$. Daraus folgt, daß, wenn man den Bogen $0'2$ der Extremale von einer Kugel von genügend kleinem Radius durchlaufen läßt, und das von dieser Kugel überstrichene Gebiet, soweit es nach $U^{**}$ fällt, noch zu $U^*$ hinzufügt — und ähnlich, wenn nötig, in der Umgebung des Punktes 1 verfährt — das so erhaltene Gebiet $U'$ nun tatsächlich die Eigenschaft hat, daß das räumliche Bild einer nicht ganz in $\Omega'$ verlaufenden zulässigen Vergleichskurve auch nicht ganz in $U'$ verlaufen kann. Denn in der Tat, daß das Gebiet $U^*$ diese Eigenschaft hatte, ist offenbar, da aber, wie gezeigt, in die zu $U^*$ hinzugefügten Gebiete überhaupt kein Punkt einer räumlich gedeuteten Vergleichskurve fallen kann, so hat auch das Gebiet $U'$ diese Eigenschaft. Das Gebiet $U''$, das $U'$ zu $U$ ergänzt, enthält nun aber sicher keinen Punkt des Extremalenbogens $0'1'$.

Wir können also den Osgoodschen Satz hier in der folgenden Form aussprechen:

Es sei 01 ein den Forderungen $a$) bis $f$) genügender Bogen einer Extremale unseres isoperimetrischen Problems; dann läßt sich eine Nachbarschaft $\Omega$ dieses Extremalenbogens angeben von der folgenden Eigenschaft: Zu jeder ganz im Innern von $\Omega$ gelegenen Nachbarschaft $\Omega'$ unseres Extremalenbogens gehört eine positive Konstante $\varepsilon$ derart, daß jede ganz in $\Omega$, aber nicht ganz in $\Omega'$ gelegene zulässige Vergleichskurve dem Integral (3) einen um mindestens $\varepsilon$ größeren Wert erteilt als unser Extremalenbogen.

Digitized by Google

Es sei eigens darauf hingewiesen, daß wir hier — im Gegensatz zu der einfacheren, im ersten Paragraphen behandelten Aufgabe — nicht genötigt waren, dem Gebiete $\Omega'$ irgend eine Beschränkung aufzuerlegen.

## § 3.

Wir behandeln noch — als Repräsentanten einer sehr allgemeinen Gruppe von Variationsproblemen — die folgende Aufgabe, für die wir nun den Osgoodschen Satz beweisen wollen:

Es sind zwei Punkte 0 und 1 des Raumes durch eine der Differentialgleichung:

$$\varphi(x, y, z, x', y', z') = 0 \tag{12}$$

genügende Kurve zu verbinden, die dem Integral:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x, y, z, x', y', z')\, dt \tag{13}$$

einen kleineren Wert erteilt, als jede andere, genügend benachbarte, von 0 nach 1 laufende und der Differentialgleichung (12) genügende Kurve.

Setzt man:

$$F(x, y, z, x', y', z') + \lambda\varphi(x, y, z, x', y', z') = H(x, y, z, x', y', z'), \tag{14}$$

so muß bekanntlich $x, y, z, \lambda$ neben der Gleichung (12) noch den folgenden Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y'} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z'} = 0. \tag{15}$$

Eine Kurve, die so beschaffen ist, daß sie zusammen mit einer geeigneten Funktion $\lambda$ die Gleichungen (12) und (15) befriedigt, nennen wir eine Extremale unseres Problems.

Es sei ein die beiden Punkte 0 und 1 verbindender Bogen einer solchen Extremale gegeben. Wir machen über ihn die folgenden Voraussetzungen:

*a*) Es mögen auf ihm nirgends $x', y', z'$ gleichzeitig verschwinden.

*b*) Es sei auf ihm durchwegs die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x'^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x' \partial y'} & \frac{\partial^2 H}{\partial x' \partial z'} & \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y' \partial x'} & \frac{\partial^2 H}{\partial y'^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial y' \partial z'} & \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial z' \partial x'} & \frac{\partial^2 H}{\partial z' \partial y'} & \frac{\partial^2 H}{\partial z'^2} & \frac{\partial \varphi}{\partial z'} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x'} & \frac{\partial \varphi}{\partial y'} & \frac{\partial \varphi}{\partial z'} & 0 \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

von Null verschieden. Alle seine Elemente sind dann reguläre Elemente des Differentialgleichungssystems (12) und (15).

*c*) Es sei auf ihm die Weierstraßsche $E$-Funktion:

$$E(x, y, z; x', y', z'; \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}') =$$

$$= \bar{x}' \left( \frac{\partial H}{\partial \bar{x}'}(x, y, z, \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}') - \frac{\partial H}{\partial x'}(x, y, z, x', y', z') \right) +$$

$$+ \bar{y}' \left( \frac{\partial H}{\partial \bar{y}'}(x, y, z, \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}') - \frac{\partial H}{\partial y'}(x, y, z, x', y', z') \right) +$$

$$+ \bar{z}' \left( \frac{\partial H}{\partial \bar{z}'}(x, y, z, \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}') - \frac{\partial H}{\partial z'}(x, y, z, x', y', z') \right)$$

für alle der Gleichung (12) genügenden Werte von $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ positiv und von Null verschieden, ausgenommen das System $\bar{x}' = x'$, $\bar{y}' = y'$, $\bar{z}' = z'$, für welches sie verschwindet.

*d*) Die Gleichungen:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = 0; \quad \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{d}{dt} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0; \quad \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{d}{dt} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0,$$

wo unter den Funktionszeichen die Koordinaten unserer Extremale einzusetzen sind, mögen keine von Null verschiedenen Lösungen $\mu$ besitzen. [1])

*e*) Der Extremalenbogen 0 1 enthalte den zu 0 konjugierten Punkt nicht.

Zu dieser letzteren Bedingung sei folgendes bemerkt. Durch den Punkt Null geht eine zweiparametrige Schar von Extremalen:

$$x = x(t, a, b), \quad y = y(t, a, b), \quad z = z(t, a, b), \tag{16}$$

die für $a = a_0$, $b = b_0$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$ unseren Extremalenbogen 0 1 liefere. Wegen der Voraussetzung *d*) lassen sich die Integrationskonstanten $a, b$ so wählen, daß für $a = a_0$, $b = b_0$ die Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, a, b)} \tag{17}$$

nicht identisch verschwindet. [2]) Voraussetzung *e*) sagt aus, daß diese Determinante für $t_0 < t \leqq t_1$ überhaupt keine Nullstelle besitzt.

---

[1]) Vgl. wegen dieser Voraussetzung: G. v. Escherich, Wien. Ber. 110 (1901), p. 1417; H. Hahn, Math. Ann. 58 (1904), p. 148.

[2]) G. v. Escherich, l. c., p. 1405. Man erkennt nämlich leicht, daß unsere Determinante (17) bei geeigneter Wahl von $a, b$ nichts anderes ist als die „Determinante eines der Stelle 0 konjugierten Systems". Das Vorhandensein „anormaler Lösungen" ist bei uns durch Bedingung *d*) ausgeschlossen.

Digitized by Google

Wir verlängern nun den Extremalenbogen 0 1 über 0 und 1 hinaus, bis zu den Punkten 0′ und 1′. Offenbar sind dann, wenn 0′ und 0 sowie 1′ und 1 hinlänglich benachbart sind, auch auf dem Bogen 0′ 1′ die Voraussetzungen *a)* bis *d)* erfüllt. Sei ferner:

$$(16\,a) \qquad x = X(t, a', b'), \quad y = Y(t, a', b'), \quad z = Z(t, a', b')$$

die durch den Punkt 0′ hindurchgehende zweiparametrige Extremalenschar, die für $a' = a'_0$, $b' = b'_0$, $t'_0 \leqq t \leqq t'_1$ den Extremalenbogen 0′ 1′ liefere. Aus der stetigen Abhängigkeit der Lösungen eines Differentialgleichungssystems von ihren Integrationskonstanten folgt leicht, daß die Determinante:

$$(17\,a) \qquad \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(t, a', b')}$$

für $a' = a'_0$, $b' = b'_0$, $t'_0 < t \leqq t'_1$ von Null verschieden ausfällt, solange 0′ genügend nahe bei 0 bleibt, d. h. der Bogen 0′ 1′ enthält den zu 0′ konjugierten Punkt nicht.

Bezeichne nun:

$$(16\,b) \qquad x = x^*(t, \alpha, \beta), \quad y = y^*(t, \alpha, \beta), \quad z = z^*(t, \alpha, \beta)$$

die durch den Punkt 1′ hindurchgehende zweiparametrige Extremalenschar und man erhalte aus ihr den Bogen 0′ 1′ für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $t'_0 \leqq t \leqq t'_1$. Dann ist die Determinante:

$$(17\,b) \qquad \frac{\partial(x^*, y^*, z^*)}{\partial(t, \alpha, \beta)}$$

für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $t'_0 \leqq t < t'_1$ von Null verschieden.[1]) Hieraus ergibt sich leicht:

Der Bogen 0 1 unserer Extremale läßt sich mit einer Nachbarschaft umgeben, deren jeder Punkt sowohl mit 0′ als mit 1′ durch je eine Extremale der Scharen (16 *a*) beziehungsweise (16 *b*) verbunden werden kann. Verlangt man weiter, daß für diese Extremalen $|a' - a'_0|$, $|b' - b'_0|$ beziehungsweise $|\alpha - \alpha_0|$, $|\beta - \beta_0|$ unter einer gewissen Grenze verbleiben sollen, so gibt es nur je eine solche Extremale.

Sei 2 ein beliebiger Punkt dieser Nachbarschaft. Man erkennt dann leicht, daß die Extremale 0′ 2 dem Integral (13) einen kleineren Wert erteilt als jede andere der Differentialgleichung (12) genügende Kurve, die von 0′ bis 0 mit der Extremale 0′ 1′ zusammenfällt, von 0 bis 2 aber ganz innerhalb unserer Nachbarschaft verbleibt. Die analoge Aussage gilt von der Extremale 2 1′.

[1]) G. v. Escherich, l. c

Digitized by Google

Hieraus ergibt sich dann weiter, wie in § 1, der Osgoodsche Satz in der folgenden Form:

Es läßt sich eine Nachbarschaft $U$ unseres Extremalenbogens 01 angeben von der nachstehenden Eigenschaft: $U'$ sei eine ganz in $U$ gelegene Nachbarschaft desselben Bogens, die nur der Einschränkung unterliegt,[1]) daß das Gebiet $U''$, das $U'$ zu $U$ ergänzt, mit der Verlängerung unseres Extremalenbogens keinen Punkt gemein haben darf. Es gehört zu $U'$ eine positive Konstante $\varepsilon$ derart, daß jede von 0 nach 1 laufende, der Differentialgleichung (12) genügende Kurve, die ganz in $U$, aber nicht ganz in $U'$ liegt, dem Integral (13) einen um mindestens $\varepsilon$ größeren Wert erteilt als die Extremale 01.

Genau dieselbe Methode gestattet es, denselben Satz zu beweisen für Integrale von der Form:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(y_0, y_1, \ldots, y_n; y_0', y_1', \ldots, y_n')\, dt,$$

wenn zwischen den $y$ noch $m$ Differentialgleichungen und $m'$ endliche Gleichungen ($m + m' < n$) vorgeschrieben sind.

---

[1]) Bei Verzichtleistung auf die Darstellung durch einen Parameter $t$ und Bevorzugung der Variablen $x$, kommt auch hier diese Einschränkung nicht zur Geltung, so daß dann der Osgoodsche Satz ganz allgemein bewiesen ist.

Digitized by Google

# Zur Berechnung der Torsion einer Raumkurve in rationaler Form.

Von **Karl Carda** in Wien.

Bekanntlich läßt sich der Ausdruck für die Torsion einer Raumkurve rational durch die Differentialquotienten der rechtwinkligen Koordinaten $x$, $y$, $z$ nach dem Parameter darstellen. Im folgenden soll eine kurze Herleitung dieser Formel mitgeteilt werden.

Es seien

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u), \\ y &= \psi(u), \\ z &= \chi(u) \end{aligned} \tag{1}$$

als Gleichungen einer Raumkurve vorgelegt. Wir werfen zunächst die Frage nach der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür auf, daß die Kurve **eben** ist. Wenn die Kurve eben ist, so genügen die Funktionen $x$, $y$, $z$ einer linearen Gleichung mit lauter konstanten Koeffizienten

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z + C_4 = 0.$$

Hieraus folgt, daß dann der Ausdruck

$$A = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \tag{2}$$

für jedes $u$ verschwindet. Wenn umgekehrt der Ausdruck $A$ identisch verschwindet, so kann die Gleichung $A = 0$ als lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung für die Funktion $z$ aufgefaßt werden, welche die (linear unabhängigen) Lösungen $x$, $y$, 1 besitzt, also besteht jedenfalls eine Relation von der Form

$$z = c_1 x + c_2 y + c_3,$$

die Kurve ist also **eben**.

Es ist begrifflich klar, daß die Gleichung $A = 0$ bei allen $\infty^6$ Bewegungen des Raumes $R$ der $x$, $y$, $z$ invariant bleibt. Es ist nun interessant, daß nicht bloß die **Gleichung** $A = 0$, sondern auch der **Ausdruck** $A$ selbst bei allen Bewegungen invariant bleibt.

Der Beweis ist einfach. Da $A$ bei allen $\infty^3$ Translationen des Raumes $R$ invariant bleibt, so genügt es zu zeigen, das $A$ bei

Digitized by Google

allen Rotationen um den Koordinatenanfangspunkt invariant bleibt. Wir deuten die Differentialquotienten $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $z^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes $P_i$ in einem Raume $(R)$. Da bei jeder Rotation um den Anfangspunkt des Raumes $R$ die Differentialquotienten der Koordinaten ebenso transformiert werden wie die Koordinaten $x$, $y$, $z$ selbst, so entspricht jeder der erwähnten Rotationen im Raume $R$ eine kongruente Rotation im Raume $(R)$. Es kommt also darauf an zu zeigen, daß $A$ bei allen Rotationen um den Koordinatenanfangspunkt im Raume $(R)$ invariant bleibt. Dies ist aber der Fall, da $A$ das sechsfache Volumen des Tetraeders $(O)\, P_1\, P_2\, P_3$ darstellt.

Ebenso sind die Ausdrücke

$$B \equiv \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2, \tag{3}$$

$$C \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 \tag{4}$$

offenbar bei allen Bewegungen des Raumes $R$ invariant, denn $B$ stellt im Raume $(R)$ das vierfache Quadrat des Flächeninhalts des Dreiecks $(O)\, P_1\, P_2$ dar, während $C$ das Quadrat der Strecke $(O)\, P_1$ gibt.

Wir wollen nun in die Gleichungen (1) vermöge einer willkürlichen Gleichung

$$v = \lambda(u)$$

an Stelle von $u$ einen neuen Parameter einführen. Eine einfache Rechnung liefert die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} A(u) &= \lambda'^6(u)\, A(v), \\ B(u) &= \lambda'^6(u)\, B(v), \\ C(u) &= \lambda'^2(u)\, C(v). \end{aligned} \tag{5}$$

Wir können nun Ausdrücke angeben, welche sowohl von der Lage des Koordinatensystems als auch von der Wahl des Parameters unabhängig sind. Solche Ausdrücke sind

$$\frac{A}{B}, \quad \frac{B}{C^3}.$$

Es erwächst nun die Aufgabe, die geometrische Bedeutung dieser Ausdrücke zu ermitteln. Zu diesem Zwecke führen wir zunächst die von einem Kurvenpunkte allgemeiner Lage $M_0$ gezählte Bogenlänge als Parameter ein. Ferner können wir durch eine passende Bewegung erreichen, daß der Punkt $M_0$ nach dem Koordinatenanfangspunkt gelangt und zugleich die Gleichung der rektifizierenden Ebene in $M_0$

$$y = 0,$$

Digitized by Google

die Gleichung der Schmiegungsebene in $M_0$

$$z = 0$$

wird. Dann lauten die Entwicklungen von $x$, $y$, $z$ nach steigenden Potenzen der Bogenlänge bekanntlich

$$(6) \qquad \begin{aligned} x &= s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots, \\ y &= \frac{1}{2\rho} s^2 + b_3 s^3 + \dots, \\ z &= -\frac{1}{6\rho T} s^3 + \dots. \end{aligned}$$

Hierin bezeichnet $\rho$ den Krümmungsradius, $T$ den Torsionsradius in $M_0$. Wir stellen die Werte der Differentialquotienten von $x$, $y$, $z$ für $s = 0$ in der folgenden Tabelle zusammen

$$x' = 1,\ y' = 0,\ z' = 0,$$

$$y'' = \frac{1}{\rho},\ z'' = 0,$$

$$z''' = -\frac{1}{\rho T}.$$

Nun ergibt sich

$$\frac{A}{B} = -\frac{1}{T},$$

$$\frac{B}{C^3} = \frac{1}{\rho^2}.$$

Demnach finden wir die bekannten Formeln

$$(7) \qquad \frac{1}{T} = -\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2},$$

$$(8) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}.$$

Digitized by Google

# Bedeutende Preisermäßigung!

Im Besitze der gesamten Vorräte, bieten wir folgende in Fachkreisen bestens bekannte und berühmte Zeitschrift zu sehr ermäßigten Preisen an:

# Archiv der Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von **A. Grunert,** fortgesetzt von **R. Hoppe.**

I. Reihe: Band 1–2, 9—19, 21—25, 27—48 und 51–70 (1841—1883).
II. Reihe: Band 1—17 (1884—1899).
Registerhefte: I zu Band 1—25; II zu Band 26–40; III zu Band 41—54 IV zu Band 55—70.
(Die Bände 3—8, 20, 26 und 49—50 sind vergriffen und nicht mehr zu haben)

Wir offerieren bis auf Wiederruf, da spätere Preiserhöhung vorbehalten sobald ein bestimmter Vorrat verkauft ist:

**1 Exemplar aller vorrätigen 77 Bände mit den 4 Registerheften** statt des Ladenpreises von **950 Kronen** für **250 Kronen.**

Einzelne Bände der I. Reihe für **4 Kronen.**
Einzelne Bände der II. Reihe für **6 Kronen.**

Die bedeutendsten Mathematiker und Physiker unserer Zeit zählen zu den Mitarbeitern dieses seit 65 Jahren erscheinenden Archivs, das hauptsächlich den Bedürfnissen der Mittelschulprofessoren entgegenkommt.

Wir empfehlen deshalb ganz speziell den Gymnasial- und Realschulbibliotheken die Gelegenheit zu benützen, etwa fehlende Bände zu ergänzen oder wo das Archiv in der betreffenden Bibliothek noch fehlt, alle 77 Bände anzuschaffen.

Bestellungen beliebe man an uns selbst oder an jede beliebige Buchhandlung zu richten.

**J. Eisenstein & Co.**
Buchhandlung u. Antiquariat,
**Wien, IX/3, Währingerstr. 2.**


Digitized by Google

# Inhaltsverzeichnis.


Seite

*Grünwald, Josef*, Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie 81

*Berger, Alfred*, Über die zur dritten Stufe gehörigen hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde . . . . . 137


## Literaturberichte.


*Marcolongo, R.*, Meccanica razionale . . . . . 17

*Börnstein, R.* und *Marckwald, W.*, Aus Natur und Geisteswelt . . . . . 17

*Walther, K.* und *Röttinger, M.*, Sammlung Göschen. Nr. 242 . . . . . 17

*Mahler, G., Prof.*, Sammlung Göschen. Nr. 243 . . . . . 18

*Tannery, Jules*, Introduction a la theorie des fonctions d'une variable . . 18

*Beltrami, Eugenio*, Opere Matematiche . . . . . 19

*Schüßler, Rudolf*, Orthogonale Axonometrie . . . . . 19

*Hermite* et *Stieltjes*, Correspondance . . . . . 21

*Brioschi, Francesco*, Opere Matematiche . . . . . 21

*Cesàro, E.*, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung mit zahlreichen Übungsbeispielen . . . . . 23

*Whittaker, E. T.*, A treatise on the analytical Dynamics of particles and rigid bodies; with an introduction to the problem of three bodies . . . 23

*Brillouin, Marcell*, Propagation de l'Electricité . . . . . 24

*Rooseboom, H. W. Bakhuis*, Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre . . . . . 25

*Schmehl, Ehr., Prof. Dr.*, Die Elemente der sphärischen Astronomie und der mathematischen Geographie . . . . . 26

*Doll, M., Dr.* und *Nestle, S.*, Lehrbuch der praktischen Geometrie . . . . 26

*Krüger, L.*, Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen . . . . . 27

*Bolza, O.*, Lectures on the calculus of variations . . . . . 28

*Gleichen, Alexander, Dr.*, Vorlesungen über photographische Optik . . . . 29

*Dressel, Ludwig, S. J.*, Elementares Lehrbuch der Physik, nach den neuesten Anschauungen für höhere Schulen und zum Selbstunterricht . . . . . 29

Die natürliche Entwicklung der Materie im Weltraum und die daraus hervorgehenden Weltgesetze . . . . . 30

*Hochschule, Technische, zu Aachen*, Festschrift Adolf Wüllner . . . . . 30

*Kohlrausch, Friedrich*, Lehrbuch der praktischen Physik . . . . . 30

*Grimsehl, E.*, Sammlung Schubert XXXVIII. Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung . . . . . 31

*Kayser, H.*, Handbuch der Spektroskopie . . . . . 31

*Jäger, G., Dr.*, Theoretische Physik . . . . . 31

*Appell, P.* et *Chappuis, J.*, Leçons de mécanique élémentaire . . . . . 32

*Bucherer, A. H., Dr.*, Elemente der Vektoranalysis . . . . . 32


Digitized by Google

# Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie.

Von **Josef Grünwald** in Wien.

Vorliegende Arbeit behandelt ein Thema, dessen wesentliche Gesichtspunkte vom Verfasser auf dem Naturforschertage in Meran [1]) in einem Vortrage: „Über gewisse geometrische Anwendungen der dualen Zahlen" dargelegt worden sind. Der grundlegende Gedanke, auf welchem die folgenden Entwicklungen beruhen, besteht in einer Abbildung der von Herrn E. Study so genannten dualen Zahlen auf die Mannigfaltigkeit der Punkte eines Kegels zweiter Ordnung in einem projektiven, dreidimensionalen Raume. Nach dem Prinzip der Reziprozität gelangt man von dieser Abbildung zu einer analogen Abbildung der dualen Zahlen auf die Mannigfaltigkeit der Tangentialebenen eines Kegelschnittes im projektiven dreidimensionalen Raume. Insbesondere kann man dann für den genannten Kegelschnitt den absoluten unendlich fernen Kreis der Euklidischen Geometrie substituieren; und man erhält auf diese Weise eine Abbildung der dualen Zahlen auf die Mannigfaltigkeit der sogenannten „Minimalebenen" des Euklidischen Raumes.

Insofern nun die genannten Minimalebenen ein- und eindeutig durch ihre mit einem bestimmten Durchlaufungssinn gedachten reellen Trägergeraden dargestellt werden können, ergibt sich eine Abbildung der dualen Zahlen auf die Mannigfaltigkeit der reellen „orientierten" Geraden, oder — nach einer von Herrn E. Study eingeführten Bezeichnung — auf die Mannigfaltigkeit der „Speere" des Euklidischen Raumes.

Das im voranstehenden kurz angedeutete Abbildungsprinzip [2]) führt nun, wie sich zeigen läßt, in direkter und ungezwungener Weise zu den verschiedenen geometrischen Anwendungen, die von

[1]) Am 27. Sept. 1905.

[2]) Behandelt auf dem Naturforschertage, vgl. die vorige Anm. Bei der auf den dort gehaltenen Vortrag folgenden Diskussion ist von geschätzter Seite die Bemerkung gemacht worden, daß dieses Abbildungsprinzip bereits von Herrn E. v. Weber in den Berichten der bayr. Akademie, bezw. sächs. Gesellschaft sowie in diesen Monatsheften angegeben und verwertet worden sei. Dies beruht auf einem Irrtum, indem in den gemeinten Arbeiten (Münchener Sitzungsber. 1904, S. 447—483, Leipziger Ber. 1903, S. 384—408, Wiener Monatshefte 1905, S. 217—229) von dualen Zahlen überhaupt nicht die Rede ist.



Digitized by Google

TESCHEN.
K. U. K. HOFBUCHDRUCKEREI KARL PROCHASKA.

Digitized by Google

*XVII. Jahrgang 1906.* *2. Vierteljahr.*

Bibliothek 10 1906

# MONATSHEFTE

FÜR

# MATHEMATIK UND PHYSIK.

---

MIT UNTERSTÜTZUNG DES

HOHEN K. K. MINISTERIUMS FÜR KULTUS UND UNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN VON

G. v. ESCHERICH, F. MERTENS und W. WIRTINGER

IN WIEN.

**WIEN, 1906.**

VERLAG DES MATH. SEMINARS DER UNIVERSITÄT WIEN.

IM BUCHHANDEL DURCH J. EISENSTEIN & CO. IN WIEN.

*Bezugspreis: Jährlich 14 K.*

Digitized by Google

# Inhaltsverzeichnis.

Seite

*Grünwald, Josef*, Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie 81

*Berger, Alfred*, Über die zur dritten Stufe gehörigen hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde . . . . . 137

## Literaturberichte.

*Marcolongo, R.*, Meccanica razionale . . . . . 17

*Börnstein, R.* und *Marckwald, W.*, Aus Natur und Geisteswelt . . . . . 17

*Walther, K.* und *Röttinger, M.*, Sammlung Göschen. Nr. 242 . . . . . 17

*Mahler, G., Prof.*, Sammlung Göschen. Nr. 243 . . . . . 18

*Tannery, Jules*, Introduction a la theorie des fonctions d'une variable . . 18

*Beltrami, Eugenio*, Opere Matematiche . . . . . 19

*Schüßler, Rudolf*, Orthogonale Axonometrie . . . . . 19

*Hermite* et *Stieltjes*, Correspondance . . . . . 21

*Brioschi, Francesco*, Opere Matematiche . . . . . 21

*Cesàro, E.*, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung mit zahlreichen Übungsbeispielen . . . . . 23

*Whittaker, E. T.*, A treatise on the analytical Dynamics of particles and rigid bodies; with an introduction to the problem of three bodies . . . 23

*Brillouin, Marcell*, Propagation de l'Electricité . . . . . 24

*Rooseboom, H. W. Bakhuis*, Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre . . . . . 25

*Schmehl, Ehr., Prof. Dr.*, Die Elemente der sphärischen Astronomie und der mathematischen Geographie . . . . . 26

*Doll, M., Dr.* und *Nestle, S.*, Lehrbuch der praktischen Geometrie . . . . 26

*Krüger, L.*, Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen . . . . . 27

*Bolza, O.*, Lectures on the calculus of variations . . . . . 28

*Gleichen, Alexander, Dr.*, Vorlesungen über photographische Optik . . . . 29

*Dressel, Ludwig, S. J.*, Elementares Lehrbuch der Physik, nach den neuesten Anschauungen für höhere Schulen und zum Selbstunterricht . . . . . 29

Die natürliche Entwicklung der Materie im Weltraum und die daraus hervorgehenden Weltgesetze . . . . . 30

*Hochschule, Technische, zu Aachen*, Festschrift Adolf Wüllner . . . . . 30

*Kohlrausch, Friedrich*, Lehrbuch der praktischen Physik . . . . . 30

*Grimsehl, E.*, Sammlung Schubert XXXVIII. Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung . . . . . 31

*Kayser, H.*, Handbuch der Spektroskopie . . . . . 31

*Jäger, G., Dr.*, Theoretische Physik . . . . . 31

*Appell, P.* et *Chappuis, J.*, Leçons de mécanique élémentaire . . . . . 32

*Bucherer, A. H., Dr.*, Elemente der Vektoranalysis . . . . . 32

Digitized by Google

# Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie.

Von **Josef Grünwald** in Wien.

Vorliegende Arbeit behandelt ein Thema, dessen wesentliche Gesichtspunkte vom Verfasser auf dem Naturforschertage in Meran [1]) in einem Vortrage: „Über gewisse geometrische Anwendungen der dualen Zahlen" dargelegt worden sind. Der grundlegende Gedanke, auf welchem die folgenden Entwicklungen beruhen, besteht in einer Abbildung der von Herrn E. Study so genannten dualen Zahlen auf die Mannigfaltigkeit der Punkte eines Kegels zweiter Ordnung in einem projektiven, dreidimensionalen Raume. Nach dem Prinzip der Reziprozität gelangt man von dieser Abbildung zu einer analogen Abbildung der dualen Zahlen auf die Mannigfaltigkeit der Tangentialebenen eines Kegelschnittes im projektiven dreidimensionalen Raume. Insbesondere kann man dann für den genannten Kegelschnitt den absoluten unendlich fernen Kreis der Euklidischen Geometrie substituieren; und man erhält auf diese Weise eine Abbildung der dualen Zahlen auf die Mannigfaltigkeit der sogenannten „Minimalebenen" des Euklidischen Raumes.

Insofern nun die genannten Minimalebenen ein- und eindeutig durch ihre mit einem bestimmten Durchlaufungssinn gedachten reellen Trägergeraden dargestellt werden können, ergibt sich eine Abbildung der dualen Zahlen auf die Mannigfaltigkeit der reellen „orientierten" Geraden, oder — nach einer von Herrn E. Study eingeführten Bezeichnung — auf die Mannigfaltigkeit der „**Speere**" des Euklidischen Raumes.

Das im voranstehenden kurz angedeutete Abbildungsprinzip [2]) führt nun, wie sich zeigen läßt, in direkter und ungezwungener Weise zu den verschiedenen geometrischen Anwendungen, die von

[1]) Am 27. Sept. 1905.

[2]) Behandelt auf dem Naturforschertage, vgl. die vorige Anm. Bei der auf den dort gehaltenen Vortrag folgenden Diskussion ist von geschätzter Seite die Bemerkung gemacht worden, daß dieses Abbildungsprinzip bereits von Herrn E. v. Weber in den Berichten der bayr. Akademie, bezw. sächs. Gesellschaft sowie in diesen Monatsheften angegeben und verwertet worden sei. Dies beruht auf einem Irrtum, indem in den gemeinten Arbeiten (Münchener Sitzungsber. 1904, S. 447—483, Leipziger Ber. 1903, S. 384—408, Wiener Monatshefte 1905, S. 217—229) von dualen Zahlen überhaupt nicht die Rede ist.



Digitized by Google

den dualen Zahlen bisher gemacht worden sind: nämlich einerseits zu den Anwendungen, die von Herrn E. Study in seinem grundlegenden, an neuen und fruchtbaren Ideen so überaus reichen Werke: „Geometrie der Dynamen" entwickelt worden sind, anderseits auch zu jenen Anwendungen, welche Herr G. Scheffers auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Heidelberg 1904 gegeben hat. Die dualen Zahlen erweisen sich als ein überaus brauchbares Instrument für die Geometrie der Speere, indem sie eine einfache Darstellung gewisser endlicher und unendlicher (kontinuierlicher) Transformationsgruppen in der Mannigfaltigkeit der Speere des Euklidischen Raumes gestatten; von besonderem Interesse erscheint der Zusammenhang der diesbezüglichen Untersuchungen mit der Theorie der isotropen Kongruenzen von Ribaucour und der Theorie der Minimalflächen.

Den Abschluß der vorliegenden Arbeit bilden Betrachtungen, welche sich auf die Geometrie der reellen und imaginären orientierten Geraden des Euklidischen Raumes beziehen.

## I. Abbildung der dualen Zahlen auf dem Zahlenkegel.

### § 1.

Der Begriff der dualen Zahlen von der Form $u + v\varepsilon$, wobei $\varepsilon^2 = 0$, möge in folgendem als bekannt vorausgesetzt werden. Es sei diesbezüglich verwiesen auf die „Geometrie der Dynamen" von Herrn E. Study, § 23. Bei einer solchen Zahl bedeuten die Größen $u$ und $v$ gewöhnliche komplexe Größen; $u$ wird als der skalare, $v\varepsilon$ als der vektorielle Bestandteil der dualen Zahl $u + v\varepsilon$ bezeichnet. Die Addition, Subtraktion und Multiplikation dualer Zahlen erfolgt nach den aus der gewöhnlichen Arithmetik bekannten Rechnungsregeln, insbesondere gilt für die Multiplikation das kommutative und assoziative Gesetz. Hingegen gilt der Satz der gewöhnlichen Arithmetik: daß ein Produkt nur dann gleich Null sein kann, wenn einer der Faktoren verschwindet, für duale Zahlen nicht mehr. Vielmehr ist ein Produkt dualer Zahlen auch dann gleich Null, wenn mindestens bei zweien der Faktoren der skalare Bestandteil verschwindet.

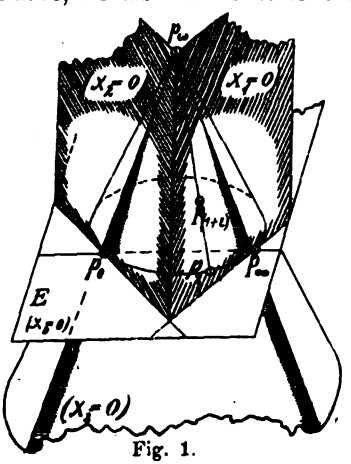


Fig. 1.

Für die Veranschaulichung der dualen Zahlen und der mit ihnen vorzunehmenden Rechnungsoperationen ist es nun von ganz besonderem Nutzen, wenn man die Mannigfaltigkeit der dualen Zahlen in nachstehender Weise auf die Punkte eines Kegels zweiter Ord-

Digitized by Google

nung im dreidimensionalen projektivenRaume abbildet: Man schneide einen solchen, im übrigen beliebigen Kegel mit einer Ebene $E$, welche nicht durch seinen Scheitel geht, und nehme auf dem so entstehenden ebenen Schnitte beliebig drei von einander verschiedene Punkte an, welche mit $p_0$, $p_1$ und $p_\infty$ bezeichnet werden sollen. Der Scheitel des Kegels werde mit $p_\omega$ bezeichnet. Auf der durch den Punkt $p_1$ gehenden Kegelerzeugenden nehme man beliebig, aber verschieden von $p_1$ und $p_\omega$, einen Punkt $p_{(1+\varepsilon)}$ an. Die vier Punkte $p_0$, $p_1$, $p_\infty$ und $p_{(1+\varepsilon)}$ sollen „Fundamentalpunkte" heißen. Nun wähle man ein projektives Koordinatensystem in nachstehender Art: Die Ebene $E$ sei identisch mit der Grundebene $x_0 = 0$ des Koordinatensystems; die durch die Punkte $p_0, p_\infty, p_\omega$ bestimmte Ebene sei identisch mit der Grundebene: $x_3 = 0$ des Koordinatensystems; die Grundebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ endlich seien definiert durch die Tangentialebenen des Kegels längs der Erzeugenden $[p_\infty\, p_\omega]$ und $[p_0\, p_\omega]$. Der Punkt $p_{(1+\varepsilon)}$ soll die Koordinaten haben: $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Durch die obigen Festsetzungen ist das Koordinatensystem offenbar völlig bestimmt. Die Koordinaten der Fundamentalpunkte und des Scheitelpunktes $p_\omega$ können durch das folgende Schema dargestellt werden:

(1)

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_0$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $p_1$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $p_\infty$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $p_{(1+\varepsilon)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $p_\omega$ | 1 | 0 | 0 | 0 |

Die Gleichung des Kegels lautet:

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0. \tag{2}$$

Das hier definierte Koordinatensystem, welches durch die Fundamentalpunkte $p_0, p_1, p_\infty, p_{(1+\varepsilon)}$ in der oben auseinandergesetzten Weise eindeutig bestimmt ist, möge als das zu dem genannten System von Fundamentalpunkten gehörige Koordinatensystem bezeichnet werden.

Um nun die Mannigfaltigkeit der dualen Zahlen auf die Mannigfaltigkeit der (reellen und imaginären) Punkte des „Zahlenkegels": $x_1 x_2 - x_3^2 = 0$ abzubilden, ordne man jeder dualen Zahl $w = u + v\varepsilon$ jenen Punkt zu, dessen Koordinaten bestimmt sind durch die Proportion:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = v : 1 : u^2 : u. \tag{3}$$



Digitized by Google

Durch diese Proportion ist zwischen den dualen Zahlen $w$ und den entsprechenden Bildpunkten $(w)$ auf dem Zahlenkegel eine ein- und eindeutige Beziehung hergestellt. Irgend zwei Zahlen, deren skalare Bestandteile übereinstimmen, bilden sich als Punkte auf einer und derselben Kegelerzeugenden ab. Den Zahlen 0, 1 und $1+\varepsilon$ (von denen die beiden erstgenannten als duale Zahlen mit verschwindendem vektoriellen Bestandteil anzusehen sind) entsprechen, wie ein Blick auf das Schema (1) lehrt, gerade die mit $p_0, p_1, p_{(1+\varepsilon)}$ bezeichneten Fundamentalpunkte.

## § 2. Einführung der unendlich großen dualen Zahlen.

Die Bilder der endlichen dualen Zahlen $w = u + v\varepsilon$, d. i. solcher dualen Zahlen, bei welchen die Koeffizienten $u$ und $v$ endliche Größen sind, überdecken den Zahlenkegel $x_1 x_2 - x_3^2 = 0$ nicht ganz vollständig. Solange man nur solche Punkte des Zahlenkegels ins Auge faßt, für welche $x_1 \neq 0$ ist, bestimmen sich allerdings aus der Proportion (3) endliche Werte für die Größen $u$ und $v$ und somit auch für die jeweilig zugehörige duale Zahl $w = u + v\varepsilon$. Wesentlich anders verhalten sich aber jene Punkte des Kegels, für welche $x_1 = 0$ ist. Da für diese Punkte, gemäß der Gleichung (2): $x_1 x_2 - x_3^2 = 0$, auch $x_3 = 0$ ist, erfüllen diese Punkte eine Erzeugende $Q$ des Kegels; und zwar ist mit Rücksicht auf Schema (1) diese Erzeugende offenbar identisch mit der Geraden $[p_\infty p_\omega]$. Für die Punkte von $Q$ nun ist (wegen $x_1 = x_3 = 0$) sicher entweder $x_2$ oder $x_0$ von Null verschieden. Im ersteren Falle lehrt die unmittelbar aus (3) abzunehmende Formel $\frac{x_2}{x_1} = u^2$, daß zum mindesten die Größe $u$ nicht endlich sein kann; im letzteren Falle lehrt analog die Formel $\frac{x_0}{x_1} = v$, daß die Größe $v$ nicht endlich sein kann.

Nähert sich ein Punkt auf dem Kegel der Erzeugenden $Q$, so wird von den Koeffizienten $u, v$ der zugehörigen Zahl $u + v\varepsilon$ mindestens einer unendlich groß.

Die Tatsache, daß die Bilder der endlichen dualen Zahlen den Zahlenkegel nicht ganz überdecken, sondern die Erzeugende $Q$ frei lassen, hängt damit zusammen, daß die Mannigfaltigkeit der endlichen dualen Zahlen kein abgeschlossenes Kontinuum bildet. Man kann aber nun die genannte Mannigfaltigkeit dadurch zu einem abgeschlossenen Kontinuum ergänzen, daß man entsprechend den verschiedenen Punkten der Kegelerzeugenden $Q$ verschiedene „unendlich große“ duale Zahlen einführt. Diese Erweiterung des Zahlengebietes erscheint auch von einem anderen Gesichtspunkte als zweckmäßig, wenn man nämlich von der Rechnungsoperation der Division dualer Zahlen ausgeht: Ist $w = u + v\varepsilon$ eine duale Zahl, deren skalarer Bestandteil $u$ nicht

Digitized by Google

verschwindet, so gibt es eine und nur eine duale Zahl $w'$, welche der Gleichung $w w' = 1$ genügt;[1]) man kann $w'$ als reziproken Wert von $w$ ansehen und mit $\frac{1}{w}$ oder $w^{-1}$ bezeichnen. Es wird

$$w' = \frac{1}{w} = \frac{u - v\varepsilon}{u^2}. \tag{4}$$

Ist hingegen der skalare Bestandteil $u$ der Zahl $w$ gleich Null, so ist die Gleichung $w w' = 1$ nach $w'$ nicht lösbar, solange man sich auf endliche duale Zahlen beschränkt; aber auch in diesem Falle kann man diese Gleichung lösbar machen, indem man in der oben angedeuteten Art verschiedene unendlich große duale Zahlen einführt.

Es sei durch die Gleichung $\frac{x_2}{x_0} = -h$, wobei zunächst $h$ eine endliche, von Null verschiedene, gewöhnliche komplexe Zahl sein soll, ein Punkt $q_h$ auf der Erzeugenden $Q$ festgelegt. Wir ordnen nun diesem Punkte $q_h$ eine bestimmte „unendlich große" duale Zahl zu, welche, wie sogleich näher begründet werden soll, mit

$$hJ$$

bezeichnet werden möge. Wenn sich nun eine veränderliche duale Zahl $w' = u' + v'\varepsilon$ derart ändert, daß ihr Bildpunkt $(w')$ sich dem Punkte $q_h$ unbegrenzt nähert, so soll die zu $q_h$ gehörige Zahl $hJ$ als Grenzwert von $w'$ bezeichnet werden, also gesetzt werden

$$\lim w' = hJ.$$

In diesem Falle nähert sich das Verhältnis $\frac{x_2}{x_0}$ und somit nach Proportion (3) auch das Verhältnis $\frac{u'^2}{v'}$ dem Grenzwerte $-h$, wobei die Größen $u'$ und $v'$ beide unendlich werden. Für den reziproken Wert $\frac{1}{w'} = w$ ergibt sich hiebei folgender Grenzwert:

$$\lim \frac{1}{w'} = \lim \frac{1}{u' + v'\varepsilon} = \lim \frac{u' - v'\varepsilon}{u'^2} = -\varepsilon \lim \frac{v'}{u'^2} = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon.$$

Es bestehen also gleichzeitig die Formeln

$$\begin{cases} \lim w' = hJ & \text{und} \\ \lim w = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon, \end{cases}$$

[1]) Vgl. E. Study, „Geometrie der Dynamen", S. 197.

Digitized by Google

wenn $w$ und $w'$ miteinander durch die Relation $ww' = 1$ verbunden sind, man kann daher durch Definition festsetzen, daß die dualen Zahlen

$$hJ \text{ und } \frac{1}{h} \cdot \varepsilon$$

als reziproke Werte von einander zu gelten haben, also insbesondere $J$ in diesem Sinne [1]) als reziproker Wert von $\varepsilon$ anzusehen ist.

$$J = \varepsilon^{-1}.$$

Durch Einführung der unendlich großen dualen Zahlen von der Form $hJ$ wird also die Gleichung

$$ww' = 1$$

auch lösbar für den Fall, daß

$$w = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon$$

ist, und zwar ergibt sich für $w'$ nur die eine Lösung

$$w' = hJ.$$

Nunmehr soll untersucht werden, welche Modifikation eintritt, wenn die Größe $h$ den Wert Unendlich oder Null annimmt.

1. $h = \infty$. In diesem Falle wird für einen Punkt $(u')$, welcher sich dem Punkte $q_h$ unbegrenzt nähert, das Verhältnis $\frac{x_2}{x_0} = -h$ unendlich groß. Nach (3) ist nun dieses Verhältnis $= \frac{u'^2}{v'}$, es folgt also $\lim \frac{u'^2}{v'} = \infty$, somit $\lim \frac{v'}{u'^2} = 0$, wobei von den Größen $u'$ und $v'$ mindestens die erstere unendlich wird. Es ist also $\lim \frac{1}{w'} = \lim \frac{u' - v'\varepsilon}{u'^2} = 0$. $q_h$ wird für $h = \infty$ auf unserem Kegel identisch mit dem Fundamentalpunkte $p_\infty$. Diesem Punkte des Zahlenkegels ordnen wir eine unendlich große duale Zahl zu, welche mit dem gewöhnlichen Zeichen:

$$\infty$$

bezeichnet werden soll. Die unbegrenzte Annäherung des Punktes $(w')$ an den Punkt $p_\infty$ möge dann durch die Formel

$$\lim w' = \infty$$

[1]) Die Bedenken, welche E. Study gegen den unzulänglich motivierten Gebrauch des Symbols $J = \varepsilon^{-1}$ bei Herrn R. de Saussure erhebt (vgl. E. Study, Geom. d. Dyn., S. 208), treffen keineswegs die hier vorliegende Verwendung dieses Symbols; hier dient dieses Symbol lediglich zur Bezeichnung der verschiedenen unendlich großen dualen Zahlen, welch letztere hier in legitimer Weise eingeführt werden.

Digitized by Google

dargestellt werden. Es bestehen also gleichzeitig die Formeln

$$\begin{cases} \lim w' = \infty \\ \lim w = 0, \end{cases}$$

wenn $w$ und $w'$ durch die Relation $w w' = 1$ verbunden sind. In diesem Sinne können also die Zahlen 0 und $\infty$ als reziproke Werte angesehen werden.

2. $h = 0$. Es wird in diesem Falle der Punkt $q_h$ identisch mit dem Scheitelpunkte $p_\omega$ des Kegels, weil für den Punkt $q_h$ hier das Verhältnis $\frac{x_2}{x_0}$, also auch die Koordinate $x_2$ den Wert 0 annimmt, während ohnedies — wegen der Lage von $q_h$ auf der Erzeugenden $Q$ — die Koordinaten $x_1$ und $x_3$ verschwinden. [Vgl. das Schema (1).] Wir ordnen nun dem Scheitel $p_\omega$ eine neue unendlich große Zahl mit dem Symbol

$$\omega$$

zu. Nähert sich der Bildpunkt $(w')$ einer veränderlichen dualen Zahl $w$ unbegrenzt dem Punkte $p_\omega$, so soll dies durch $\lim w' = \omega$ bezeichnet werden. Das Verhältnis $\frac{x_2}{x_0}$ für den Punkt $(w')$, also das Verhältnis $\frac{u'^2}{v'}$ nähert sich hier der Grenze Null, man überzeugt sich vom gleichzeitigen Bestehen der Formeln

$$\begin{cases} \lim w' = \omega \\ \lim w = \omega \end{cases},$$

wenn $w$ und $w'$ durch die Relation

$$w w' = 1$$

verbunden sind. Die Bildpunkte $(w)$ und $(w')$ rücken auf dem Zahlenkegel zugleich in den Scheitel $p_\omega$. In diesem Sinne kann man die Zahl $\omega$ als reziprok zu sich selbst auffassen.

Wir stellen obige Definition der unendlich großen dualen Zahlen übersichtlich zusammen:

Diese Zahlen entsprechen den verschiedenen Punkten der Kegelerzeugenden $Q = [p_\infty p_\omega]$ ein- und eindeutig, und zwar entspricht dem Punkte $p_\infty$ die Zahl $\infty$,
dem Punkte $p_\omega$ „ „ $\omega$ und irgend einem durch die Gl. $\frac{x_2}{x_0} = -h$
festgelegten Punkte $q_h$ von $Q$ „ „ $hJ$. Arithmetisch lassen sich diese Zahlen in folgender Art charakterisieren:

Digitized by Google

Die Zahl $\infty$ ist aufzufassen als der Grenzwert einer unendlich groß werdenden dualen Zahl $w' = u' + v'\varepsilon$, für welche $\lim \frac{u'^2}{v'} = \infty$ ist;

„ „ $\omega$ als Grenzwert einer unendlich groß werdenden dualen Zahl, für welche $\lim \frac{u'^2}{v'} = 0$ ist;

„ „ $hJ$ als Grenzwert einer unendlich groß werdenden dualen Zahl, für welche $\lim \frac{u'^2}{v'} = -h$ ist.

Durch Einführung dieser unendlich großen dualen Zahlen ist die Mannigfaltigkeit der dualen Zahlen zu einem abgeschlossenen Kontinuum[1]) erweitert worden, und zwar erscheint letzteres umkehrbar eindeutig bezogen auf die Punkte des Zahlenkegels.

Als stetige Änderung einer dualen Veränderlichen $w$ ist eine derartige Änderung zu definieren, bei welcher der entsprechende Bildpunkt $(w)$ auf dem Zahlenkegel sich stetig ändert. In diesem Sinne gelten, wie leicht zu erkennen ist, folgende Formeln:

$$\begin{cases} \lim\limits_{h=0} hJ = \omega \\ \lim\limits_{h=\infty} hJ = \infty \end{cases}.$$

## § 3. Die gebrochen linearen Transformationen einer dualen Veränderlichen und die zugehörigen Kollineationen des Zahlenkegels in sich.

Sind

$$w_1 = u_1 + v_1\varepsilon$$

und

$$w_2 = u_2 + v_2\varepsilon$$

beliebige endliche duale Zahlen, wobei der Skalarteil

$$u_2$$

von Null verschieden vorauszusetzen ist, so ist die Gleichung

$$w \,.\, w_2 = w_1$$

stets, und zwar nur auf eine Weise durch eine endliche duale Zahl $w = u + v\varepsilon$ lösbar.

---

[1]) Vgl. zu diesem Begriffe die Darlegungen in der „Geometrie der Dynamen" von E. Study, § 27 (S. 247 u. d. f.).

Digitized by Google

Es wird [1])

$$w = w_1 \cdot \frac{1}{w_2} = (u_1 + v_1 \varepsilon)\frac{u_2 - v_2 \varepsilon}{u_2^2} = \frac{u_1 u_2 + (v_1 u_2 - v_2 u_1)\varepsilon}{u_2^2}$$

und der „Quotient“

$$w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{u_1 + v_1 \varepsilon}{u_2 + v_2 \varepsilon}$$ am bequemsten dadurch gebildet, daß Zähler und Nenner des letzteren Bruches mit $(u_2 - v_2 \varepsilon)$ multipliziert werden:

$$w = \frac{(u_1 + v_1 \varepsilon)(u_2 - v_2 \varepsilon)}{(u_2 + v_2 \varepsilon)(u_2 - v_2 \varepsilon)},$$ wodurch offenbar das obige Ergebnis geliefert wird.

Sei $w = u + v\varepsilon$ eine duale Variable. Man unterwerfe sie einer gebrochen-linearen Transformation

$$\left| w' = \frac{a w + b}{c w + d}, \right.$$

(5)

wobei die Koeffizienten $\left\{ \begin{array}{l} a = \alpha + \alpha' \varepsilon, \quad b = \beta + \beta' \varepsilon \\ c = \gamma + \gamma' \varepsilon, \quad d = \delta + \delta' \varepsilon \end{array} \right\}$ endliche duale Zahlen sind, für welche die Determinante der skalaren Teile

$$D = \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right|, \tag{6}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, der skalare Bestandteil der Substitutionsdeterminante $\left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right|$ von Null verschieden vorausgesetzt werden soll:

$$D \neq 0. \tag{7}$$

Wir untersuchen die Wirkung der obigen Substitution zunächst auf solche endliche Werte der Variablen $w = u + v\varepsilon$, für welche $\gamma u + \delta$, nämlich der skalare Bestandteil des Bruchnenners $cw + d$ in (5) von Null verschieden ist. Es ergibt sich dann auf Grund des oben über den Quotienten dualer Zahlen Gesagten, daß

[1]) Vgl. (4). Die Richtigkeit der angeschriebenen Lösung ist durch unmittelbare Probe zu erkennen; sie ist die einzige, weil das Bestehen zweier Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} w \,.\, w_2 = w_1 \text{ und} \\ w' \,.\, w_2 = w_1 \end{array} \right\}$$

die Gleichung $(w - w')\, w_2 = 0$ zur Folge hätte. Da nun der skalare Bestandteil $u_2$ von $w_2$ nach Voraussetzung von Null verschieden ist, so kann das letztere Produkt nur verschwinden, wenn $w - w' = 0$ ist.

Digitized by Google

$w' = u' + v'\varepsilon$ gemäß (5) eindeutig durch $w$ bestimmt ist, und zwar findet man

$$w' = u' + v'\varepsilon = \frac{(\alpha + \alpha'\varepsilon)(u + v\varepsilon) + (\beta + \beta'\varepsilon)}{(\gamma + \gamma'\varepsilon)(u + v\varepsilon) + (\delta + \delta'\varepsilon)} =$$

$$= \frac{(\alpha u + \beta) + (\alpha v + \alpha' u + \beta')\varepsilon}{(\gamma u + \delta) + (\gamma v + \gamma' u + \delta')\varepsilon},$$

und wenn man hierin nach der oben angegebenen Regel Zähler und Nenner mit

$$(\gamma u + \delta) - (\gamma v + \gamma' u + \delta')\varepsilon$$

multipliziert, ergibt sich weiter:

$$w' = u' + v'\varepsilon = \frac{(\alpha u + \beta)(\gamma u + \delta) + \begin{vmatrix} \alpha v + \alpha' u + \beta', & \alpha u + \beta \\ \gamma v + \gamma' u + \delta', & \gamma u + \delta \end{vmatrix} \varepsilon}{(\gamma u + \delta)^2}$$

und hieraus durch Trennung der skalaren und vektoriellen Bestandteile

$$(8) \quad \begin{cases} u' = \dfrac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta} \\ v' = \dfrac{(\alpha\gamma)_1 u^2 + [(\alpha\delta)_1 + (\beta\delta)_1] u + (\beta\delta)_1 + Dv}{(\gamma u + \delta)^2} \end{cases}$$

wenn $(\alpha\gamma)_1, \ldots$ in leicht verständlicher Abkürzung für $(\alpha'\gamma - \alpha\gamma'), \ldots$ gesetzt ist.

Die Koordinaten $x_0', x_1', x_2', x_3'$ des Bildpunktes $(w')$ der Zahl $w'$ auf dem Zahlenkegel sind gemäß (3) proportional den Größen $v', 1, u'^2, u'$, ebenso wie die Koordinaten des Bildpunktes $(w)$ der Zahl $w$ den Größen $v, 1, u^2, u$ proportional sind.

Aus (8) ergibt sich unmittelbar der Zusammenhang zwischen den Koordinaten der Bildpunkte $(w)$ und $(w')$:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{llllll} \rho x_0' = & D x_0 + & (\beta\delta)_1 x_1 + & (\alpha\gamma)_1 x_2 + & [(\alpha\delta)_1 + (\beta\gamma)_1] x_3 \\ \rho x_1' = & & \delta^2 x_1 + & \gamma^2 x_2 + & 2\gamma\delta x_3 \\ \rho x_2' = & & \beta^2 x_1 + & \alpha^2 x_2 + & 2\alpha\beta x_3 \\ \rho x_4' = & & \beta\delta x_1 + & \alpha\gamma x_2 + & (\alpha\delta + \beta\gamma) x_3 \end{array} \right\}$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist, wie eine leichte Rechnung lehrt, gleich $D^3$ und somit auf Grund der gemachten Annahme (7) von Null verschieden. Sieht man also zunächst von unendlichen sowie von solchen endlichen Werten von $w = u + v\varepsilon$ ab, für welche $\gamma u + \delta = 0$ ist, so kann man den Satz aussprechen:

Digitized by Google

„Die gebrochen-lineare Substitution (5) transformiert unter der Annahme (7) $D \neq 0$ den Zahlenkegel **kollinear** in sich selbst, und zwar ist diese Kollineation wegen $D^3 \neq 0$ sicherlich keine ausgeartete Kollineation."

Was nun die zunächst ausgeschlossenen Werte von $w$ anbelangt, ist folgendes zu bemerken. Die unendlich großen Werte von $w$ bilden sich ab auf der Erzeugenden $Q$, diejenigen, für welche $\gamma u + \delta = 0$ ist, bilden sich ab auf einer anderen Erzeugenden $\overline{Q}$. Sei nun $w = w_0$ eine duale Zahl, deren Bildpunkt $(w_0)$ auf einer der beiden Erzeugenden $Q$, $\overline{Q}$ liegt; der Wert der Funktion $w' = \frac{a w + b}{c w + d}$ ist für $w = w_0$ vorerst nicht definiert, kann aber nunmehr durch folgende Festsetzung bestimmt werden

$$\left[\frac{a w + b}{c w + d}\right]_{w = w_0} = \lim_{w = w_0} \frac{a w + b}{c w + d}. \tag{10}$$

Die Berechtigung dieser Definition ergibt sich daraus, daß durch die Substitution (5) auf dem Zahlenkegel eine stetige Transformation hervorgerufen wird, wodurch die Existenz des oben zur Definition benutzten Grenzwertes außer Frage gestellt ist. Durch diese nachträgliche Definition wird erreicht, daß die zu (5) gehörige Transformation ($D \neq 0$) im **ganzen** Zahlenkontinuum **wohl definiert, umkehrbar eindeutig** und **stetig** ist.

Die durch Substitutionen von der Form (5) unter der Voraussetzung $D \neq 0$ auf dem Zahlenkegel hervorgerufenen Kollineationen (8) bilden eine **Gruppe $G_6$ von $\infty^6$ Kollineationen,** indem nur 3 von den 4 in (5) auftretenden dualen Konstanten wesentlich sind, da eine von diesen 4 durch Division des Zählers und Nenners im Bruche (5) mit gerade dieser Konstanten zu 1 gemacht werden kann.

## § 4. Die Gruppe $G_7$ aller Kollineationen des Zahlenkegels in sich und ihre Darstellung in den dualen Zahlen.

Sei $C$ eine beliebige nicht ausgeartete Kollineation des Zahlenkegels in sich. Durch diese werden die Erzeugenden des Kegels projektiv untereinander vertauscht. In der Gruppe $G_6$ kann man sicher — in noch näher kennzeichnender Weise — eine Kollineation $R$ angeben, welche die Kegelerzeugenden in ganz derselben Weise untereinander vertauscht.

Nach (3) gehören zu den dualen Zahlen $w = u + v\varepsilon$, für welche $u$ einen bestimmten Wert hat, $u = \text{konst.}$, die Punkte einer bestimmten Kegelerzeugenden. Man kann $u$ als projektiven Parameter dieser Erzeugenden des Zahlenkegels ansehen. Irgend eine projektive Vertauschung dieser Erzeugenden, also auch die zu $C$ gehörige, läßt sich dann durch eine gebrochen-lineare Transformation dieses Parameters darstellen, etwa durch

Digitized by Google

$$(11) \qquad u' = \frac{\alpha_1 u + \beta_1}{\gamma_1 u + \delta_1},$$

wobei $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} \neq 0$ ist und $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1\, \delta_1$ gewöhnliche reelle oder komplexe Zahlen sind.

Um nun eine in $G_6$ enthaltene nicht ausgeartete Kollineation $R$ zu erzielen, welche dieselbe projektive Vertauschung der Kegelerzeugenden hervorruft wie (11), braucht man die Kollineation $R$ nur zu definieren durch die gebrochen-lineare Substitution

$$(12) \qquad R \ldots w' = \frac{\alpha_1 w + \beta_1}{\gamma_1 w + \delta_1},$$

denn nach (8) wird durch diese Substitution die Veränderliche $w = u + v\varepsilon$ in eine andere $w' = u' + v'\varepsilon$ übergeführt, für welche

$$u' = \frac{\alpha_1 u + \beta_1}{\gamma_1 u + \delta_1}$$

ist, in genauer Übereinstimmung mit (11). Die zu (12) gehörige Kollineation $R$ [1]) bewirkt also dieselbe Vertauschung der Erzeugenden des Zahlenkegels wie die Kollineation $C$, da die zu $C$ gehörige Vertauschung der Erzeugenden eben durch (11) dargestellt wird.

Die zu $R$ gehörige inverse Kollineation $R^{-1}$, welche durch die zu (12) inverse Substitution

$$(13) \qquad R^{-1} \ldots w' = -\frac{\delta_1 w - \beta_1}{\gamma_1 w - \alpha_1}$$

dargestellt wird und wie $R$ zur Gruppe $G_6$ gehört, bewirkt gerade die entgegengesetzte Vertauschung der Erzeugenden wie die Kollineation $C$. Mithin stellt die aus $R^{-1}$ und $C$ zusammengesetzte Kollineation $(R^{-1}\, C)$ eine Transformation dar, bei welcher jede Erzeugende für sich in Ruhe bleibt. $(R^{-1}\, C)$ ist also eine zentrale Kollineation mit dem Zentrum $p_\omega$ und läßt sich analytisch darstellen durch ein Gleichungssystem von der Form

$$(14) \qquad (R^{-1}\, C) \ldots \left\{ \begin{array}{llll} \rho x_0' = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ \rho x_1' = \qquad\quad x_1 \\ \rho x_2' = \qquad\qquad\quad x_2 \\ \rho x_3' = \qquad\qquad\qquad\quad x_3 \end{array} \right\}.$$

Die Determinante $\lambda_0$ dieses Gleichungssystems ist von Null verschieden, da weder $R^{-1}$ noch $C$ ausarten und infolgedessen auch $(R^{-1}\, C)$ keine ausgeartete Kollineation sein kann.

[1]) Die Kollineation $R$ hat die (durch Rechnung leicht zu verifizierende charakteristische Eigenschaft, daß bei ihr die Ebenen des Büschels: $\frac{\beta_1 x_1 - \gamma_1 x_2 + (\alpha_1 - \delta_1) x_3}{x_0} = \text{konst.}$ fest bleiben.

Digitized by Google

Wir vergleichen nun die zentrale Kollineation $(R^{-1}\,C)$ mit den in der Gruppe $G_6$ enthaltenen zentralen Kollineationen. Die letzteren bilden eine Untergruppe $T$ in $G_6$. Soll die zu (5) gehörige Kollineation eine zentrale (mit dem Zentrum $p_\omega$) sein, also die Kegelerzeugenden einzeln in Ruhe lassen, so ist dazu mit Rücksicht auf die erste Gleichung in (8) notwendig und hinreicheud, daß

$$\beta = 0,\ \gamma = 0 \text{ und } \alpha = \delta$$

sei. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\alpha = \delta = 1$ setzen. Durch diese Annahmen spezialisiert sich das Gleichungssystem (9) und geht über in

$$(15)\qquad T\ldots\ldots \text{(Untergruppe in } G_6) \begin{cases} \rho x_0' = x_0 + \beta' x_1 - \gamma' x_1 + (\alpha' - \delta') x_3 \\ \rho x_1' = x_1 \\ \rho x_2' = x_2 \\ \rho x_3' = x_3 \end{cases}.$$

Dieses System (15) ist der allgemeine Ausdruck für die Kollineationen der Untergruppe $T$ in $G_6$. [1]) Man bestimme nun in dieser Untergruppe eine Kollineation $T_0$ durch die Festsetzungen

$$\beta' = \frac{\lambda_1}{\lambda_0},\quad -\gamma' = \frac{\lambda_2}{\lambda_0},\quad \alpha' - \delta' = \frac{\lambda_3}{\lambda_0}.$$

$T_0$ wird dann dargestellt durch

$$(16)\qquad T_0\ldots \begin{cases} \rho' x_0' = x_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_0} x_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_0} x_3 \\ \rho' x_1' = x_1 \\ \rho' x_2' = x_2 \\ \rho' x_3' = x_3 \end{cases}.$$

Vergleicht man nun $T_0$ mit $(R^{-1}\,C)$, also (16) mit (14), so ergibt sich, daß $(R^{-1}\,C)$ zusammengesetzt gedacht werden kann aus $T_0$ und jener Kollineation $A_{\lambda_0}$, welche definiert ist durch das System

$$(17)\qquad A_{\lambda_0}\ldots \begin{cases} \bar{\rho} x_0' = \lambda_0 x_0 \\ \bar{\rho} x_1' = x_1 \\ \bar{\rho} x_2' = x_2 \\ \bar{\rho} x_3' = x_3 \end{cases}.$$

[1]) Geometrisch lassen sich die Kollineationen von $T$ charakterisieren als zentrale Kollineationen, bei welchen die „Zentralebene" (d. i. jene Ebene, welche punktweise fest bleibt) durch das Zentrum $p_\omega$ geht. Die Gleichung dieser Zentralebene lautet: $\beta' x_1 - \gamma' x_2 + (\alpha' - \delta') x_3 = 0$.

Digitized by Google

Also ist

$$(R^{-1}\,C) = (T_0\,A_{\lambda_0}). \tag{18}$$

Die Kollineation $A_{\lambda_0}$ transformiert den Zahlenkegel (2) $x_1 x_2 - x_3^2 = 0$ in sich; anderseits kann $A_{\lambda_0}$, solange $\lambda_0 \neq 1$ ist, nicht in $G_6$ enthalten sein, da sie in diesem Falle als zentrale Kollineation zur Untergruppe $T$ gehören müßte und letzteres durch Vergleichung von (15) mit (17) sich als unmöglich herausstellt.

Aus (18) folgt

$$C = (R\,T_0\,A_{\lambda_0}). \tag{19}$$

„Die allgemeinste[1]) Kollineation $C$, welche den Zahlenkegel in sich überführt, läßt sich zusammensetzen aus einer Kollineation $(R\,T_0)$ der Gruppe $G_6$ und einer Kollineation $A_{\lambda_0}$ der eingliedrigen Gruppe $A$:

$$A \ldots \left\{ \begin{array}{llll} \bar{\rho}\,x_0' = \lambda x_0 & & & \\ \bar{\rho}\,x_1' = & x_1 & & \\ \bar{\rho}\,x_2' = & & x_2 & \\ \bar{\rho}\,x_3' = & & & x_3 \end{array} \right\}. \tag{20}$$

Die Gesamtheit aller $C$ bildet also eine Gruppe $G_7$ von $\infty^7$ Kollineationen."

Es drängt sich nun die Frage auf, wie die Kollineationen der Gruppe $G_7$ sich in den dualen Zahlen darstellen. Da die Kollineationen der Gruppe $G_6$ durch eine Gleichung von der Form (5) dargestellt werden, erübrigt es noch, die eingliedrige Gruppe $A$ in den dualen Zahlen darzustellen. Vergegenwärtigt man sich die durch Proportion (3) hergestellte Zuordnung zwischen den Punkten des Zahlenkegels und den zugehörigen dualen Zahlen, so erkennt man, daß die durch (20) bewirkte Kollineation $A_\lambda$ des Zahlenkegels in sich den Bildpunkt einer Zahl $w = u + v\varepsilon$ überführt in den Bildpunkt der Zahl $w' = u + \lambda v\varepsilon$. Definiert man einen symbolischen Operationsfaktor $\mathfrak{A}_\lambda$ durch

$$\mathfrak{A}_\lambda\,(u + v\varepsilon) = u + \lambda v\varepsilon, \tag{21}$$

so drückt sich die Kollineation $A_\lambda$ des Zahlenkegels in den dualen Zahlen folgendermaßen aus:

$$A_\lambda \ldots w' = \mathfrak{A}_\lambda\,(w). \tag{22}$$

Die allgemeinste[1]) Kollineation $C$ des Zahlenkegels in sich wird dann dargestellt durch

$$C \ldots w' = \mathfrak{A}_\lambda \left( \frac{a\,w + b}{c\,w + d} \right). \tag{23}$$

[1]) nicht ausgeartete.

Digitized by Google

Ist speziell $\lambda = 1$, so geht (23) über in (5) und die Kollineation $C$ gehört dann zur Untergruppe $G_6$.

$G_6$ ist, wie leicht zu sehen, eine invariante Untergruppe. Da $G_7$ aus $G_6$ durch Hinzufügung der Gruppe $A$ (Gl. 20) entsteht, kann der Beweis hiefür einfach so geführt werden: Sei $S$ irgend eine Kollineation in $G_6$, $A_\lambda$ irgend eine Kollineation der Gruppe $A$; es ist zu zeigen, daß die Transformation $(A_\lambda^{-1} S A_\lambda)$ wieder in $G_6$ enthalten ist. Man kann sich $S$ durch eine Substitution von der Form (5): $w' = \frac{a w + b}{c w + d}$ dargestellt denken. Die letztere Gleichung bleibt nun mit Rücksicht auf (8) [und (6)] gültig, wenn man in ihr die vektoriellen Teile sämtlicher dualer Zahlen, nämlich der Zahlen $w' = u' + v' \varepsilon$, $w = u + v\varepsilon$, $a = \alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon$, $b = \beta_1 + \beta_2 \varepsilon$, $c = \gamma_1 + \gamma_2 \varepsilon$, $d = \delta_1 + \delta_2 \varepsilon$ mit einem und demselben Faktor $\lambda$ multipliziert. Die Gleichung (5) ist hienach ersetzbar durch

$$\mathfrak{A}_\lambda(w') = \frac{\mathfrak{A}_\lambda(a)\,\mathfrak{A}_\lambda(w) + \mathfrak{A}_\lambda(b)}{\mathfrak{A}_\lambda(c)\,\mathfrak{A}_\lambda(w) + \mathfrak{A}_\lambda(d)}. \tag{24}$$

Setzt man nun

$$\begin{cases} \mathfrak{A}_\lambda(w) = z \text{ und} \\ \mathfrak{A}_\lambda(w') = z' \end{cases} \tag{25}$$

und führt man ferner die Abkürzungen ein

$$\mathfrak{A}_\lambda(a) = \bar{a},\ \mathfrak{A}_\lambda(b) = \bar{b}, \ldots$$

so hat man zwischen $z$ und $z'$ die Beziehung

$$z' = \frac{\bar{a} z + \bar{b}}{\bar{c} z + \bar{d}}. \tag{26}$$

Nach (25) entspricht dem Übergange vom Bildpunkte $(z)$ zum Bildpunkte $(w)$ die Kollineation $A_\lambda^{-1}$ der Gruppe $A$
nach (5) entspricht dem Übergange vom Bildpunkte $(w)$ zum Bildpunkte $(w')$ eine Kollineation $S$ der Gruppe $G_6$
nach (25) entspricht dem Übergange vom Bildpunkte $(w')$ zum Bildpunkte $(z')$ die Kollineation $A_\lambda$ der Gruppe $A$,

es geht also aus $(z)$ der Punkt $(z')$ hervor durch die Kollineation

$$(A_\lambda^{-1} S A_\lambda);$$

anderseits aber entspricht nach (26) dem Übergange von $(z)$ zu $(z')$ eine gewisse Kollineation der Gruppe $G_6$, es gehört also $(A_\lambda^{-1} S A_\lambda)$ zu $G_6$, q. e. d.

Digitized by Google

Auch die Gruppe $G_4$ aller durch (14) dargestellten zentralen Kollineationen in der Gruppe $G_7$ ist eine invariante Untergruppe in $G_7$, wie unmittelbar einleuchtet.

Die durch (15) definierte Gruppe $T$, welche als Durchschnitt der Gruppen $G_6$ und $G_4$ erscheint, bildet mithin eine ebenfalls invariante dreigliedrige Untergruppe in $G_7$.

Es erübrigt noch, zu zeigen, in welcher Weise durch Zuordnung einer Anzahl von entsprechenden Punkten irgend eine Kollineation der Gruppe $G_6$ bezw. $G_7$ geometrisch festgelegt werden kann.

Seien $t_1\,t_2\,t_3$ und $t_1'\,t_2'\,t_3'$ zwei Punktetripel auf den Zahlenkegel, derart, daß die Ebenen $[t_1\,t_2\,t_3]$ und $[t_1'\,t_2'\,t_3']$ nicht durch den Scheitel $p_\omega$ gehen; dann existiert sicher eine und nur eine Kollineation $S$ in $G_6$, welche die Punkte des ersten Tripels in die entsprechenden des zweiten überführt.

Beweis: Durch die Zuordnung der beiden Punktetripel ist die projektive Vertauschung der Kegelerzeugenden bei der gesuchten Kollineation vollständig bestimmt. Es sei nun $R$ eine Kollineation von der durch (12) dargestellten Art, durch welche dieselbe Vertauschung der Kegelerzeugenden bewirkt wird; den Punkten $t_1\,t_2\,t_3$ werden in der Kollineation $R$ drei Punkte $\bar{t}_1\,\bar{t}_2\,\bar{t}_3$ entsprechen, welche bezw. auf denselben Erzeugenden liegen wie die Punkte $t_1'\,t_2'\,t_3'$.

Nimmt man nun die gesuchte Kollineation $S$ in der Form $(RP)$ an, $S=(RP)$,

so muß $P=(R^{-1}S)$ in $G_6$ enthalten sein, da $R^{-1}$ und $S$ zu dieser Gruppe $G_6$ gehören. $P$ ist dann dadurch bestimmt, daß den Punkten $\bar{t}_1\,\bar{t}_2\,\bar{t}_3$ die Punkte $t_1'\,t_2'\,t_3'$ entsprechen, welche bezw. auf denselben Erzeugenden liegen, ist also notwendig eine zentrale Kollineation; da sie nun auch zu $G_6$ gehören soll, so muß sie in der Gruppe $T$ (Gl. 15) enthalten sein.

In $T$ gibt es aber eine und nur eine Kollineation, welche die Punkte $\bar{t}_1\,\bar{t}_2\,\bar{t}_3$ in die Punkte $t_1'\,t_2'\,t_3'$ überführt. $P$ und damit $S=(RP)$ ist also eindeutig bestimmt.

Eine Kollineation der Gruppe $G_7$ kann in folgender Weise geometrisch festgelegt werden. Seien $t_1\,t_2\,t_3$ und $t_1'\,t_2'\,t_3'$ zwei Punktetripel auf dem Zahlenkegel wie oben, $s_3$ ein — vom Scheitel $p_\omega$ und von $t_3$ verschiedener — Punkt von $[p_\omega\,t_3]$, ebenso $s_3'$ ein Punkt von $[p_\omega\,t_3']$; es existiert dann eine und nur eine Kollineation $\Sigma$ der Gruppe $G_7$, welche das Quadrupel $t_1\,t_2\,t_3\,s_3$ in das Quadrupel $t_1'\,t_2'\,t_3'\,s_3'$ überführt.

Beweis im Anschluß an den vorigen: Man setze die gesuchte Kollineation $\Sigma$ wieder in der Form $(RP)$ an. $R$ soll wieder eine

Digitized by Google

Kollineation der Gruppe $G_6$ sein, welche das Quadrupel $t_1\ t_2\ t_3\ s_3$ überführt in das Quadrupel $\bar{t}_1\ \bar{t}_2\ \bar{t}_3\ \bar{s}_3$, so zwar, daß die Punkte des letzteren Quadrupels auf denselben Erzeugenden liegen wie $t_1'\ t_2'\ t_3'\ s_3'$.

$P=(R^{-1}\Sigma)$ gehört zur Gruppe $G_7$ und ist eine zentrale Kollineation, gehört daher zur Gruppe $G_4$ (Gl. 14). Da in $P$ dem Quadrupel $\bar{t}_1\ \bar{t}_2\ \bar{t}_3\ \bar{s}_3$ das Quadrupel $t_1'\ t_2'\ t_3'\ t_4'$ entsprechen muß, ist nach (14) die Kollineation $P$ und mithin auch $\Sigma$ eindeutig bestimmt.

## § 5. Koordinatentransformation. Doppelverhältnisse.

Die gegenseitige Zuordnung der dualen Zahlen und der zugehörigen Punkte des Zahlenkegels wurde im § 1 durch die Proportion (3) definiert nach Festlegung eines projektiven Koordinatensystems vermittels der sogenannten Fundamentalpunkte $p_0\ p_\infty\ p_1\ p_{(1+\varepsilon)}$, von welchen die letzten zwei auf einer Kegelerzeugenden liegen, während die durch $p_0\ p_\infty\ p_1$ gelegte Ebene $E$ nicht durch den Scheitel $p_\omega$ geht.

Wählt man die Fundamentalpunkte in anderer Weise: $\mathfrak{p}_0\ \mathfrak{p}_\infty\ \mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_{(1+\varepsilon)}$ — unter Einhaltung analoger Bedingungen — und definiert man wieder in gleicher Weise wie in § 1 das zu diesem System von Fundamentalpunkten gehörige projektive Koordinatensystem $(x_0'\ x_1'\ x_2'\ x_3')$ und ordnet dann demjenigen Punkte, dessen Koordinaten im neuen System $(x_0'\ x_1'\ x_2'\ x_3')$ sind, die duale Zahl $w'=u'+v'\varepsilon$ zu vermittels der zu (3) analogen Proportion

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = v' : 1 : u'^2 : u', \tag{3'}$$

so erhält man eine von der des § 1 verschiedene Zuordnung der Punkte des Zahlenkegels und der dualen Zahlen; die letztere soll mit II bezeichnet werden im Gegensatz zur früheren I. Der Bildpunkt einer dualen Zahl bei der Zuordnung II kann dadurch bezeichnet werden, daß man die betreffende duale Zahl in eckige Klammern einschließt.

Es drängt sich nun die Frage auf, in welcher Weise die zum selben Kegelpunkt $p$ nach den Zuordnungen I und II gehörigen dualen Zahlen

$$w=u+v\varepsilon \quad \text{und} \quad w'=u'+v'\varepsilon$$

miteinander zusammenhängen. Es ergibt sich, daß zwischen diesen Zahlen eine Beziehung von genau der Form (23)

$$w'=\mathfrak{A}_\lambda\left(\frac{aw+b}{cw+d}\right) \tag{23'}$$



Digitized by Google

besteht, wobei der Operationsfaktor $\mathfrak{A}_\lambda$ die durch (21)

$$\mathfrak{A}_\lambda (u + v\varepsilon) = u + \lambda v \varepsilon \tag{21}$$

dargestellte Bedeutung hat.

Beweis. Zwischen den Koordinaten $x_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ eines Punktes $p$ im ursprünglichen Koordinatensystem und den Koordinaten $x_i'$ desselben Punktes im neuen System besteht ein System von homogenen linearen Gleichungen. Die Gleichung des Zahlenkegels im neuen System muß wieder die Form haben

$$x_1' x_2' - x_3'^2 = 0. \tag{2'}$$

Man kann nun die $x_i'$ auch als die Koordinaten eines Punktes $p'$, bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem, ansehen. Nimmt man $p$ auf dem Zahlenkegel, so muß wegen (2') der Punkt $p'$ auch auf dem Zahlenkegel liegen und die Beziehung zwischen $p$ und $p'$ ist eine Kollineation $C$ des Zahlenkegels in sich. Aus (3) und (3') folgt dann, daß die zu $p$ nach Zuordnung II gehörige duale Zahl $w'$ identisch ist mit derjenigen Zahl, welche zum Punkte $p'$ nach der Zuordnung I gehört. Letztere ist aber mit der zum Punkte $p$ nach Zuordnung I gehörigen Zahl $w$ nach § 4 durch eine Gleichung von der Form (23) verbunden, womit obige Behauptung bewiesen ist.

Aus diesem Beweise läßt sich noch eine Folgerung ziehen. Der Punkt $p'$ hat im ursprünglichen Koordinatensystem dieselben Koordinaten wie der Punkt $p$ im neuen Koordinatensystem. Die Fundamentalpunkte $p_0\, p_\infty\, p_1\, p_{(1+\varepsilon)}$ haben nun im ursprünglichen Koordinatensystem dieselben Koordinaten wie die Fundamentalpunkte $\mathfrak{p}_0\, \mathfrak{p}_\infty\, \mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_{(1+\varepsilon)}$ im neuen; vgl. das Schema (1). Läßt man also der Reihe nach den Punkt $p$ in die Punkte $\mathfrak{p}_0\, \mathfrak{p}_\infty\, \mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_{(1+\varepsilon)}$ rücken, so rückt der „ $p'$ „ „ „ $p_0\, p_\infty\, p_1\, p_{(1+\varepsilon)}$. Da nun $p'$ dem Punkte $p$ in der Kollineation $C$ entspricht, so folgt, daß durch diese Kollineation $C$ die neuen Fundamentalpunkte $\mathfrak{p}_0, \ldots$ in die alten Fundamentalpunkte $p_0, \ldots$ übergeführt werden. Hiedurch ist nach § 4 die Kollineation $C$ bereits völlig bestimmt.

Stellt man $C$ im Sinne der Zuordnung I in dualen Zahlen dar, so muß sich genau die Gleichung (23') ergeben, man kann also den Zusammenhang zwischen den dualen Zahlen $w$ und $w'$, welche zum selben Punkte $p$ des Zahlenkegels nach Zuordnung I und II gehören, einfach dadurch erhalten, daß man jene Kollineation $C$ auf dem Zahlenkegel bestimmt, welche die neuen Fundamentalpunkte in die alten überführt, diese Kollineation dann im Sinne der Zuordnung I in dualen Zahlen darstellt und in der so entstehenden Gleichung dann die Größen $w$ und $w'$ als die zum Punkte $p$ (nach I und II) gehörigen dualen Zahlen interpretiert.

Digitized by Google

Gehört im besonderen die Kollineation $C$, welche die neuen Fundamentalpunkte in die alten überführt, zur Gruppe $G_6$, so kann man die von den alten und neuen Fundamentalpunkten gebildeten Punktquadrupel als äquivalent bezüglich der Gruppe $G_6$ bezeichnen. In diesem Falle tritt an Stelle der Gleichung (23), welche $C$ im Sinne der Zuordnung I darstellt, die einfachere Gleichung

$$w' = \frac{a\,w + b}{c\,w + d}, \tag{5'}$$

welche nach dem obigen den Zusammenhang zwischen den zu einem Punkte $p$ in der Zuordnung I und II gehörigen Zahlen im vorliegenden besonderen Falle darstellt.

Es seien $w_1\ w_2\ w_3\ w_4$ vier duale Zahlen, von denen zunächst angenommen werden möge

Bedingung $\alpha$), daß sie endlich seien und daß die skalaren Teile der beiden Differenzen $(w_3 - w_2)$ und $(w_4 - w_1)$ von Null verschieden seien.

Unter dem Doppelverhältnis $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ verstehen wir den Ausdruck

$$\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \frac{(w_3 - w_1)\,(w_4 - w_2)}{(w_3 - w_2)\,(w_4 - w_1)}, \tag{27}$$

welcher auf Grund der Annahme ($\alpha$) wohl definiert und eindeutig bestimmt ist. Ist die Bedingung ($\alpha$) nicht erfüllt, so kann man sich die Zahlen $w_1, \ldots$ zunächst veränderlich denken und dann ihren vorgegebenen Werten sich unbegrenzt nähern lassen, so zwar, daß bei dem Annäherungsprozeß die Bedingung ($\alpha$) gewahrt bleibt. Wenn dann bei allen derartigen Grenzprozessen das durch (27) definierte Doppelverhältnis einem und demselben bestimmten Grenzwerte zustrebt, so soll dieser als das Doppelverhältnis der vier Zahlen gelten. Man hat dann also als Definition

$$\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \lim_{\overline{w_i = w_i}} \frac{(\overline{w_3} - w_1)\,(\overline{w_4} - \overline{w_2})}{(w_3 - w_2)\,(w_4 - w_1)}, \tag{28}$$

Ergeben sich bei den obigen Grenzprozessen je nach der Art, in welcher dieselben stattfinden, verschiedene Grenzwerte, so soll das Doppelverhältnis als unbestimmt angesehen werden, wobei der Umfang dieser Unbestimmtheit durch die verschiedenen erzielbaren Werte charakterisiert werden kann. — Liegen die Bildpunkte der 4 Zahlen $w_i$ alle in einer durch den Scheitel $p_\omega$ des Zahlenkegels gehenden Ebene, so soll das Quadrupel dieser Bildpunkte und ebenso das Quadrupel der 4 Zahlen $w_i$ ein spezielles heißen. Für nichtspezielle Zahlenquadrupel ist das Doppelverhältnis durch die obige Definition (27), (28) völlig eindeutig bestimmt.



Digitized by Google

Transformiert man die vier Zahlen $w_i$, von denen angenommen wird, daß sie kein spezielles Quadrupel bilden, durch eine gebrochen-lineare Substitution (5) $w' = \frac{a\,w + b}{c\,w + d}$ in die Zahlen $w_i'$, so bleibt das Doppelverhältnis dieser Zahlen erhalten, was auf die sonst bei gewöhnlichen Zahlen übliche Art bewiesen werden kann.

Bildet man die $w_i$ auf bestimmte Weise, etwa nach der Zuordnung I auf dem Zahlenkegel ab, so kann man das Doppelverhältnis der vier Zahlen $w_i$ auch als Doppelverhältnis der vier Bildpunkte $(w_i)$ auf dem Zahlenkegel definieren, wobei aber ausdrücklich auf die Zuordnung I Bezug genommen werden muß. Geht man von der Zuordnung I zu einer anderen Zuordnung II über, deren Fundamentalpunkte mit jenen von I bezüglich der Gruppe $G_6$ äquivalent sind (vgl. S. 19), so transformieren sich die zu den obigen vier Punkten des Zahlenkegels gehörigen dualen Zahlen durch eine gebrochen-lineare Substitution von der Form (5) = (5'), es ist also auch für die neue Zuordnung II das Doppelverhältnis der obigen vier Punkte dasselbe wie bei der Zuordnung I. Ist aber bei der neuen Zuordnung II das Quadrupel der neuen Fundamentalpunkte nicht mehr äquivalent (bezüglich der Gruppe $G_6$) mit dem zu I gehörigen Quadrupel der ursprünglichen Fundamentalpunkte, so transformieren sich die $w_i$ gemäß der Formel (23') dieses Paragraphen $w' = \mathfrak{A}_\lambda\left(\frac{a\,w + b}{c\,w + d}\right)$, und es bestimmt sich das Doppelverhältnis der transformierten Zahlen durch

$$\{w_1'\ w_2'\ w_3'\ w_4'\} = \mathfrak{A}_\lambda\{w_1\ w_2\ w_3\ w_4\}, \tag{29}$$

d. h. das zur Zuordnung II gehörige Doppelverhältnis der vier Kegelpunkte geht aus dem zu I gehörigen Doppelverhältnis dadurch hervor, daß man seinen skalaren Bestandteil unverändert läßt, den vektoriellen aber mit einem Faktor $\lambda$ multipliziert, wobei der Faktor $\lambda$ von der Lage der vier Punkte $(w_i)$ auf dem Zahlenkegel unabhängig ist und nur von der zwischen den Zuordnungen I und II bestehenden Beziehung (23') abhängt.

Nimmt man auf dem Zahlenkegel vier Punkte beliebig an, doch so, daß sie kein spezielles Quadrupel bilden, und bildet das Doppelverhältnis derselben bezüglich aller möglichen Zuordnungen I, II, ..., so ist der skalare Bestandteil für alle diese Doppelverhältnisse derselbe, der vektorielle Bestandteil aber ändert sich beim Übergange von einer Zuordnung zur andern um einen Faktor $\lambda$. Gehört bei der einen Zuordnung I zu einem Punkte des Zahlenkegels die Zahl $w$, bei der anderen II die Zahl $w'$, so daß $w$ und $w'$ durch (23') zusammenhängen, so gibt der in dieser Formel auftretende Faktor $\lambda$ gerade diesen Faktor an, welchen beim Übergange von I zu II der vektorielle Bestandteil des Doppelverhältnisses irgend eines Punktquadrupels zu sich nimmt. Da der

Digitized by Google

Faktor $\lambda$ nur von den Zuordnungen I und II abhängig ist, wollen wir ihn als den Modul der Zuordnung II bezüglich der Zuordnung I bezeichnen. Die Gesamtheit aller Zuordnungen, welche bezüglich I denselben Modul $\lambda$ haben, nennen wir eine Klasse von Zuordnungen $K_\lambda$. Das Doppelverhältnis eines Punktquadrupels des Zahlenkegels hat in bezug auf alle Zuordnungen derselben Klasse den gleichen Wert, beim Übergang von einer Zuordnung der Klasse $K_\lambda$ zu einer Zuordnung von der Klasse $K_\mu$ ändert sich bloß der vektorielle Bestandteil des Doppelverhältnisses irgend eines Punktquadrupels um den Faktor $\frac{\mu}{\lambda}$.

Der skalare Teil des Doppelverhältnisses eines Punktquadrupels ist für die Zuordnungen aller Klassen derselbe, man findet für ihn den Wert

$$\frac{(u_3 - u_1)(u_4 - u_2)}{(u_3 - u_2)(u_4 - u_1)},$$

wobei die $u_i$ die skalaren Teile der zu den Punkten des Quadrupels gehörigen dualen Zahlen sind. Da nun die $u_i$ nach § 4 die projektiven Parameter der durch die einzelnen Punkte des Quadrupels bestimmten Kegelerzeugenden sind, so folgt, daß der skalare Teil des Doppelverhältnisses von vier Punkten des Zahlenkegels — für alle Zuordnungen — identisch ist mit dem gewöhnlichen projektiven Doppelverhältnis der zugehörigen Kegelerzeugenden.

Was den vektoriellen Teil des Doppelverhältnisses betrifft, so kann man diesen für ein Quadrupel von nicht in einer Ebene liegenden Punkten willkürlich, [1]) aber ungleich Null annehmen. Dadurch bestimmt sich eine Klasse von Zuordnungen und durch diese ist dann das Doppelverhältnis sämtlicher Quadrupel des Zahlenkegels festgelegt. Den Wert Null hat der vektorielle Bestandteil des Doppelverhältnisses eines nicht speziellen Punktquadrupels dann und nur dann, wenn seine vier Punkte in einer Ebene liegen. (Der Beweis wird dadurch geführt, daß man das Quadrupel durch eine Kollineation von $G_6$ derart transformiert, daß drei voneinander verschiedene Punkte desselben in die Ebene $E = [p_\infty p_1 p_0]$ gelangen. Das Doppelverhältnis des transformierten Quadrupels ist dann und nur dann eine rein skalare Größe, wenn auch der vierte Punkt durch die Transformation in die Ebene $E$ gelangt.)

### § 6. Synektische Funktionen dualer Veränderlicher.

In Übereinstimmung mit der von Herrn E. Study (Geom. d. Dyn., S. 199) eingeführten Bezeichnungsweise möge als synektische Funktion einer dualen Variablen $w = u + v\varepsilon$ eine andere duale Variable $w' = u' + v'\varepsilon$ dann und nur dann bezeichnet werden,

[1]) Willkürlich deshalb, weil der vektorielle Teil des Doppelverhältnisses für die verschiedenen Klassen von Zuordnungen verschieden ausfällt.

Digitized by Google

wenn $u'$ und $v'$ analytische Funktionen von $u$ und $v$ sind, derart, daß — von etwaigen Ausnahmestellen abgesehen — der Differentialquotient[1])

$$\frac{dw'}{dw} = \frac{du' + \varepsilon\, dv'}{du + \varepsilon\, dv}$$

von den im Nenner stehenden Differentialen unabhängig ist, also nur von $u$ und $v$ abhängt:

$$\frac{dw'}{dw} = \frac{du' + \varepsilon\, dv'}{du + \varepsilon\, dv} = F(u, v). \tag{30}$$

Man findet

$$\frac{dw'}{dw} = \frac{\frac{\partial u'}{\partial u} du + \frac{\partial u'}{\partial v} dv + \varepsilon\left(\frac{\partial v'}{\partial u} du + \frac{\partial v'}{\partial v} dv\right)}{du + \varepsilon\, dv} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial u'}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial v'}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial u'}{\partial v} + \varepsilon \frac{\partial v'}{\partial v}\right) dv}{du + \varepsilon\, dv}$$

und ersieht hieraus, daß der Differentialquotient $\frac{dw'}{dw}$ von den im Nenner stehenden Differentialen $du$ und $dv$ dann und nur dann unabhängig ist, wenn

$$\frac{\partial u'}{\partial v} + \varepsilon \frac{\partial v'}{\partial v} = \varepsilon\left(\frac{\partial u'}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial u'}{\partial v}\right),$$

also

$$\left\{\frac{\partial u'}{\partial v} = 0 \text{ und } \frac{\partial v'}{\partial v} = \frac{\partial u'}{\partial u}\right\} \tag{31}$$

ist. Hieraus findet man durch Integration

$$\left\{u' = \varphi(u) \text{ und } v' = \psi(u) + v \cdot \frac{d}{du}\varphi(u)\right\} \tag{32}$$

als für synektische Funktionen

$$w' = u' + v'\varepsilon = f(w) = f(u + v\varepsilon) \tag{33}$$

von $w = u + v\varepsilon$ charakteristische Gleichungen.

[1]) Dieser Differentialquotient ist zunächst nur definiert, wenn das im Nenner vorkommende Differential $du$ nicht Null ist, also der skalare Bestandteil in $du$ von Null verschieden ist.

Digitized by Google

Man kann eine solche synektische Funktion auch definieren durch eine Potenzreihe in der dualen Veränderlichen $w$ mit dualen Koeffizienten $a_k = \alpha_k + \alpha'_k \varepsilon$:

$$\begin{aligned} w' = \sum a_k w^k &= \sum (\alpha_k + \alpha'_k \varepsilon)(u + v\varepsilon) \\ &= \sum \alpha_k u^k + \varepsilon \left\{ \sum \alpha'_k u^k + v \cdot \sum k \alpha_k u^{-1} \right\} \\ &= \varphi(u) \quad + \varepsilon \left\{ \psi(u) + v \cdot \frac{d}{du} \varphi(u) \right\} \end{aligned}$$

wobei $\varphi(u) = \sum \alpha_k u^k$ und $\psi(u) = \sum \alpha'_k u^k$ gesetzt ist, wodurch $w' = f(w)$ als synektische Funktion von $w$ im früheren Sinne nachgewiesen ist — die Konvergenz der Potenzreihen für $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ natürlich vorausgesetzt.

Auf dem Zahlenkegel wird durch eine synektische Funktion eine Transformation des Kegels in sich hervorgerufen, welche die Punkte einer Kegelerzeugenden wieder in die Punkte einer Erzeugenden [1]) überführt, denn aus $u = \text{konst.}$ folgt nach (32) $u' = \text{konst.}$

Man kann eine derartige Transformation dadurch festlegen, daß man für die Punkte einer analytischen Kurve auf dem Kegel die entsprechenden transformierten Punkte angibt, wobei die Zuordnungsart der Punkte durch analytische Funktionen vermittelt sein muß. Nach (32) bestimmen sich dann nämlich aus der angegebenen Zuordnung die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$.

Im folgenden wird insbesondere Gebrauch gemacht werden von synektischen Funktionen, welche den gewöhnlichen Funktionen der Analysis $\sin w$, $\cos w$, etc., etc., $e^w$, $l(w)$ etc. bei Zulassung dualer Werte des Arguments $w$ entsprechen. Man hat sich diese Funktionen durch die zugehörigen Potenzreihen definiert zu denken, so daß z. B. $\sin w = \sin(u + v\varepsilon) = \sin u + \varepsilon v \cos u$ ist u. s. f. (Vgl. E. Study, Geom. d. Dyn., § 23.)

## § 7. Stereographische Projektion.

Eine besonders einfache Art der Abbildung der dualen Zahlen auf die Punkte eines Kegels zweiter Ordnung erhält man durch folgendes Verfahren:

Man deute die Koeffizienten $u$ und $v$ einer dualen Zahl $w = u + v\varepsilon$ als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten eines Punktes in einer Ebene, beschreibe um die $v$-Achse ($u = 0$) des Koordinatensystems einen Umdrehungszylinder von beliebigem Radius, etwa 1, bestimme auf der Zylinderfläche einen von den beiden Punkten, welche sich auf die angenommene $uv$-Ebene in den Koordinatenursprung $O(u = 0,\ v = 0)$ rechtwinklig projizieren,

[1]) Die beiden Erzeugenden werden durch die Transformation perspektiv auf einander bezogen.

Digitized by Google

und bezeichne ihn mit $p_\infty$. Der Punkt mit den Koordinaten $u, v$ in der angenommenen Ebene wird dann zentral aus dem Punkte $p_\infty$ auf die Zylinderfläche in einen Punkt $p$ projiziert und dieser kann dann als Bildpunkt $(w)$ der dualen Zahl $w = u + v\varepsilon$ angesehen werden.

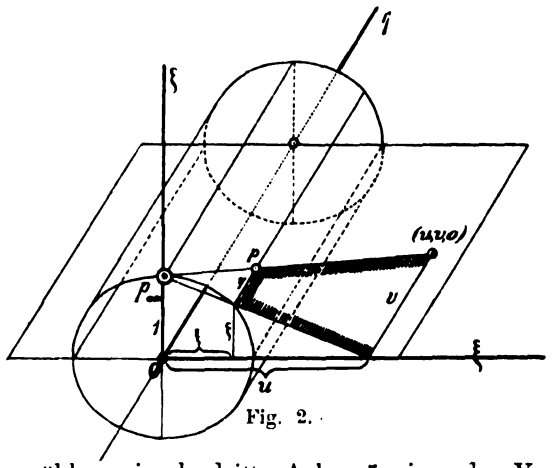


Fig. 2.

$Op_\infty$ wählen wir als dritte Achse $\zeta$ eines das Vorige ergänzenden orthogonalen räumlichen Koordinatensystems $(\xi, \eta, \zeta)$, dessen $\xi$- und $\eta$-Achse mit den Achsen $u, v$ zusammenfallen, so daß die Gleichung des Zylinders lautet

$$\xi^2 + \zeta^2 = 1.$$

Für die Koordinaten $\xi\eta\zeta$ des Punktes $p = (w)$ findet man durch Rechnung die Proportion

$$\left\{\begin{matrix} \eta : (1-\zeta) : (1+\zeta) : \xi \\ = v : \quad 1 \quad : \quad u^2 \quad : u \end{matrix}\right\}.$$

Man kann nun vier zu $\eta$, $1-\zeta$, $1+\zeta$, $\xi$ proportionale Größen als homogene projektive Koordinaten

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

des Punktes $p = (w)$ ansehen. Die Zuordnung zwischen der dualen Zahl $w = u + v\varepsilon$ und dem zugehörigen Bildpunkte $p = (w)$ des Zylinders wird also durch die Proportion

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = v : 1 : u^2 : u \tag{3}$$

vermittelt, womit dargetan ist, daß die vorliegende Abbildung ein — metrisch spezialisierter — besonderer Fall der in § 1 behandelten allgemeinen Abbildung ist.

Digitized by Google

Die vorliegende Abbildung ist vollkommen analog der Riemannschen Abbildung der gewöhnlichen komplexen Zahlen auf die Zahlenkugel vermittels der stereographischen Projektion.

## II. Abbildung der dualen Zahlen auf die Minimalebenen des Euklidischen Raumes und damit auf die „Speere" desselben.

### § 8. Prinzip der Abbildung.

Nach dem Prinzip der Reziprozität kann man von der im I. Abschnitt gegebenen Abbildung der dualen Zahlen auf die Punkte eines Kegels zweiter Ordnung übergehen zu einer ganz analogen Abbildung dieser Zahlen auf die Tangentialebenen einer Kurve zweiter Klasse, eines Kegelschnittes. Als letzteren kann man insbesondere den unendlich fernen Kugelkreis, den absoluten Kreis der Euklidischen Geometrie, annehmen und gelangt so zu einer Abbildung der dualen Zahlen auf die Mannigfaltigkeit der „Minimalebenen" des Euklidischen Raumes, von denen jede in bekannter Weise durch ihre mit Durchlaufungssinn versehene reelle Trägergerade, also durch einen „Speer", [1]) dargestellt werden kann.

Wir legen nun diese Abbildung in bestimmter Weise fest. Wir wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprunge $O$, den Achsen $x$, $y$, $z$ und bezeichnen die Koordinaten einer Ebene $P$ in demselben mit $T$, $U$, $V$, $W$. [2]) Nach Analogie von (3) kann man dann der dualen Zahl $w = u + v\varepsilon$ jene Ebene als Bild zuweisen, deren Koordinaten bestimmt sind durch die Proportion

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l}(-T):(V+iU):(V-iU):(-iW) = v:1:u^2:u \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=\sqrt{-1}\end{array}\right\}$$

denn die links vom Gleichheitszeichen stehenden Größen selbst — oder besser irgend welche zu denselben proportionale Größen können als homogene projektive Koordinaten der Ebene $P$ angesehen werden, wodurch die Analogie mit (3) zu Tage tritt. Die Proportion (34) kann ersetzt werden durch die folgende:

$$(35)\qquad T:U:V:W = -v:i\frac{u^2-1}{2}:\frac{u^2+1}{2}:iu.$$

---

[1]) Vgl. E. Study: „Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie" im Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, 1902, S. 319.

[2]) $-\frac{T}{U}$, $-\frac{T}{V}$, $-\frac{T}{W}$ sind die Abschnitte dieser Ebene auf den Koordinatenachsen.

Digitized by Google

Die nach (35) zu den verschiedenen dualen Zahlen gehörigen Ebenen $P(T, U, V, W)$ genügen der Gleichung

$$U^2 + V^2 + W^2 = 0, \tag{36}$$

sind also Minimalebenen. Die Mannigfaltigkeit aller Minimalebenen erscheint durch (35) umkehrbar eindeutig und stetig auf das nach § 2 abgeschlossene Kontinuum der dualen Zahlen bezogen.

Wir behandeln nun die Aufgabe, zu irgend einer gegebenen dualen Zahl $w = u + v\varepsilon$ die zugehörige Bildebene $P$ zu konstruieren, d. h. den zugehörigen Speer zu finden. Die Richtung des letzteren Speeres hängt nur von $u$ ab und kann durch folgende Konstruktion gefunden werden. Sei

$$u = u' + iu'', \quad (i = \sqrt{-1}),$$

wobei $u'$ und $u''$ gewöhnliche reelle Zahlen bedeuten; man bestimme in der $xy$-Ebene ($z = 0$) des rechtwinkligen Koordinatensystems den Punkt $(u', u'', 0)$ und projiziere ihn stereographisch aus dem Punkte $S_0\,(0, 0, -1)$ auf die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nach $M\,(\xi, \eta, \zeta)$. Der zum letzteren Kugelpunkte gehörige Radius $OM$ stellt dann die Richtung des gesuchten Speeres dar.

Beweis: Man findet für die Koordinaten des Punktes $M$ die Ausdrücke

$$M\left(\xi = \frac{2u'}{1 + u'^2 + u''^2};\ \eta = \frac{2u''}{1 + u'^2 + u''^2},\ \zeta = \frac{1 - u'^2 - u''^2}{1 + u'^2 + u''^2}\right) \tag{37}$$

und überzeugt sich durch Rechnung von der Gültigkeit der Gleichung

$$\xi\left(i\frac{u^2 - 1}{2}\right) + \eta\left(\frac{u^2 + 1}{2}\right) + \zeta(iu) = 0, \tag{38}$$

woraus mit Rücksicht auf (35) folgt:

$$\xi U + \eta V + \zeta W = 0;$$

d. h. die reelle Richtung $OM$ gehört der Minimalebene $P(T, U, V, W)$ an und gibt also die Richtung des zu $P$ gehörigen Speeres.[1])

Wenn der vektorielle Bestandteil $v$ einer dualen Zahl $w = u + v\varepsilon$ gleich Null ist, also $w$ sich auf $u$ reduziert, so geht nach (35) die zugehörige Minimalebene $P$, mithin auch der zugehörige Speer durch den Ursprung $O$. Der genannte Speer ist also vollständig bestimmt, da seine Richtung eben angegeben wurde, und wird durch $OM$ selbst dargestellt.

Wenn der skalare Teil $u$ von $w$ gleich Null ist, so ist nach (35) die zugehörige Minimalebene parallel zur $z$-Achse und schneidet auf der $x$- und $y$-Achse die Stücke $2iv$ und $2v$ ab. Sei

$$v = v' + iv'',$$

[1]) Der zu $OM$ entgegengesetzte Radius $OM'$ gibt die Richtung des Speeres an, welcher zu der Minimalebene $\bar{P}$ gehört, die zu $P$ konjugiert-imaginär ist.

Digitized by Google

so durchstößt der Speer dieser Ebene die $xy$-Ebene in dem Punkte $(-2v', 2v', 0)$ und hat die Richtung der positiven $z$-Achse, wie die Konstruktion von $OM$ im vorliegenden Falle lehrt.

Nun bestimmen wir zu einer allgemeinen endlichen dualen Zahl $w = u + v\varepsilon$ ($u \neq 0$, $v \neq 0$) von endlicher Größe die zugehörige Minimalebene und damit deren Speer. Man kann $w$ in der Form ansetzen

$$w = u[1 + \varepsilon i(f' + if'')],$$

so daß

$$v = ui \quad . \quad (f' + if'')$$

wird; nach (35) schneidet die zu $w$ gehörige Minimalebene auf der $z$-Achse das Stück $(f' + if'') = -\frac{v}{u}i$ ab. Den zugehörigen Speer findet man in folgender Weise: Man konstruiere zunächst nach dem Obigen den Kugelradius $OM$, welcher die Richtung des gesuchten Speeres angibt, verschiebe diesen parallel zur $z$-Achse um das Stück $f''$ nach $O_1M_1$ und drehe sodann $O_1M_1$ um die Achse $OM$ um einen rechten Winkel im positiven Sinne nach $O_2M_2$, wobei als positiver Sinn jener Sinn anzusehen ist, welcher mit jenem der Drehung von $Ox$ nach $Oy$ bezüglich der Achse $Oz$ übereinstimmt. Endlich verschiebe man $O_2M_2$ um das Stück $f'$ parallel zur $z$-Achse nach $O'M'$. $O'M'$ stellt dann den gesuchten Speer dar.

Der dualen Zahl $\infty$ entspricht nach (35) eine Minimalebene, deren Speer durch die negative $z$-Achse gegeben wird.

Den dualen unendlich großen Zahlen von der Form $hJ$ entsprechen Minimalebenen, deren Speere der negativen $z$-Achse parallel sind.

Der dualen unendlich großen Zahl $\omega$ entspricht die unendlich ferne Ebene.

## § 9. Die durch eine gebrochen-lineare Substitution von $w$ dargestellte Transformation der Minimalebenen.

Eine gebrochen-lineare Substitution der dualen Veränderlichen $w$ [vgl. (5)] kann man sich auch durch eine Gleichung von der Form

$$(39)\quad \mathfrak{a}_0(w' - w) + \mathfrak{a}_1 . i(ww' - 1) + \mathfrak{a}_2(ww' + 1) + \mathfrak{a}_3 . i(w + w') = 0$$

dargestellt denken, wobei die

$$(40)\quad \mathfrak{a}_k = \alpha_k + \beta_k\varepsilon \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

endliche duale reelle oder imaginäre Zahlen sind. Die Gleichung (39) ist nämlich äquivalent mit

$$(41)\quad w' = \frac{(\mathfrak{a}_0 - \mathfrak{a}_3 i)w + (\mathfrak{a}_1 i - \mathfrak{a}_2)}{(\mathfrak{a}_1 i + \mathfrak{a}_2)w + (\mathfrak{a}_3 i + \mathfrak{a}_0)},$$

Digitized by Google

einer Gleichung, welche die Form hat

$$w' = \frac{a\,w + b}{c\,w + d}, \tag{5}$$

wobei die Koeffizienten $a, b, c, d$ gegeben sind durch

$$\left\{\begin{array}{ll} a = \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{a}_3\, i, & b = \mathfrak{a}_1\, i - \mathfrak{a}_2 \\ c = \mathfrak{a}_1\, i + \mathfrak{a}_2, & d = \mathfrak{a}_3\, i + \mathfrak{a}_0 \end{array}\right\} \tag{42}$$

oder die $\mathfrak{a}_k$ durch

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{a}_0 = \frac{1}{2}(a+d), & \mathfrak{a}_1 = -\frac{i}{2}(b+c) \\ \mathfrak{a}_2 = \frac{1}{2}(c-b), & \mathfrak{a}_3 = \frac{i}{2}(a-d) \end{array}\right\}. \tag{42'}$$

Der in (6) mit $D$ bezeichnete skalare Teil der Substitutionsdeterminante von (5) hat hier den Wert

$$D = \mathfrak{a}_0^2 + \mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{a}_3^2 \cdot \tag{43}$$

Den gebrochen-linearen Substitutionen, für welche $D \neq 0$ ist, entsprechen nicht-ausgeartete kollineare Transformationen in der Mannigfaltigkeit der Minimalebenen. Eine zu der im I. Abschnitt (§ 3) angestellte analoge Rechnung liefert für die zu (39) gehörige Kollineation die folgende Darstellung in den Ebenenkoordinaten $T, U, V, W$

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho\, T' = a_{00}\, T + a_{01}\, U + a_{02}\, V + a_{03}\, W \\ \varrho\, U' = \quad\; a_{11}\, U + a_{12}\, V + a_{13}\, W \\ \varrho\, V' = \quad\; a_{21}\, U + a_{22}\, V + a_{23}\, W \\ \varrho\, W' = \quad\; a_{31}\, U + a_{32}\, V + a_{33}\, W \end{array}\right\}, \tag{44}$$

wobei die Koeffizienten $a_{jk}$ bestimmt sind durch

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{00} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 & & & \\ a_{11} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 & a_{23} = 2(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_0\alpha_1) & a_{32} = 2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\alpha_1) & \\ a_{22} = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 & a_{31} = 2(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2) & a_{13} = 2(\alpha_3\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2) & \\ a_{33} = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 & a_{12} = 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_3) & a_{21} = 2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3) & \\ & a_{01} = 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0) & & \\ & a_{02} = 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0) & & \\ & a_{03} = 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0) & & \end{array}\right\}. \tag{45}$$

Digitized by Google

Die Gleichungen (44), (45) sind nun vollkommen identisch mit der von Herrn E. Study in der „Geom. d. Dyn.“, § 21, S. 174 etc. aufgestellten Parameterdarstellung der Bewegungen des Euklidischen Raumes durch die dortigen Gleichungen (3), S. 175, und (10), (11), S. 176. Die zitierten Gleichungen erscheinen zwar dort an die Bedingung $\sum_0^3 \alpha_k \beta_k = 0$ geknüpft; diese Bedingung wird aber im § 25, S. 120 etc. des angeführten Werkes als unwesentlich dargetan.

Die durch (39) dargestellten Transformationen erweisen sich sonach als identisch mit den Bewegungen im Euklidischen Raume, und zwar entsprechen den reellen Werten der Parameter $\alpha_k$, $\beta_k$ die reellen Bewegungen. Die von den Bewegungen gebildete sechsgliedrige Gruppe entspricht genau der Gruppe $G_6$ von Transformationen des Zahlenkegels im I. Abschnitte. Die $\alpha_k$ (40) sollen als homogene duale Koordinaten der Bewegung (39) bezw. (44) bezeichnet werden.

Den Transformationen der Gruppe $A$ des I. Abschnittes (20), welche in dualen Zahlen durch die Operation (21) $\mathfrak{A}_\lambda(w) = \mathfrak{A}_\lambda(u + v\varepsilon) = u + \lambda v \varepsilon$ ausgedrückt wird, entsprechen hier die Ähnlichkeitstransformationen vom Ursprung aus.

$$\left.\begin{array}{l} \rho\, T' = \lambda T \\ \rho\, U' = \quad U \\ \rho\, V' = \quad\quad V \\ \rho\, W' = \quad\quad\quad W \end{array}\right\}. \tag{46}$$

Die allgemeine Transformation $w' = \mathfrak{A}_\lambda\left(\frac{aw+b}{cw+d}\right)$ (Gl. 23) stellt die genau zu $G_7$ analoge Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen des Euklidischen Raumes dar.

Wir beziehen uns im folgenden wie schon oben auf Resultate aus dem oben zitierten grundlegenden Werke von E. Study. Zwar würden die vorausgehenden Darlegungen die Mittel an die Hand geben, diese Resultate in einfacher Weise selbständig herzuleiten, doch soll im Interesse der Kürze der Darstellung hierauf verzichtet werden.

## § 10. Der Zusammenhang zwischen den Plückerschen Koordinaten einer reellen Geraden und den dualen Zahlen, welche zu den Speeren dieser Geraden gehören.

Sei $l$ eine reelle, im endlichen gelegene Gerade mit den als reell angenommenen Plückerschen Koordinaten

$$X_{01}, X_{02}, X_{03}, X_{23}, X_{31}, X_{12}$$

(von denen die ersten drei nicht sämtlich Null sind).

Digitized by Google

Nach E. Study, „Geom. d. Dyn.“, § 23, S. 200 etc., sind die „Strahlenkoordinaten“ von $l$, $X_1$, $X_2$, $X_3$ definiert durch

$$(47)\quad \{\rho X_1 = X_{01} + X_{23}\varepsilon,\ \rho X_2 = X_{02} + X_{31}\varepsilon,\ \rho X_3 = X_{03} + X_{12}\varepsilon\},$$

wobei $\rho = \sigma + \tau\varepsilon$ $(\sigma \neq 0)$ ein dualer Proportionalitätsfaktor ist. $\sigma$ und $\tau$ sollen hier als gewöhnliche reelle Zahlen angenommen werden.

Eine reelle Bewegung mit der Schraubungsachse $l$ kann man sich durch die vier homogenen $a_k$ (40) dargestellt denken, deren drei letzte $a_1\ a_2\ a_3$ zu den in (47) auftretenden Größen $X_1$, $X_2$, $X_3$ proportional sind. (Vgl. Study, „Geom. d. Dyn.“, § 25.) Bei einer solchen Bewegung bleiben die durch $l$ gehenden Minimalebenen fest; die zu ihnen gehörigen dualen Zahlen können mithin aus (39) gefunden werden, indem man daselbst $w' = w$ setzt, statt $a_1$, $a_2$, $a_3$ bezw. $X_1$, $X_2$, $X_3$ schreibt, und die sich ergebende quadratische Gleichung nach $w$ auflöst. Man findet

$$(48)\qquad X_1 . i(w^2 - 1) + X_2 . (w^2 + 1) + X_3 . (2wi) = 0.$$

Die beiden Wurzeln[1]) dieser Gleichung, $w$ und $w^*$, sind jene dualen Zahlen, welche den durch $l$ gehenden Minimalebenen zugehören. Die Auflösung liefert:

$$(49)\quad w \text{ (bezw. } w^*) = \frac{X_1 + iX_2}{X_3 \pm \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}} = -\frac{X_3 \mp \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}}{X_1 - iX_2},$$

wobei das Ziehen der Quadratwurzel erfolgt nach der Formel:

$$\sqrt{m + n\varepsilon} = \sqrt{m}\sqrt{1 + \frac{n}{m}\varepsilon} = \sqrt{m}\left(1 + \frac{n}{2m}\varepsilon\right).$$

In (49) sind die Größen $X_1$, $X_2$, $X_3$ nach ihrer Definition frei von $i$; aus diesem Umstande kann eine wichtige Beziehung zwischen den Wurzeln $w$ und $w^*$ gefolgert werden.

Sei

$$(50)\quad w = \mathfrak{u}' + i\mathfrak{u}'', \text{ wobei } \mathfrak{u}' = u' + v'\varepsilon \text{ und } \mathfrak{u}'' = u'' + v''\varepsilon,$$

---

[1]) Die Existenz dieser Wurzeln ist eben durch den Umstand gewährleistet, daß durch $l$ zwei Minimalebenen gehen. Allerdings erfordert der Fall, daß die Gerade $l$ zur $z$-Achse parallel ist, eine besondere Besprechung. In diesem Falle verschwinden die skalaren Teile von $X_1$ und $X_2$ und Formel (49) liefert nur eine endliche Wurzel $w_1 = \frac{X_1 + iX_2}{2X_3} = c_1\varepsilon$. Die durch $l$ gehenden Minimalebenen entsprechen dann, wie ein Grenzübergang mit Rücksicht auf (51) lehrt, die dualen Zahlen $w_1$ und $w_2 = -\frac{1}{w_1}$, von denen die erstere nach obigem einen verschwindenden skalaren Bestandteil hat, die letztere also unendlich groß ist. Die letztere Zahl ist als zweite Wurzel von (48) im vorliegenden Falle anzusehen.

Digitized by Google

so daß also u' und u'' von $i$ frei, also „reell dual" sind;[1]) und

$$\overline{w} = \mathfrak{u}' - i\,\mathfrak{u}''. \tag{50'}$$

Die andere Wurzel $w^*$ ist dann gegeben durch:

$$w^* = -\frac{1}{\mathfrak{u}' - i\,\mathfrak{u}''} = -\frac{1}{\overline{w}}. \tag{51}$$

Im vorstehenden ist die Lösung der Aufgabe enthalten, zu irgend einer reellen Geraden $l$, welche durch ihre Plückerschen Linien- bezw. Studyschen Strahlenkoordinaten gegeben ist, jene beiden dualen Zahlen zu finden, welche zu den durch $l$ gehenden Minimalebenen gehören.

Wir wenden uns nun zu der umgekehrten Aufgabe, zu einer gegebenen dualen Zahl $w = \mathfrak{u}' + i\,\mathfrak{u}''$ (50) die reelle Trägergerade der zugehörigen Minimalebene — oder was auf dasselbe hinauskommt — die Trägergerade des zu $w$ gehörigen Speeres analytisch zu bestimmen, d. h. durch ihre Koordinaten darzustellen.

Nach (51) bestimmt sich aus der Zahl $w$ jene andere $w^*$, deren Speer zur selben Geraden wie $w$ gehört, aber entgegengesetzten Sinn hat. Man kann dann die quadratische Gleichung aufstellen, von welcher $w$ und $w^*$ die Wurzeln sind, und diese Gleichung auf die Form (48) bringen; die entsprechenden Koeffizienten der letzteren liefern dann die Strahlenkoordinaten $X_1, X_2, X_3$ der gesuchten Trägergeraden. Schneller noch führt der folgende Weg zum Ziel: Man setze in (49) $w = \mathfrak{u}' + i\,\mathfrak{u}''$ ein; durch Trennung des Reellen und Imaginären gewinnt man so die Gleichungen:

$$\mathfrak{u}' = \frac{X_1}{X_3 \pm \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}}, \quad \mathfrak{u}'' = \frac{X_2}{X_3 \pm \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}}, \tag{49'}$$

aus welchen die Verhältnisse $X_1 : X_2 : X_3$ berechnet werden können. Es ergibt sich, wenn unter $\rho'$ ein Proportionalitätsfaktor verstanden wird, der als reell-dual, d. h. frei von $i$ angenommen werden soll:

$$\rho' X_1 = 2\,\mathfrak{u}' \quad \rho' X_2 = 2\,\mathfrak{u}'' \quad \rho' X_3 = 1 - \mathfrak{u}'^2 - \mathfrak{u}''^2 \tag{52}$$

als Darstellung für die Strahlenkoordinaten der gesuchten Geraden. [Um aus diesen die Plückerschen Linienkoordinaten zu erhalten, müßte man (vgl. hiezu Study, „Geom. d. Dyn.", § 23, S. 200) die gefundenen Werte $X_1, X_2, X_3$ in (47) einsetzen und den dort auftretenden dualen Proportionalitätsfaktor $\rho$ so bestimmen, daß die aus (47) sich ergebenden $X_{ik}$ der Plückerschen Relation $X_{01}X_{23} + X_{02}X_{31} + X_{03}X_{31} = 0$ genügen. Die so berechneten $X_{ik}$ sind dann die gesuchten Plückerschen Linienkoordinaten.]

[1]) Über die Anhängigkeit der Größen u' und u'' von $X_1, X_2, X_3$ sind die Formeln (49') (siehe unten) zu vergleichen.

Digitized by Google

Die Formeln (52) sind zunächst nur un
abgeleitet, daß $w$ eine endliche duale Zahl mit r
skalaren Bestandteil ist. Durch eine Grenzl
Allgemeingültigkeit dieser Formeln leicht dar

## § 11. Abbildung der Speere auf die „dualen

Aus (52) folgt:

$$\pm \rho' \sqrt{X^2+X^2+X^2} = 1+\mathfrak{u}'^2$$

wobei das Vorzeichen links in Übereinstimmu
der Wurzel in (49′) zu nehmen ist.

Führt man für diese in (49′) und (49)
wurzel die Bezeichnung ein:

$$\pm \sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2} = X_0 \tag{53}$$

so wird also

$$\rho' X_0 = 1+\mathfrak{u}'^2+\mathfrak{u}''^2. \tag{54}$$

Die vier Größen $X_0, X_1, X_2, X_3$ stehen

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2 = X_0^2 \tag{55}$$

und hängen mit $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{u}''$ rational zusammen
meln (52) und (54), deren Auflösung nach $\mathfrak{u}$
Wesen identischen Gleichungen liefert:

$$\mathfrak{u}' = \frac{X_1}{X_3+X_0}, \quad \mathfrak{u}'' = \frac{X_2}{X_3+} \tag{56}$$

Die vier dualen Größen $X_0, X_1, X_2, X_3$
Koordinaten eines „dualen Punktes“ aufgefaß
die gewöhnlichen Kartesischen Koordinaten d
auf das Koordinatensystem $Oxyz$ durch die Ver
angegeben werden. Zu jeder dualen Zah
mithin auch zu jedem Speere $(w)$
Weise [nach (52) und (54)] ein „dualer
punkt; alle diese Punkte sind nach
Kugel (um $O$ mit dem Radius 1) liegen
„Bildkugel“, wie wir sie nennen wollen. De
Zahl $w$ gehört, liegt auf einer Geraden, deren
koordinaten $X_1, X_2, X_3$ sind; und die Richtu
durch Adjunktion der Wurzel in (53), d. i.
Art der Darstellung eines Speeres ist diejenige
in dem mehrfach zitierten Werke zu Grunde l
§ 23). Dortselbst wird gezeigt, daß die me

Digitized by Google

zwischen Speeren identisch sind mit den metrischen Beziehungen zwischen den „dualen Punkten" einer Kugel: Bei entsprechender Definition des dualen Winkels zweier Speere wird erreicht, daß dieser Winkel übereinstimmt mit dem (durch die gewöhnlichen analytischen Formeln zu definierenden) Winkel, welchen die zugehörigen „dualen Punkte" auf der Kugel bestimmen. Da die Identitäten, auf welche die analytische Behandlung der sphärischen Trigonometrie sich gründet, ihre Geltung nicht verlieren, wenn die in ihnen auftretenden Größen als duale Zahlen angenommen werden, so läßt sich die sphärische Trigonometrie ohneweiters übertragen auf sphärische Dreiecke, deren Ecken „duale Punkte" sind und mithin weiter auf Speertripel, da ja für diese nach obigem dieselbe Metrik gilt wie für sphärische Dreiecke der letztgenannten Art.

Da der Begriff des dualen Winkels hier im nachstehenden benützt werden soll, wird es wohl am Platze sein, an die Definition desselben kurz zu erinnern. Seien $l$ und $m$ zwei Speere, $t$ einer der beiden Speere, die auf der kürzesten Transversalen von $l$ und $m$ liegen; $\vartheta$ der Winkel, um den man $l$ im positiven Sinne um $t$ drehen muß, $\vartheta_1$ die Strecke, um die man $l$ im positiven Sinne längs $t$ verschieben muß, wenn man $l$ mit $m$ zur Deckung bringen will; $\Theta = \vartheta + \vartheta_1 \varepsilon$ wird dann als der duale Winkel der Speere $l$ und $m$ bezeichnet. Dieser Winkel $\Theta = \sphericalangle lm$ ist hiernach modulo $2\pi$ bestimmt, wenn auf der kürzesten Transversalen von $l$ und $m$ die Richtung von $t$ fixiert ist; läßt man letztere Richtung unbestimmt, so bleibt das Vorzeichen von $\Theta$ unbestimmt, d. h. man kann $\Theta$ ebensowohl als $(-\Theta)$ als den Wert des Winkels $\sphericalangle(l, m)$ betrachten.

Je zwei Speere eines Tripels von Speeren $(l, m, n)$ bestimmen — nach erfolgter Festsetzung des Richtungssinnes der kürzesten Transversalen $\overline{l}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$ zwischen $m$ und $n$, $n$ und $l$, $l$ und $m$ — nach dem Obigen einen dualen Winkel; diese drei Winkel[1]) wollen wir die „Winkel" des Tripels nennen. Ist $\overline{\overline{m}}$ der zu $\overline{m}$ entgegengesetzte Speer, so soll der duale Winkel $\sphericalangle \overline{n}\,\overline{\overline{m}}$ als der „Beiwinkel" $\sphericalangle l = \sphericalangle mln$ des Tripels $(l, m, n)$ bezeichnet werden, und analog sind die Beiwinkel $\sphericalangle m$ und $\sphericalangle n$ zu definieren[2]). Die Winkel und Beiwinkel eines Speertripels sind vollkommen analog den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks und hängen durch dieselben Gleichungen wie diese miteinander zusammen. (Vgl. Study, „Geom. d. Dyn.", § 24, S. 209, 210.)

Die oben entwickelte Abbildung der Speere $(w)$ auf die „dualen Punkte" einer Kugel kann man sich durch eine stereo-

[1]) $\sphericalangle lm$, $\sphericalangle mn$ und $\sphericalangle nl$.

[2]) Die betreffenden Definitionen ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Buchstaben $l, m, n$; bei der Definition von $\sphericalangle l$ ist die Richtung der kürzesten Transversalen von $\overline{n}$ und $\overline{\overline{m}}$ durch den Speer $l$ selbst fixiert zu denken.



Digitized by Google

graphische Projektion hergestellt denken: Ist $w = \mathfrak{u}' + i\mathfrak{u}''$,[1]) so projiziere man den „dualen Punkt“ $(x = \mathfrak{u}', y = \mathfrak{u}'', z = 0)$ aus dem Punkte $(x = 0, y = 0, z = -1)$ (stereographisch) auf die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, d. i. auf die durch (55) dargestellte Kugel. Der so erhaltene „duale Punkt“ hat, wie eine einfache Rechnung ergibt, gerade die nach (52) und (54) definierten Größen $X_0, X_1, X_2, X_3$ zu homogenen Koordinaten, ist also der zu $(w)$ gehörige „duale Punkt“ der obigen Kugel.

Eine gebrochen-lineare Transformation

$$w' = \frac{a w + b}{c w + d}, \tag{5}$$

wobei $a = a_1 + i a_2$ sein möge etc. und $a_1, a_2$ etc. reell-duale Zahlen vorstellen, bewirkt eine Transformation der zu $w$ gehörigen Größen $X_0, X_1, X_2, X_3$ in die entsprechenden Größen $X_0', X_1', X_2', X_3'$; und zwar drücken sich die letzteren als homogene lineare Funktionen der ersteren mit reell-dualen, d. i. von $i$ freien Koeffizienten aus; auf der Kugel stellt also obige Transformation eine reell-duale Kollineation dar. Daß dem so ist, leuchtet zunächst in dem besonderen Falle, daß $\mathfrak{u}', \mathfrak{u}'', a_1, a_2, b_1, b_2 \ldots$ keine vektoriellen Bestandteile haben, unmittelbar ein: obige Kollineation ist in diesem Falle eine gewöhnliche reelle Kollineation, welche durch ein Gleichungssystem mit gewöhnlichen, reellen Zahlen als Koeffizienten dargestellt wird, wobei diese Koeffizienten ganze rationale reelle Funktionen der $a_1, a_2, b_1, b_2 \ldots$ sind. Läßt man nun reell-duale Werte von $\mathfrak{u}', \mathfrak{u}'', a_1, a_2, b_1, b_2 \ldots$ zu, deren vektorielle Bestandteile nicht verschwinden, so werden die Koeffizienten reell-duale Werte annehmen, an der Form der Gleichungen aber, welche die $X_i'$ durch die $X_i$ ausdrücken, wird nichts geändert.[2]) Die Abbildung der Speere $(w)$ auf die dualen Punkte der betrachteten Kugel ist im gewissen Sinne ein ergänzendes Gegenstück zur Abbildung der Speere auf die Tangentialebenen des absoluten Kreises, welche hier der Ausgangspunkt unserer Betrachtungen über Speere gewesen ist. Beide Abbildungsprinzipe erscheinen verknüpft mittels der dualen Zahlen $w$, wobei das einemal die Zerlegung $w = u + v\varepsilon$, das anderemal die Zerlegung $w = \mathfrak{u}' + i\mathfrak{u}''$ bevorzugt wird.

Anmerkung: Außer jenen Kollineationen der Bildkugel, welche einer gebrochen-linearen Substitution entsprechen: $w' = \frac{a w + b}{c w + d}$, gibt es noch eine andere Schar von reell-dualen Kollineationen, welche durch $w' = \frac{a \bar{w} + b}{c w + d}$ dargestellt wird,

[1]) Vgl. (50).

[2]) Die angewendete Schlußweise entspricht dem Übertragungsprinzip von E. Study („Geom. d. Dyn.“, § 25).

Digitized by Google

wenn $\overline{w} = u' - iu''$ die zu $w$ konjugiert imaginäre duale Zahl ist. Die letztere Schar ist als Erweiterung der sogenannten indirekten Kreisverwandtschaften der Bildkugel in das duale Gebiet aufzufassen, ebenso wie die zu $w' = \frac{aw+b}{cw+d}$ gehörige Gruppe von Kollineationen der Bildkugel in sich als Erweiterung der Gruppe der direkten Kreisverwandtschaften in das duale Gebiet. Die reell-dualen Kollineationen der Bildkugel können sonach als direkte bezw. indirekte reell-duale Kreisverwandtschaften auf der Bildkugel bezeichnet werden. Die zu $w' = \frac{a\overline{w}+b}{c\overline{w}+d}$ gehörige Transformation der Minimalebenen ist eine „antikollineare" Transformation nach der Benennung von Herrn Segre.[1])

## § 12. Festlegung eines Speeres durch zwei duale Winkel.

Sei $s$ irgend ein Speer, $w$ die zugehörige duale Zahl. Der Speer $s$ bildet mit den Speeren der negativen $y$-Achse: $Oy'$ und der positiven $z$-Achse $Oz$ ein Speertripel[2]). Der zu $Oz$ gehörige Beiwinkel dieses Tripels sei $\Phi = \varphi + \zeta\varepsilon$, der Winkel von $s$ mit $Oz$ sei $\Theta = \vartheta + \rho\varepsilon$; dabei sollen diese dualen Winkel so gewählt sein,[3]) daß $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$. Sei $t$ ein Speer auf der kürzesten Transversalen von $Oz$ und $s$ derart, daß die Drehung von $Oz$ in die Richtung von $s$ (auf dem kürzesten Wege) positiven Drehungssinn besitzt, wenn man diese Drehung von jener Seite betrachtet, nach welcher $t$ weist; durch dieselbe Konstruktion, durch welche aus $Oz$ und $s$ der Speer $t$ sich ergibt, geht aus $Oz$ und $Oy'$ der Speer $Ox$ hervor. Nach der Definition der dualen Winkel $\Phi = \varphi + \zeta\varepsilon$ und $\Theta = \vartheta + \rho\varepsilon$ kann $t$ dadurch erhalten werden, daß man den Speer $Ox$ um die Achse $Oz$ im positiven Sinne um den Winkel $\varphi$ dreht und sodann längs $Oz$ im positiven Sinne um die Größe $\zeta$ verschiebt; $s$ wird erhalten, indem man den Speer $Oz$ um die Achse $t$ im positiven Sinne um den Winkel $\vartheta$ dreht und sodann längs $t$ im positiven Sinne um die Größe $\rho$ verschiebt. Durch Angabe der dualen Winkel $\Theta$ und $\Phi$ ist in dieser Weise der Speer $s = (w)$ eindeutig bestimmt und leicht zu konstruieren.

Es drängt sich die Frage auf, wie denn die Winkel $\Theta$ und $\Phi$ mit der zum Speere $s = (w)$ gehörigen dualen Zahl $w$ zusammenhängen. In dem besonderen Falle, daß in $\Theta$ und $\Phi$ die vektoriellen Bestandteile verschwinden, also die genannten Winkel sich auf $\vartheta$ und $\varphi$ reduzieren, geht der Speer $s$ durch den Ursprung $O$ und die in § 8 angegebene Konstruktion

[1]) Vgl. etwa Mathematische Annalen, Jahrgang 1892.

[2]) Die Speere $l$, $m$, $n$ in § 11 sind im vorliegenden Falle $Oz$, $Oy'$, $s$. Den kürzesten Transversalen $\overline{n}$ und $\overline{m}$ in § 11 entsprechen hier die Speere $Ox$ und $t$ (siehe weiter unten).

[3]) $\Theta$ entspricht dem Winkel $\sphericalangle nl$ $\Phi$ dem Beiwinkel $\sphericalangle l$ in § 11.



Digitized by Google

des zu einer rein skalaren Größe gehörigen Speeres liefert die zu $s$ gehörige duale Zahl den rein skalaren Wert $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}e^{\varphi i}$. Nach dem mehrfach erwähnten Übertragungsprinzip ist zu erwarten, daß im allgemeinen Falle die zu $s$ gehörige duale Zahl $w$ durch die Formel:

$$w = \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}e^{\Phi i} \tag{57}$$

dargestellt wird. Diese Formel läßt sich leicht verifizieren, wie folgt: Man denke sich $v$ in der Form dargestellt

$$w = u[1 + \varepsilon i(f' + if'')]$$

und konstruiere nach § 8 den zugehörigen Speer $(w) = s$. Aus der Konstruktion ist leicht abzunehmen, daß die zu $s$ gehörigen Winkel $\Theta$ und $\Phi$ die Werte haben:

$$\Phi = \varphi + f'\varepsilon, \quad \Theta = \vartheta - f'' \sin\vartheta . \varepsilon .$$

Entwickelt man $\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}$ nach dem Taylorschen Satze, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta - (f''\sin\vartheta)\varepsilon}{2} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}(-f''\sin\vartheta)\varepsilon,$$

da die höheren Potenzen von $\varepsilon$ Null geben, und weiter:

$$\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} - f''\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\varepsilon = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}(1 - f''\varepsilon).$$

Analog findet man durch Anwendung des Taylorschen Satzes:

$$e^{\Phi i} = e^{(\varphi + f'\varepsilon)i} = e^{\varphi i} + e^{\varphi i} f'\varepsilon i = e^{\varphi i}(1 + f'\varepsilon i).$$

Hieraus weiter:

$$\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}e^{\Phi i} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}e^{\varphi i}(1 - f''\varepsilon)(1 + f'\varepsilon i) = u[1 + \varepsilon i(f' + if'')] = w,$$

was zu beweisen war.

Beim Beweise ist $w$ als endliche duale Zahl vorausgesetzt, deren skalarer Bestandteil von Null verschieden ist. Die Allgemeingültigkeit der Formel (57) ist durch einen Grenzübergang zu erweisen.

Unterwirft man einen Speer $s = (w)$ einer Schraubenbewegung um die $Z$-Achse, indem man ihn um $Oz$ im positiven Sinne um den Winkel $\gamma$ dreht und zugleich um die Größe $\gamma_1$ im positiven Sinne von $Oz$ verschiebt, so multipliziert sich die zugehörige duale Zahl $w$ nach (57) mit dem Faktor $e^{\Gamma i}$, wo $\Gamma = \gamma + \gamma_1\varepsilon$. Unterwirft man also zwei Speere $s = (w)$ und $s_1 = (w_1)$ einer solchen Schraubenbewegung, so bleibt das Verhältnis der zugehörigen dualen

Digitized by Google

Zahlen $\frac{w_1}{w} = q$ ungeändert. Umgekehrt, schraubt man den Speer $s = (w)$ irgendwie um $Oz$ als Achse, so bewegt sich der zur Zahl $qw = w_1$ gehörige Speer, wenn $q$ eine konstante (duale) Größe ist, in der Weise, daß er die Schraubung von $s$ um $Oz$ mitmacht, als wenn er mit $s$ starr verbunden wäre.

### § 13. Infinitesimale Speertripel.

Es mögen jetzt unter $\delta w_1^*$ und $\delta w_2^*$ zwei unendlich kleine duale Zahlen verstanden werden [1]); die zugehörigen Speere $s_1^*$ und $s_2^*$ sind von dem durch die positive $Z$-Achse dargestellten Speere, der mit $s_0^*$ bezeichnet sei, unendlich wenig verschieden und bilden mit diesem zusammen ein „infinitesimales" Speertripel $(s_0^*, s_1^*, s_2^*)$.

Die dualen Winkel $\Theta$ und $\Phi$ mögen für $s_1^*$ die Werte haben $\Theta_1, \Phi_1$; entsprechend für $s_2^*$ die Werte $\Theta_2, \Phi_2$. Die Größen $\Theta_1$ und $\Theta_2$ (nicht aber $\Phi_1$ und $\Phi_2$) sind dann jedenfalls unendlich klein und mit Rücksicht darauf folgt aus (57):

$$\delta w_1^* = \frac{\Theta_1}{2} e^{\Phi_1 i}, \quad \delta w_2^* = \frac{\Theta_2}{2} e^{\Phi_2 i},$$

also

$$\frac{\delta w_2^*}{\delta w_1^*} = \frac{\Theta_2}{\Theta_1} e^{(\Phi_2 - \Phi_1) i}$$

Ist $\frac{\delta w_2^*}{\delta w_1^*} = q$, so kann die duale Zahl $q$ in die Form gesetzt werden $q = Re^{\Phi i}$, wo $R$ und $\Phi$ reell-duale Größen, d. i. von $i$ frei sind; und zwar ist $R$ und $\Phi$ völlig bestimmt, wenn angenommen wird, daß der skalare Teil von $R$ nicht negativ, der skalare Teil von $\Phi$ nicht negativ und kleiner als $2\pi$ ist. Man hat: $Re^{\Phi i} = \frac{\Theta_2}{\Theta_1} e^{(\Phi_2 - \Phi_1) i}$, woraus sich ergibt: $\frac{\Theta_2}{\Theta_1} = R$, $\Phi_2 - \Phi_1 \equiv \Phi \pmod{2\pi}$. Nun ist $\Phi_2 - \Phi_1$ nichts anderes als der Beiwinkel $\measuredangle s_1^* s_0^* s_2^*$ des Tripels $(s_0^*, s_1^*, s_2^*)$; $\Theta_1$ und $\Theta_2$ sind die Winkel $\measuredangle s_0^* s_1^*$ und $\measuredangle s_2^* s_0^*$ dieses Tripels.[1]) Also hat man weiter: $\frac{\measuredangle s_2^* s_0^*}{\measuredangle s_0^* s_1^*} = R$, $\measuredangle s_1^* s_0^* s_2^* \equiv \Phi \pmod{2\pi}$. Durch den Quotienten $\frac{\delta w_2^*}{\delta w_1^*} = q$ ist also der zu $s_0^*$ gehörige Beiwinkel $\measuredangle s_1^* s_0^* s_2^*$ des betrachteten Speertripels und das Verhältnis der in $s_0^*$ zusamenstoßenden Winkel völlig bestimmt.

Sei nun $s_0 = (w_0)$ ein beliebiger Speer, $s_1 = (w_0 + \delta w_1)$ und $s_2 = (w_0 + \delta w_2)$ zwei unendlich wenig von ihm verschiedene Speere, [2])

[1]) Die skalaren Teile von $\delta w_1^*$, $\delta w_2^*$ und ebenso von $\delta w_1$, $\delta w_2$ werden als von Null verschieden vorausgesetzt.

[2]) Bei entsprechender Orientiernng der kürzesten Transversalen der Speere des Tripels.

Digitized by Google

welche also mit $s$ zusammen ein infinitesimales Speertripel allgemeiner Lage bilden. Letzteres Tripel $(s_0, s_1, s_2)$ kann man sich in seine Lage dadurch gebracht denken, daß man ein anderes Tripel $(s_0^*, s_1^*, s_2^*)$, bei welchem $s_0^*$ mit dem Speere $Oz$ zusammenfällt (wie oben), einer reellen Bewegung unterwirft. Die Winkel und Beiwinkel ändern sich bei dieser Bewegung offenbar nicht, sind also bei beiden Tripeln entsprechend gleich. Sind $w_0^*$, $w_0^* + \delta w_1^*$, $w_0^* + \delta w_2^*$ die zu $s_0^*$, $s_1^*$, $s_2^*$ gehörigen dualen Zahlen, wobei offenbar $w_0^* = 0$ sein muß, so folgt aus § 9, daß aus diesen Zahlen die zu $s_0$, $s_1$, $s_2$ gehörigen Zahlen $w$, $w + \delta w_1$, $w + \delta w_2$ durch eine gebrochen lineare Transformation von der Form $w' = \frac{aw+b}{cw+d}$ hervorgehen. Der Wert des Differentialquotienten $\frac{dw'}{dw}$ für $w = 0$ muß nun einerseits mit $\frac{\delta w_1}{\delta w_1^*}$, anderseits mit $\frac{\delta w_2}{\delta w_2^*}$ übereinstimmen.[1]) Die beiden letzteren Quotienten sind also gleich. Aus $\frac{\delta w_1}{\delta w_1^*} = \frac{\delta w_2}{\delta w_2^*}$ folgt aber unmittelbar $\frac{\delta w_2}{\delta w_1} = \frac{\delta w_2^*}{\delta w_1^*}$, etwa $= R e^{\Phi i}$. Es ist:

$$\frac{\measuredangle s_2 s_0}{\measuredangle s_0 s_1} = \frac{\measuredangle s_2^* s_0^*}{\measuredangle s_0^* s_1^*} = R$$

[mit Rücksicht auf die besondere Lage des Tripels $(s_0^*, s_1^*, s_2^*)$] und ebenso

$$\measuredangle s_1 s_0 s_2 = \measuredangle s_1^* s_0^* s_2^* = \Phi.$$

Man findet also auch bei einem beliebigen infinitesimalen Speertripel $(s_0, s_1, s_2)$ das Verhältnis der in $s_0$ zusammenstoßenden Winkel und den in $s_0$ auftretenden Beiwinkel $\measuredangle s_0$ in derselben Weise wie früher aus dem Quotienten $\frac{\delta w_2}{\delta w_1} = R e^{\Phi i}$.

### § 14. Dual-konforme Transformationen des Speerraumes. (Eine wichtige unendliche Gruppe von Speertransformationen.)

Hängt eine duale Veränderliche von einer anderen $w$ ab gemäß der Gleichung:

$$w' = \varphi(w), \tag{58}$$

wobei $\varphi(w)$ eine synektische Funktion ist (vgl. § 6), so wird dadurch jedem Speere $(w)$ ein anderer Speer $(w')$ als entsprechend zugewiesen. Die so definierte Transformation des Speerraumes möge als eine synektische Transformation bezeichnet werden.

[1]) Es folgt dies unmittelbar daraus, daß $w'$ eine „synektische" Funktion von $w$ ist (vgl. § 6).

Digitized by Google

Die synektischen Speertransformationen bilden eine unendliche Gruppe.

Die in Rede stehenden Transformationen besitzen die wichtige charakteristische Eigenschaft, **dual-konform** zu sein, d. h.: durch eine Transformation dieser Gruppe wird — von etwaigen Ausnahmestellen abgesehen — irgend ein infinitesimales Speertripel $(s_0, s_1, s_2)$ in ein anderes $(s_0', s_1', s_2')$ übergeführt, dessen Beiwinkel denen des ersteren entsprechend gleich sind, während seine Winkel den entsprechenden des ersteren proportional sind. Der Proportionalitätsfaktor ist (im allgemeinen) eine duale Zahl.

Beweis: Seien $w_0$, $w_0 = \delta w_1$, $w + \delta w_2$ die zu den Speeren $s_0$, $s_1$, $s_2$ eines infinitesimalen Tripels gehörigen dualen Zahlen, $w_0'$, $w_0' + \delta w_1'$, $w_0' + \delta w_2'$ die entsprechenden Zahlen des transformierten Tripels $s_0'$, $s_1'$, $s_2'$.[1]) Der Wert des Differentialquotienten $\frac{dw'}{dw}$ für $w = w_0$ muß dann einerseits mit $\frac{\delta w_1'}{\delta w_1}$, anderseits mit $\frac{\delta w_2'}{\delta w_2}$ übereinstimmen. Die beiden letzteren Quotienten sind also gleich, woraus sich unmittelbar die Beziehung ergibt $\frac{\delta w_2'}{\delta w_1'} = \frac{\delta w_2}{\delta w_1}$. Nach § 13 ergeben sich dann für die Beiwinkel $\measuredangle s_1 s_0 s_2$ und $\measuredangle s_1' s_0' s_2'$, ebenso für die Verhältnisse der Winkel $\frac{\measuredangle s_2 s_0}{\measuredangle s_0 s_1}$ und $\frac{\measuredangle s_2' s_0'}{\measuredangle s_0' s_1'}$ übereinstimmende Werte. Damit ist der Beweis erbracht.

Die Invarianz der Beiwinkel eines infinitesimalen Speertripels bei einer synektischen Transformation kann in der gewöhnlichen Ausdrucksweise folgendermaßen formuliert werden: Sei $s_0$ irgend ein Speer, $s$ ein unendlich wenig von ihm verschiedener Speer, $t$ ein Speer auf der kürzesten Transversalen von $s_0$ und $s$, wobei die Richtung von $t$ so zu bestimmen ist, daß für einen aus der Richtung $t$ blickenden Beobachter der Sinn der Drehung von $s_0$ nach $s$ positiv erscheint. Durch die betrachtete synektische Transformation mögen $s_0$, $s$ in $s_0'$, $s'$ übergeführt werden; die entsprechend (wie oben) orientierte kürzeste Transversale von $s_0'$ und $s_1'$ sei $\overline{t}$.

[1]) Die zu $s_0$, $s_1$, $s_2$ und $s_0'$, $s_1'$, $s_2'$ gehörigen dualen Zahlen können als endliche duale Zahlen angenommen werden, weil dies nötigenfalls immer durch Veränderung des Koordinatensystems erreicht werden kann. Die skalaren Teile von $\delta w_1$ und $\delta w_2$ werden im Texte als von Null verschieden vorausgesetzt. Von etwaigen Ausnahmestellen abgesehen, ist auch der skalare Teil von $\frac{dw'}{dw}$ von Null verschieden und daher sind auch die skalaren Teile von $\delta w_1'$ und $\delta w_2'$ von Null verschieden.

Digitized by Google

Ändert sich $s$ beliebig doch so, daß dieser Speer zu $s_0$ unendlich nahe bleibt, so wird $s'$, sich gegen $s'_0$ analog verhalten. Die Transversale $t$ durchläuft das Normalennetz von $s_0$, $\bar{t}$ das Normalennetz von $s'_0$. Dabei sind nun $t$ und $\bar{t}$ derart miteinander verbunden, daß die von ihnen in den zugehörigen Normalennetzen beschriebenen Systeme **kongruent** sind, daß also die sämtlichen $t$ mit den entsprechenden $\bar{t}$ durch eine und dieselbe reelle Bewegung des Speerraumes zur Deckung gebracht werden können.

Ähnlich wie die Invarianz der Beiwinkel, kann auch die Invarianz der Verhältnisse der Winkel in die gewöhnliche Sprechweise übersetzt werden. Der von $s$ mit $s_0$ gebildete unendlich kleine duale Winkel sei $\Theta = \vartheta + \rho\varepsilon$, so daß $s$ aus $s_0$ hervorgeht durch Drehung um $t$ im positiven Sinne um den Winkel $\vartheta$ und Schiebung um $\rho$ längs $t$ im positiven Sinne; man kann auch sagen, $s$ entsteht aus $s_0$ durch eine infinitesimale Schraubung $[s_0, s]$ um $t$ mit dem Winkel $\vartheta$ und dem Parameter $k = \frac{\rho}{\vartheta}$. Ist entsprechend der von $s'_0$ mit $s$ gebildete unendlich kleine duale Winkel $\Theta' = \vartheta' + \rho'\varepsilon$, so geht $s$ aus $s_0$ durch eine infinitesimale Schraubung $[s'_0, s']$ um die Achse $t$ hervor, wobei der Winkel der Schraubung durch $\vartheta'$ und der Parameter durch $k' = \frac{\rho'}{\vartheta'}$ gegeben ist. Nach dem Obigen bleibt, wenn $s$ geändert wird, das Verhältnis $\frac{\Theta'}{\Theta}$ ungeändert. Nun ist $\frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{\vartheta'(1 + k'\varepsilon)}{\vartheta(1 + k\varepsilon)} = \frac{\vartheta'}{\vartheta}[1 + (k' - k)\varepsilon]$; es bleiben also, wenn der zu $s_0$ unendlich nahe Speer $s$ sich irgendwie um $s$ herumbewegt und der Speer $s'$ entsprechend um $s'_0$, die Größen $\frac{\vartheta'}{\vartheta}$ und $(k' - k)$ ungeändert. Oder mit anderen Worten: Die infinitesimalen Schraubungen: $[s_0\, s]$ und $[s'_0\, s']$ um $t$ bezw. $\bar{t}$ stehen zueinander in der Beziehung, daß die Winkel $\vartheta$ und $\vartheta'$ dieser Schraubungen nur um einen konstanten Faktor, die Parameter $k$ und $k'$ nur um eine additive Konstante verschieden sind. Dabei heißt „konstant" so viel als: von der jeweiligen Lage des zu $s_0$ unendlich nahen Speeres $s$ unabhängig.

Beschränkt man die Betrachtung auf die Speere einer Kongruenz und betrachtet die Wirkung einer synektischen Transformation bloß auf diese, dann spezialisiert sich das Gesagte in nachstehender Art: Die kürzesten Transversalen $t$ von $s_0$ und $s$ erfüllen eine Regelfläche, die unter dem Namen „Zylindroid" bekannt ist; die zugehörigen kürzesten Transversalen $\bar{t}$ von $s'_0$ und $s'$ beschreiben ein zu dem obigen kongruentes Zylindroid und die zu entsprechenden Erzeugenden der beiden Zylindroide gehörigen Schraubungsparameter haben eine konstante Differenz.

Digitized by Google

## § 15. Die äquilongen Transformationen von G. Scheffers.

Vertauscht eine synektische Transformation (58) die Speere einer Ebene untereinander, so erhält man in der Ebene eine äquilonge Transformation im Sinne des Herrn G. Scheffers;[1]) die äquilongen Transformationen ordnen sich in dieser Weise unter die soeben betrachteten dual-konformen Transformationen ein. Um dies zu erkennen, ist nur nötig, den Begriff des dualen Beiwinkels [2]) auf ein infinitesimales Speertripel $(s_0\ s_1\ s_2)$ der genannten Ebene anzuwenden. Aus der allgemeinen Definition ergibt sich hier für den dualen Beiwinkel $\measuredangle s_1\ s_0\ s_2$ der Ausdruck: $\measuredangle s_1\ s_0\ s_2 = \overline{P_1\ P_2}\,.\,\varepsilon$, wenn unter $\overline{P_1\ P_2}$ der Abstand jener Punkte $P_1$ und $P_2$ verstanden wird, welche von $s_1$ und $s_2$ auf $s_0$ ausgeschnitten werden, und positiv oder negativ genommen werden muß, je nachdem die Aufeinanderfolge der Punkte $P_1$ und $P_2$ mit dem Richtungssinne des Speeres $s_0$ übereinstimmt oder nicht. Die dual-konformen Transformationen nun, welche die Speere der Ebene untereinander vertauschen, lassen die Beiwinkel $\measuredangle s_1\ s_0\ s_2$ ungeändert, d. h. sie lassen den Abstand der Punkte, die auf irgend einem Speere $s_0$ von zwei unendlich benachbarten Speeren $s_1$ und $s_2$ ausgeschnitten wird, der Länge und Richtung nach ungeändert: dies ist aber gerade die charakteristische Eigenschaft der äquilongen Transformationen.

Es erübrigt noch zu zeigen, in welcher Beziehung die von Herrn G. Scheffers angegebene Zuordnung der reell-dualen Zahlen und der Speere einer Ebene zu der hier zu Grunde gelegten Zuordnung der dualen Zahlen und der Speere des Raumes steht. Zu dem Zwecke betrachten wir die Speere der $xy$-Ebene unseres Koordinatensystems. Die in § 12 eingeführten Winkel $\Theta$ und $\Phi$ haben für irgend einen Speer $s$ dieser Ebene die Werte

$$\Theta = \frac{\pi}{2} + \rho\varepsilon \qquad \Phi = \varphi.$$

Dabei haben die Größen $\rho$ und $\varphi$ nach § 12 die folgende Bedeutung: Ist $t$ ein Speer auf dem von $O$ auf $s$ gefällten Lote $ON$, derart, daß die Aufeinanderfolge der Speere $t$ und $s$, von der positiven $z$-Achse betrachtet, einer Drehung im positiven Sinne (um einen rechten Winkel) entspricht, so bedeutet $\varphi$ den Winkel von $t$ gegen die positive $x$-Achse $Ox$, $\rho$ bedeutet die Länge des Lotes $ON$, positiv oder negativ genommen, je nachdem $ON$ und $t$ gleich- oder entgegengesetzt gerichtet sind.

[1]) Vgl. die Verhandlungen des internationalen Mathematikerkongresses zu Heidelberg (1894), S. 349—356, sowie den 60. Band der Mathematischen Annalen, S. 491—531.

[2]) Siehe oben S. 33.

Digitized by Google

Nach Formel (57) in § 12 ist die zu $s$ gehörige duale Zahl $w$: $w = \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} e^{\varphi i}$. Entwickelt man $\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}\varepsilon\right)$ nach dem Taylorschen Satze, so ergibt sich $\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = 1 + \rho\varepsilon$, also

$$w = (1 + \rho\varepsilon)\, e^{\varphi i} = e^{\rho\varepsilon} \cdot e^{\varphi i} = e^{\varphi i + \rho\varepsilon}$$

und hieraus weiter

$$l(w) = \varphi i + \rho\varepsilon = i(\varphi - \rho i\varepsilon).$$

Schreibt man hier statt $-i\varepsilon \ldots \bar{\varepsilon}$, so hat diese Zahl analog zu $\varepsilon$ die Eigenschaft $\bar{\varepsilon}^2 = 0$; die obige Formel kann geschrieben werden:

$$-i\, l(w) = \varphi + \rho\bar{\varepsilon} = \mathfrak{w}. \tag{58}$$

Die Zahl $\mathfrak{w} = \varphi + \rho\bar{\varepsilon}$ ist nun völlig identisch mit der Scheffersschen Zahl des Speeres; nur ist das $\bar{\varepsilon}$ der Scheffersschen Zahl von dem früheren $\varepsilon$ durch den Faktor $(-i)$ verschieden.

$$\bar{\varepsilon} = -i\varepsilon. \tag{58a}$$

Die Beziehung der dem Speere $s$ bei unserer Zuordnung zugewiesenen Zahl $w$ und der Scheffersschen Zahl $\mathfrak{w}$ wird durch (58) vermittelt, also durch eine transzendente Gleichung; dies hängt damit zusammen, daß bei unserer Zuordnung der Speer $s$ und die Zahl $w$ einander ein- und eindeutig zugewiesen sind, während die Scheffersche Zahl $\mathfrak{w}$ des Speeres $s$ nur modulo $2\pi$ bestimmt ist. [1])

Der Zuordnung zwischen den Speeren der $xy$-Ebene und den Zahlen $w = u + v\varepsilon$ haftet der Nachteil an, daß die in $w$ auftretenden Koeffizienten $u$ und $v$ nicht reelle Größen sind. Diesen Übelstand kann man dadurch beseitigen, daß man zu einer anderen Zuordnung übergeht, bei welcher dem Speere $s$, welchem bei der ursprünglichen Zuordnung die Zahl $w$ zugehört, die Zahl

$$\tilde{w} = \frac{1}{i} \cdot \frac{w - 1}{w + 1} \tag{59}$$

entspricht. Die neue Zuordnung gehört zur nämlichen „Klasse“ wie die ursprüngliche nach der in § 5 gegebenen Definition des

[1]) Faßt man Gleichung (58) als Definition der Scheffersschen Zahl $\mathfrak{w}$ des Speeres $s$ auf, so erkennt man, daß zu $s$ als Scheffersche Zahlen neben $\mathfrak{w} = \varphi + \rho\bar{\varepsilon}$ noch die Zahlen von der Form $\left[(\varphi + 2k\pi) + \rho\bar{\varepsilon}\right]$ gehören, wobei $k$ irgend eine ganze Zahl ist.

Digitized by Google

Begriffs einer Klasse von Zuordnungen. Mit Rücksicht auf die oben benützte Darstellung $w = e^{\varphi i + \varrho\varepsilon}$, in welcher statt $\varepsilon \ldots i\bar{\varepsilon}$ geschrieben werden kann, ergibt sich $w = e^{i(\varphi + \varrho\bar{\varepsilon})}$ und

$$\tilde{w} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{i(\varphi+\varrho\bar{\varepsilon})} - 1}{e^{i(\varphi+\varrho\bar{\varepsilon})} + 1} = \frac{\frac{1}{2i}\left\{e^{i\frac{\varphi+\varrho\bar{\varepsilon}}{2}} - e^{i\frac{\varphi-\varrho\bar{\varepsilon}}{2}}\right\}}{\frac{1}{2}\left\{e^{i\frac{\varphi+\varrho\bar{\varepsilon}}{2}} + e^{i\frac{\varphi-\varrho\bar{\varepsilon}}{2}}\right\}} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi+\rho\bar{\varepsilon}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi+\rho\bar{\varepsilon}}{2}\right)},$$

also weiter:

$$\tilde{w} = \operatorname{tg}\frac{\varphi+\rho\bar{\varepsilon}}{2} = \tilde{u} + \tilde{v}\bar{\varepsilon}, \tag{60}$$

wenn $\tilde{u} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, $\tilde{v} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} \cdot \rho$ gesetzt wird. ($\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ sind somit gewöhnliche reelle Zahlen.)

Eine gebrochen lineare Substitution: $\tilde{w}' = \frac{a\tilde{w}+b}{c\tilde{w}+d}$, bei welcher die Koeffizienten $a, b, c, d$ die Form haben:

$$a = \alpha + \alpha'\bar{\varepsilon},\ b = \beta + \beta'\bar{\varepsilon} \text{ etc.},$$

wobei $\alpha$ und $\alpha'$, $\beta$ und $\beta'$ etc. gewöhnliche reelle Zahlen vorstellen, vertauscht dann die Speere der $xy$-Ebene untereinander. Man kann zeigen, daß bei der so definierten Gruppe von Speertransformationen der $xy$-Ebene die Speere, welche einen „orientierten" Kreis berühren, wieder in solche Speere übergeführt werden, welche einen orientierten Kreis berühren; und es erweist sich die betrachtete Gruppe als identisch mit der Gruppe der Laguerreschen Kreisverwandtschaften (Laguerre, Annales de Mathématiques, Jahrg. 1882, 1883). Für letztere Gruppe spielen also die dualen Zahlen die nämliche Rolle wie die gewöhnlichen komplexen Zahlen bei den Möbiusschen Kreisverwandtschaften.

Eine synektische Transformation $\tilde{w}' = \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k(\tilde{w}-c)^k$, wo $a_k = \alpha_k + \alpha_k'\bar{\varepsilon}$, $c = \gamma + \gamma'\bar{\varepsilon}$ und die $\alpha_k$, $\alpha_k'$, $\gamma$, $\gamma'$ gewöhnliche reelle Zahlen sind, stellt die **allgemeinste** (reelle und analytische) äquilonge Transformation der $xy$-Ebene dar.

Digitized by Google

## § 16. Die isotropen Kongruenzen von Ribaucour.

Die Abbildung der dualen Zahlen auf die Minimalebenen und damit auf die Speere des Raumes gestattet eine besonders einfache Darstellung der Ribaucourschen Theorie der isotropen Kongruenzen. (Vgl. Ribaucour: Etude des Elassoides ou Surfaces à Courbure Nulle, in den Mémoires couronnées par l'Académie de Belgique, 44. Bd., Jahrg. 1881.)

Eine isotrope Kongruenz mit $\infty^2$ reellen Geraden kann man definieren wie folgt: Man umschreibe dem absoluten Kreis der Euklidischen Geometrie irgend eine Developpable $D$ [1]; die reellen Trägergeraden der erzeugenden Ebenen von $D$, welche letztere offenbar Minimalebenen sind, erfüllen dann eine isotrope Kongruenz $Q$. Werden die dualen Zahlen $w = u + v\varepsilon$ gemäß (35) den Minimalebenen zugeordnet, so kann (35) als parametrische Darstellung der Minimalebenen durch die Parameter $u$ und $v$ angesehen werden. Die Developpable $D$ ist dann analytisch zu charakterisieren durch eine Gleichung zwischen den Parametern $u$ und $v$, etwa durch:

$$v = \varphi(u). \tag{61}$$

Die der Zahl $w = u + v\varepsilon$ entsprechende Minimalebene gehört dann und nur dann der Developpablen $D$ an, wenn $u$ und $v$ durch die obige Relation verknüpft sind. Der Speer $(w)$ als reeller Repräsentant der Minimalebene liegt dann auf einer Geraden der isotropen Kongruenz $Q$. Wenn umgekehrt der Speer $(w = u + v\varepsilon)$ auf einer Geraden der isotropen Kongruenz $Q$ liegt, so, daß die zugehörige Minimalebene zu $D$ gehört, dann muß zwischen $u$ und $v$ die obige Relation bestehen. Von den beiden Speeren einer Geraden $G$ der isotropen Kongruenz soll immer nur derjenige als der Kongruenz angehörig bezeichnet werden, welcher die durch $G$ gehende Ebene von $D$ repräsentiert. Unter dieser Voraussetzung gibt (61) die notwendige und hinreichende Bedingung an für die Zugehörigkeit des Speeres $(w = u + v\varepsilon)$ zur betrachteten isotropen Kongruenz.

Nach (61) kann man irgend einen Speer $(u + v\varepsilon)$ der Kongruenz $Q$ aus dem Speere $(u + 0\varepsilon)$ (der ihm parallel ist und durch den Ursprung $O$ geht) durch die synektische Transformation $w' = w + \varepsilon\varphi(w)$ abgeleitet denken. Weist man also jedem Speer der Kongruenz den zu ihm parallelen durch $O$ als entsprechend zu, so ist dadurch nach § 15 die Kongruenz dual-konform abgebildet auf das Speerbündel durch $O$. Daraus erhellt, daß die kürzesten Transversalen zwischen einem Speere $s$

[1] Für eine solche Developpable, deren erzeugende Ebenen Minimalebenen sind, ist neuerdings der Name „Minimaldeveloppable" gebräuchlich geworden.

Digitized by Google

der Kongruenz und den ihm unendlich nahen Speeren im allgemeinen ein Strahlenbüschel bilden, daß also die „Grenzpunkte" der Kongruenz auf $s$ zusammenfallen mit dem „Mittelpunkt" auf $s$.

Ein besonders einfacher Spezialfall wird erhalten, wenn man die Relation (61) in der Form annimmt

$$v = A + Bu + Cu^2$$

In diesem Falle sind mit Rücksicht auf (35) oder noch bequemer (34) die Koordinaten der zu $w = u + v\varepsilon$ gehörigen Minimalebenen $(T, U, V, W)$ verbunden durch:

$$-T = A(V + iU) - BiW + C(V - iU)$$

oder

$$T + i(A - C)U + (A + C)V - BiW = 0.$$

D. h. die Speere der betrachteten Kongruenz stellen Minimalebenen dar, die sämmtlich durch einen festen Punkt $(a, b, c)$ gehen, dessen Koordinaten sind:

$$a = i(A - C);\ b = (A + C);\ c = -Bi.$$

Diese Kongruenz soll nach Herrn E. v. Weber[1]) als ein Zyklus von Speeren bezeichnet werden. Ist $a = a' + a''i$, $b = b' + b''i$, $c = c' + c''i$ $(a', a'', \ldots$ reell), so soll der reelle Punkt $(a', b', c')$ das Zentrum des Zyklus heißen; für den imaginären Punkt $(a, b, c)$ wollen wir die Bezeichnung: „Kernpunkt des Zyklus" gebrauchen.[2])

Die betrachtete spezielle Kongruenz ist von großem Nutzen für die Untersuchung der allgemeinen isotropen Kongruenz, wie aus folgender Tatsache zu ersehen: In der Umgebung irgend eines Speeres $s_0 = (w_0)$ der Kongruenz $v = \varphi(u)$ kann letztere durch einen Zyklus ersetzt werden, der mit ihr bei $s_0$ eine Berührung zweiter Ordnung hat.

Entwickelt man nämlich nach dem Taylorschen Satz $v = \varphi(u)$ nach Potenzen von $(u - u_0)$, so ergibt sich, wenn $\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_0} = v_0'$, $\left(\frac{d^2v}{du^2}\right)_{u=u_0} = v_0''$, ... gesetzt wird:

$$v = v_0 + v_0'(u - u_0) + \frac{1}{2}v_0''(u - u_0)^2 + \cdots$$

[1]) Vgl. die in der Anmerkung auf S. 1 zitierten Arbeiten.

[2]) Man verifiziert leicht, daß ein Zyklus von Speeren aus den in bestimmter Weise orientierten Erzeugenden einer Konfokalschar von Rotationshyperboloiden besteht, wobei die Orientierung der Erzeugenden derartig ist, daß durch orthogonale Projektion der orientierten Erzeugenden auf die Ebene der Kehlkreise der Hyperboloide die in übereinstimmender Weise orientierten Tangenten der Kehlkreise sich ergeben. (Vgl. E. v. Weber l. c.) Das Zentrum des Zyklus ist identisch mit dem gemeinsamen Mittelpunkt der Konfokalschar, der Kernpunkt liegt auf der gemeinsamen Rotationsachse der Konfokalschar.

Digitized by Google

Bricht man hier auf der rechten Seite nach dem Gliede mit $(u-u_0)^2$ die Reihe ab, so erhält man die Gleichung eines Zyklus: $v = v_0 + v_0'(u-u_0) + \frac{1}{2} v_0''(u-u_0)^2$ oder

$$v = \left(v_0 - u_0 v_0' + \frac{1}{2} v_0'' u_0^2\right) + (v_0' - u_0 v_0'') u + \frac{1}{2} v_0'' u^2,$$

welche bis auf unendlich kleine Größen dritter Ordnung (exklusive) in $(u-u_0)$ mit der Gleichung der Kongruenz $v = \varphi(u)$ übereinstimmt.

Dieser Zyklus soll der Schmiegungszyklus der Kongruenz für den Speer $s_0$ heißen. Die Koordinaten seines Kernpunktes — sie sollen mit $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ bezeichnet werden — ergeben sich aus den obigen Formeln für $a, b, c$, indem man auf der rechten Seite derselben $A = v_0 - u_0 v_0' + \frac{1}{2} v_0'' u_0^2$, $B = v_0' - u_0 v_0''$, $C = \frac{1}{2} v_0''$ setzt:

$$\xi_0 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} u_0^2\right) i v_0'' - u_0 i v_0' + i v_0$$

$$\eta_0 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} u_0^2\right) \cdot v_0'' - u_0 v_0' + v_0$$

$$\zeta_0 = + u_0 i v_0'' - i v_0'.$$

Setzt man die in der Gleichung (61) auftretende Funktion $\varphi(u) = 2iF(u)$, so nimmt die Gleichung der Kongruenz die Form an:

$$v = 2iF(u) \tag{62}$$

und die Koordinaten des zu einem beliebigen Speer $s = (w) = (u + v\varepsilon)$ gehörigen Kernpunktes des Schmiegungszyklus von $s$ drücken sich durch die Funktion $F'(u)$ und ihre Ableitungen $F'(u)$ und $F''(u)$ in nachstehender Weise aus:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (1-u^2) F'''(u) + 2u F''(u) - 2 F'(u) \\ \eta &= i(1+u^2) F''(u) - 2iu F'(u) + 2i F(u) \\ \zeta &= -2u F''(u) + 2 F'(u) \end{aligned}\right\}. \tag{63}$$ (G)

Die Koordinaten $x, y, z$ des Zentrums des Schmiegungszyklus in $s$ werden erhalten, indem man die reellen Teile der komplexen Größen: $\xi, \eta, \zeta$ bildet; also

Digitized by Google

$$(64)\quad \left.\begin{aligned} x &= \Re\{(1-u^2)F''(u)+2\,uF'\,u-2\,F(u)\}\\ y &= \Re\{i(1+u^2)F''(u)-2iuF'(u)+2iF\,u\}\\ z &= \Re\{-2u\quad F''(u)+2\quad F'\,u\}\end{aligned}\right\}\qquad (K)$$

Der geometrische Ort aller Kernpunkte $(\xi, \eta, \zeta)$ für die Speere $s$ der betrachteten Kongruenz ist die durch (63) dargestellte imaginäre Kurve $\mathfrak{C}$. Diese Kurve ist identisch mit der Gratkurve der Developpablen $D$. Denn durch irgend einen Punkt $(\xi, \eta, \zeta)$ derselben gehen die sämtlichen erzeugenden Minimalebenen der Developpablen $D$, welche zu den unendlich wenig von $s$ verschiedenen Speeren gehören, hindurch. Als Gratkurve von $D$ ist $\mathfrak{C}$ natürlich eine Minimalkurve.

Der geometrische Ort aller Zentren $(x, y, z)$ der zu den Speeren $s$ der Kongruenz $Q$ gehörigen Schmiegungszyklen ist die durch (64) dargestellte reelle Fläche $K$.[1]) Die analytische Darstellung (64) dieser Fläche ist identisch mit der Weierstraßschen Darstellung einer beliebigen Minimalfläche (vgl. etwa die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III D 5. R. v. Lilienthal: Besondere Flächen, S. 312); daß in den Weierstraßschen Formeln $z$ den entgegengesetzten Wert hat wie oben in (64) ist unwesentlich, da eine Minimalebene durch Spiegelung an der $xy$-Ebene unseres Koordinatensystems wieder in eine Minimalfläche übergeht. Der geometrische Ort $K$ der Zentren aller Schmiegungszyklen einer isotropen Kongruenz $Q$ ist also eine Minimalfläche.

## § 17. Isotrope Kongruenzen und Minimalflächen.

Der eben ausgesprochene Satz erweist sich bei näherem Zusehen als im Grunde identisch mit dem folgenden Satze von Ribaucour:

Legt man durch die Mittelpunkte der verschiedenen Strahlen einer Kongruenz, jeweilig senkrecht zu diesen, Ebenen, die sogenannten Mittelebenen der betreffenden Strahlen, so umhüllen alle diese Mittelebenen eine Fläche, die sogenannte Mittelenveloppe der Kongruenz. Die Mittelenveloppe einer isotropen Kongruenz ist nach Ribaucour eine Minimalfläche. (Vgl. den oben zitierten Aufsatz in der Enzyklopädie, S. 330.)

Es läßt sich beweisen, daß die Mittelebene irgend eines Speeres $s$ der isotropen Kongruenz $Q$ die Mittelenveloppe der Kongruenz $Q$ gerade in dem Zentrum $(x, y, z)$ des zu $s$ gehörigen Schmiegungszyklus $q$ berührt; und damit ist zugleich gezeigt, daß die

[1]) $K$ kann offenbar auch definiert werden als geometrischer Ort der Halbierungspunkte jener Strecken, welche die verschiedenen Punkte von $\mathfrak{C}$ mit den jeweilig zugehörigen konjugiert-imaginären Punkten verbinden.

Digitized by Google

Mittelenveloppe von $Q$ mit der Fläche $K$ des vorigen Paragraphen identisch ist.

Zum Zwecke des Beweises ist nachstehende Überlegung anzustellen: Ein Zyklus von Speeren besteht aus den in bestimmter Weise orientierten Erzeugenden einer Schar von konfokalen einschaligen Rotationshyperboloiden [1]; die Mittelebenen aller Speere eines Zyklus gehen sämtlich durch den gemeinsamen Mittelpunkt der genannten Hyperboloide, also durch das Zentrum des Zyklus. Bestimmt man einerseits den Schnittpunkt der Mittelebenen aller zu $s$ unendlich nahen Speere von $Q$, anderseits den Schnittpunkt der Mittelebenen aller zu $s$ unendlich nahen Speere von $q$, so folgt aus dem Umstand, daß der Schmiegungszyklus $q$ mit $Q$ bei $s$ eine Berührung zweiter Ordnung hat, daß die beiden so erhaltenen Punkte identisch sind; der erste Punkt ist aber identisch mit jenem Punkte, in dem die Mittelebene von $s$ die Mittelenveloppe von $Q$ berührt, der zweite Punkt ist nach obigem identisch mit dem Zentrum $(x, y, z)$ des Schmiegungszyklus $q$. Damit ist der Beweis erbracht.

Die Art, wie die Parameterdarstellung (64) der Fläche $K$ abgeleitet wurde, erscheint deswegen von Interesse, weil sie den Zusammenhang aufzeigt, der zwischen der komplexen Funktion $F(u)$ in der Weierstraßschen Darstellung (64) einer Minimalfläche $K$ und den nach Ribaucour zu $K$ gehörigen isotropen Kongruenzen $Q$ besteht.

In der Tat, ist irgend eine Minimalfläche $K$ in der Weierstraßschen Darstellung (64) gegeben und will man eine isotrope Kongruenz $Q$ erhalten, von welcher $K$ die Mittelenveloppable ist, so braucht man nur zwischen den Ableitungszahlen $u$ und $v$ einer dualen Variablen $w = u + v\varepsilon$ die Relation

$$v = 2iF(u)$$

festzulegen; die zu $w$ gehörigen Speere $s = (w)$ erfüllen dann eine isotrope Kongruenz $Q$, welche zu $K$ in der verlangten Beziehung steht. [2])

Nach Ribaucour gibt es im ganzen $\infty^3$ isotrope Kongruenzen $Q$, deren Mittelenveloppe mit der vorgegebenen Minimalfläche $K$ identisch ist; und man kann aus einer von diesen Kongruenzen, $Q$, die übrigen durch eine einfache Konstruktion finden. Unterwirft man die Minimalebenen, welche zu den Speeren $s$ von $Q$ gehören, einer imaginären Translationsbewegung $(i\alpha, i\beta, i\gamma)$, be-

[1]) Vgl. Anmerkung [2]) auf S. 45.

[2]) Ist insbesondere die in der Weierstraßschen Darstellung (64) einer Minimalfläche $K$ auftretende Funktion $F(u)$ eine ganze quadratische Funktion von $u$: $F(u) = A_1 + B_1 u + C_1 u^2$, so ist die zugehörige isotrope Kongruenz $c = 2iF(u)$ ein Zyklus, die Mittelenveloppe dieser Kongruenz reduziert sich auf das Zentrum des Zyklus und die Minimalfläche $K$ reduziert sich also auf einen einzigen Punkt.

Digitized by Google

stehend aus einer Translation um $i\alpha$ parallel zur positiven $x$-Achse, um $i\beta$ parallel zur positiven $y$-Achse, um $i\gamma$ parallel zur positiven $z$-Achse, wobei $\alpha, \beta, \gamma$ reelle Zahlen sein sollen, so geht die Developpable $D$ dieser Minimalebenen über in $\overline{D}$ und die Punkte $(\xi, \eta, \zeta)$ der Gratkurve $\mathfrak{C}$ von $D$ gehen über in die Punkte $(\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta})$ der Gratkurve $\overline{\mathfrak{C}}$ von $\overline{D}$ derart, daß $\overline{\xi} = \xi + i\alpha$, $\overline{\eta} = \eta + i\beta$, $\overline{\zeta} = \zeta + i\gamma$. Die reellen Teile $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ von $(\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta})$ sind aber offenbar mit den reellen Teilen $x, y, z$ von $(\xi, \eta, \zeta)$ identisch.

Die Speere der Minimalebenen der Developpablen $\overline{D}$ bilden eine isotrope Kongruenz $\overline{Q}$; zu dieser gehört als geometrischer Ort der Zentren $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ aller Schmiegungszyklen eine Fläche $\overline{K}$, welche wegen $\overline{x} = x$, $\overline{y} = y$, $\overline{z} = z$ mit der entsprechenden Fläche $K$ für die ursprüngliche Kongruenz $Q$ identisch ist.

Die Mittelenveloppe der Kongruenz $\overline{Q}$ ist also identisch mit der Mittelenveloppe der Kongruenz $Q$. Entsprechend den verschiedenen Werten, deren die reellen Parameter $\alpha, \beta, \gamma$ fähig sind, erhält man aus einer Kongruenz $Q$, welche zur Mittelenveloppe eine gegebene Minimalfläche $K$ hat, $\infty^3$ isotrope Kongruenzen $\overline{Q}$, die in derselben Beziehung zu $K$ stehen.

Es erübrigt noch, den Zusammenhang zwischen $Q$ und $\overline{Q}$ erstens einmal konstruktiv und dann auch analytisch klarzulegen.

Durch die imaginäre Translationsbewegung $(i\alpha, i\beta, i\gamma)$ möge die durch einen beliebigen Speer $s$ und die duale Zahl $w$ dargestellte Minimalebene in eine andere übergehen, zu welcher der Speer $s'$ und die duale Zahl $w'$ gehören.

Aus dem Speere $s$ kann dann, wie man leicht verifiziert, der Speer $s'$ durch folgende Konstruktion gefunden werden: Man verschiebe $s$ um den reellen Vektor $(\alpha, \beta, \gamma)$, wodurch dieser Speer in eine zur ursprünglichen parallele Lage $s_1$ kommt, und drehe sodann $s_1$ um $s$ im positiven Sinne um einen rechten Winkel; der so gewonnene Speer ist dann der gesuchte $s'$. Die Konstruktion, durch welche hier mittels des Vektors $(\alpha, \beta, \gamma)$ zu irgend einem Speere $s$ der entsprechende $s'$ gefunden wird, verdient wegen ihrer Einfachheit und vielfachen Verwendbarkeit einen besonderen Namen: wir wollen sie als eine „Querschiebung des Speeres $s$ gegen den Vektor $(\alpha, \beta, \gamma)$“ bezeichnen. Man findet also aus irgend einer isotropen Kongruenz $Q$, deren Mittelenveloppe die vorgegebene Minimalfläche $K$ ist, die anderen $\infty^3$ isotropen Kongruenzen $\overline{Q}$, welche zu $K$ in der nämlichen Beziehung stehen, einfach dadurch, daß man die Speere von $Q$ einer Querschiebung gegen einen beliebig anzunehmenden Vektor $(\alpha, \beta, \gamma)$ unterwirft.

Seien $(T, U, V, W)$ die Koordinaten der Minimalebene des Speeres $s$, $w = u + v\varepsilon$ die zugehörige Zahl; durch die imaginäre



Digitized by Google

Translation ($i\alpha$, $i\beta$, $i\gamma$) geht diese Minimalebene über in die des Speeres $s'$. Die Koordinaten der letzteren Minimalebene sind:

$$T' = T - i\alpha U - i\beta V - i\gamma W,\ U' = U,\ V' = V,\ W' = W;$$

die ihr zugehörige duale Zahl $w' = u' + v'\varepsilon$ ist nach (35) bestimmt durch:

$$u' = u,\ v' = v + i\left[\alpha i\frac{u^2-1}{2} + \beta\frac{u^2+1}{2} + \gamma i u\right].$$

In dieser Weise hängt also die duale Zahl $w'$ irgend eines Speeres von $\overline{Q}$ ab von der dualen Zahl $w$ des entsprechenden Speeres in $Q$[1]). Zwischen den Ableitungszahlen $u'$ und $v'$ von $w'$ ergibt sich mit Rücksicht auf (62) aus dem Obigen die Relation:

$$v' = 2iF(u') + i\left[\alpha i\frac{u'^2-1}{2} + \beta\frac{u'^2+1}{2} + \gamma i u'\right].$$

Die charakteristische Bedingung dafür, daß ein Speer $(w) = (u + v\varepsilon)$ (wobei jetzt die Striche bei $w'$, $u'$, $v'$ unterdrückt werden) zur isotropen Kongruenz $\overline{Q}$ gehört, wird also gegeben durch:

$$v = 2iF(u) + i\left[\alpha i\frac{u^2-1}{2} + \beta\frac{u^2+1}{2} + \gamma i u\right].$$

oder durch:

$$v = 2i\overline{F}(u),$$

wo $$\overline{F}(u) = F(u) + \frac{1}{2}\left[\alpha i\frac{u^2-1}{2} + \beta\frac{u^2+1}{2} + \gamma i u\right].$$

Die Zahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind, um es nochmals hervorzuheben, auf Grund der gemachten Voraussetzung, reelle gewöhnliche Zahlen.

Die Mittelenveloppe von $\overline{Q}$ ist nach dem Gesagten identisch mit der Mittelenveloppe von $Q$. Die Gleichung von $Q$ ist $v = 2iF(u)$, die Gleichung von $\overline{Q}$ ist $v = 2i\overline{F}(u)$.

Wenn man also in den Gleichungen (64), welche die parametrische Darstellung der Mittelenveloppe $K$ von $Q$ geben, die Funktion $F(u)$ durch die oben definierte, drei willkürliche reelle Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, enthaltende Funktion $\overline{F}(u)$ ersetzt, so stellen diese Gleichungen immer noch dieselbe Minimalfläche $K$ dar.

---

[1]) Die Zahlen $w$ und $w'$ sind durch eine gebrochen-lineare Substitution miteinander verbunden. Und zwar kann letztere durch die bilineare Gleichung:

$$(w' - w) - \frac{\varepsilon i}{2}[\alpha i(w w' - 1) + \beta(w w' + 1) + \gamma \cdot i(w + w')]$$

dargestellt werden [welche Gleichung ein spezieller Fall von (39) i

Digitized by Google

Durch eine gegebene Minimalfläche $(K)$ ist also die Funktion $F(u)$, welche in der Weierstraßschen Darstellung der Fläche auftritt, nicht völlig bestimmt, sondern es können zu einer solchen Funktion noch beliebige reelle Vielfache der Ausdrücke $i\frac{u^2-1}{2}$, $\frac{u^2+1}{2}$, $iu$ addiert werden. (Dieser Sachverhalt kommt in dem oben zitierten Berichte in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften nicht gehörig zur Geltung; wenn dortselbst [S. 312, Zeile 6 von unten] gesagt wird, daß zu jeder analytischen Funktion eine Minimalfläche gehört und umgekehrt, so würde dies zu der Auffassung Anlaß geben, daß zu einer Minimalfläche nur eine Funktion gehört und diese Auffassung ist nach dem Obigen irrig.)

## § 18. Assoziierte Minimalflächen.

Ersetzt man in der Weierstraßschen Darstellung einer Minimalfläche $K$ die Funktion $F(u)$ durch $e^{i\mu}F(u)$, wobei $\mu$ eine reelle Konstante bedeutet, so erhält man eine Minimalfläche $\overline{K}$, welche als zu $K$ assoziiert bezeichnet wird; entsprechend den verschiedenen Werten von $\mu$ erhält man eine einfach unendliche Schar von Minimalflächen, die zu $K$ und ebenso auch zueinander assoziiert sind. Diese assoziierten Flächen sind bekanntlich aufeinander abwickelbar und es bestehen zwischen ihnen noch sonstige einfache Beziehungen. Hier soll nur die von Ribaucour behandelte und gelöste Frage besprochen werden, in welcher Weise aus einer zu $K$ gehörigen isotropen Kongruenz $Q$ (von der $K$ die Mittelenveloppe ist) die entsprechend zu den assoziierten Flächen $\overline{K}$ gehörigen isotropen Kongruenzen bestimmt werden können.

Eine zu $\overline{K}$ gehörige isotrope Kongruenz $\overline{Q}$ kann dadurch erhalten werden, daß man zwischen den Ableitungszahlen $u'$ und $v'$ einer dualen Zahl $w'=u'+v'\varepsilon$ die Beziehung $v'=2ie^{i\mu}F(u')$ festlegt. Die zu $w'$ gehörigen Speere $s'$ erfüllen dann eine isotrope Kongruenz $\overline{Q}$, deren Mittelenveloppe (nach § 16) offenbar $\overline{K}$ ist. Zu den Speeren $s$ von $Q$ gehören nun duale Zahlen $w=u+v\varepsilon$, bei denen zwischen $u$ und $v$ die Relation besteht $v=2iF(u)$. Multipliziert man also den vektoriellen Teil der Zahl $w$ eines Speeres $s$ von $Q$ mit $e^{i\mu}$, so erhält man die duale Zahl eines Speeres von $\overline{Q}$; bezeichnet man letztere Zahl jetzt mit $w'$, den zugehörigen Speer mit $s'$, so hat man unter Benützung des in Formel (21) eingeführten Symbols: $w'=\mathfrak{A}_\lambda(w)$, wobei $\lambda=e^{i\mu}$ ist.

Die zu $w'=\mathfrak{A}_\lambda(w)$ gehörige Transformation, welche die Speere $s=(w)$ von $Q$ in entsprechende Speere $s'=(w')$ von $\overline{Q}$ überführt, kann nun durch eine sehr einfache Konstruktion hergestellt werden. Die zu $w$



Digitized by Google

gehörigen Minimalebenen erleiden mit Rücksicht auf (35) eine zentrale Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum $O$ und dem Modul $\lambda = e^{\mu i}$; die Speere $s$ dieser Minimalebenen werden nach der folgenden Konstruktion transformiert: Man ziehe parallel zu $s$ durch $O$ einen Speer $s_0$ und drehe sodann $s$ um $s_0$ im positiven Sinne um den Winkel $\mu$; der so gewonnene Speer ist dann der gesuchte $s'$, in welchen $s$ durch die Transformation $w' = \mathfrak{A}_\lambda(w)$ übergeht.

Die Richtigkeit dieser Konstruktion ergibt sich ohne Mühe aus der in § 8 angegebenen Lösung der Aufgabe, zu einer gegebenen dualen Zahl den zugehörigen Speer zu ermitteln. Die Konstruktion, durch welche oben aus $s$ der transformierte Speer $s'$ gefunden wurde, soll kurz als eine Schwenkung des Speeres $s$ aus dem Punkte $O$ um den Winkel $\mu$ bezeichnet werden. Analog wird die Schwenkung aus anderen Punkten definiert.

Aus einer zu $K$ gehörigen isotropen Kongruenz $Q$ erhält man isotrope Kongruenzen, deren Mittelenveloppen die assoziierten Flächen von $K$ sind, durch Schwenkung um konstante Winkel aus $O$ (oder aus irgend einem anderen Punkt des Raumes, da der Koordinatenursprung ja beliebig geändert werden kann).

### § 19. Besondere endliche Gruppen von Speertransformationen.

Eine gebrochen-lineare Substitution einer dualen Variablen $w$: $w' = \dfrac{a\,w + b}{c\,w + d}$ stellt eine Transformation der Minimalebenen dar, welche einer (im allgemeinen) komplexen Bewegung des Raumes entspricht. Diese Transformationen hängen von sechs wesentlichen komplexen Parametern ab. (Vgl. § 9.)

Zugleich stellt obige Transformation, da jede Minimalebene durch ihren Speer repräsentiert wird, eine reelle Transformation der Speere des Raumes vor. Die Gruppe dieser Transformationen enthält $6 \times 2 = 12$ reelle Parameter (denn ein komplexer Parameter ist zwei reellen äquivalent); diese Gruppe möge mit $\Gamma_{12}$ bezeichnet werden[1]).

Die reellen Bewegungen des Raumes und damit der Minimalebenen ergeben wieder (reelle) Bewegungen der Speere. Die Gruppe der Bewegungen des Speerraumes enthält sechs reelle Parameter und ist eine Untergruppe $\Gamma_6$ von $\Gamma_{12}$.

Von den nicht in $\Gamma_6$ enthaltenen Transformationen von $\Gamma_{12}$ ist eine gewisse dreigliedrige Gruppe in § 17 aufgetreten, welche nämlich den rein imaginären Translationen des Raumes entspricht; sie wird gebildet von den sogenannten Querschiebungen.

[1]) Über diese Gruppe ist zu vergleichen: E. v. Weber, Die komplexen Bewegungen. (Berichte der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1903.) Diese Gruppe gehört — wie aus dem Obigen unmittelbar hervorgeht — zu den dual-konformen Transformationen des § 14.

Digitized by Google

Invariant gegenüber den Transformationen von $\Gamma_{12}$ bleibt offenbar das Doppelverhältnis der zu vier Speeren[1]) gehörigen dualen Zahlen; und man kann dieses Doppelverhältnis als das Doppelverhältnis der vier Speere ansehen, wobei aber zu beachten ist, daß der vektorielle Teil dieses Doppelverhältnisses sich mit einem konstanten Faktor multipliziert, wenn man die in § 8 zu Grunde gelegte Zuordnung zwischen den dualen Zahlen einerseits und den Minimalebenen und Speeren anderseits durch eine andere Zuordnung ersetzt. (Vgl. § 5.)

Die Gesamtheit aller Speere $s$, welche mit drei festen Speeren $s_1$, $s_2$, $s_3$, von denen keine zwei parallel sind, ein rein skalares Doppelverhältnis bestimmen, wird gegeben durch die Speere des durch $s_1$, $s_2$, $s_3$ bestimmten Zyklus. (Es gibt nur einen solchen Zyklus, dem $s_1$, $s_2$, $s_3$ angehören, denn die Minimalebenen von $s_1$, $s_2$, $s_3$ haben einen Punkt gemein und dieser ist dann der Kernpunkt des Zyklus.)

Irgend vier Speere eines Zyklus haben ein rein skalares Doppelverhältnis.

Analog gibt es Kongruenzen von Speeren von der Eigenschaft, daß irgend vier Speere einer solchen Kongruenz ein Doppelverhältnis bestimmen, welches reell-dual ist, d. h. von $i$ frei ist. Eine derartige Kongruenz wird erhalten, wenn man einen Speer $s$ um einen (nicht zu $s$ parallelen) festen Speer $s_0$ in beliebiger Weise schraubt. Eine solche Kongruenz möge als Wirbel[2]) bezeichnet werden. Man kann einen Wirbel von Speeren auch definieren als Gesamtheit aller Speere, die mit einem festen Speer denselben dualen Winkel bilden. Bildet man nach § 11 die Speere des Raumes auf die dualen Punkte der Zahlenkugel ab, so entspricht den Speeren eines Wirbels ein ebener Schnitt der Kugel mit einer „dualen Ebene", also ein „dualer Kreis".

(Die Eigenschaft des Wirbels, daß irgend vier seiner Speere ein reell-duales Doppelverhältnis haben, gilt aber keineswegs für alle Klassen von Zuordnungen von Speeren und dualen Zahlen, da beim Übergang von der in (30) angenommenen Zuordnung zu einer Zuordnung einer anderen Klasse der vektorielle Teil des Doppelverhältnisses mit einem Faktor multipliziert wird, welcher ja im allgemeinen Fall die imaginäre Einheit enthalten kann.)

Eine andere bemerkenswerte Mannigfaltigkeit von Speeren besitzt die Eigenschaft, daß irgend vier Speere derselben

---

[1]) Diese werden im folgenden stets so gewählt gedacht, daß das zugehörige Doppelverhältnis einen völlig bestimmten Wert besitzt.

[2]) Herr E. Study gebraucht für das analoge Gebilde in der Nicht-Euklidischen Geometrie das Wort: „zyklische Kongruenz". (Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, 1902: Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie, S. 333.) Hier müssen wir, um Verwechslungen vorzubeugen, diese Benennung vermeiden.

Digitized by Google

ein rein skalares und reelles Doppelverhältnis haben; letzteres ist also eine gewöhnliche reelle Zahl. Man erhält eine solche Mannigfaltigkeit, wenn man einen Speer $s$ um einen festen Speer $s_0$ derart bewegt, daß man ihn um $s_0$ im positiven Sinne um den Winkel $t$ dreht und zugleich parallel zu $s_0$ im positiven Sinne um $(b \sin t)$ verschiebt; wobei $t$ ein veränderlicher Parameter, $b$ ein konstanter Proportionalitätsfaktor ist. Diese Mannigfaltigkeit von $\infty^1$ Speeren soll als eine Kette von Speeren bezeichnet werden. Die besondere Art der Bewegung um $s_0$, welcher oben der Speer $s$ unterworfen wurde, kann man mit dem Namen „Umschwungsbewegung" belegen; alle Punkte des Raumes beschreiben bei dieser Bewegung Ellipsen, welche sich auf irgend eine zu $s_0$ senkrechte Ebene als konzentrische Kreise projizieren, deren Mittelpunkt auf $s_0$ liegt. (Diese Umschwungsbewegung stellt sich dar als ein Grenzfall der allgemeinen Darboux-Mannheimschen Bewegung, welche die allgemeinste Bewegung ist, bei der alle Punkte Ellipsen beschreiben.)[1])

Aus der Invarianz des Doppelverhältnisses von vier Speeren gegenüber der Gruppe $\Gamma_{12}$ ergibt sich unmittelbar, daß durch die Transformationen dieser Gruppe Zyklen in Zyklen, Wirbel in Wirbel, Ketten in Ketten übergeführt werden.

Transformiert man eine duale Variable $w$ nach der Gleichung

$$w' = \mathfrak{A}_i \left( \frac{a w + b}{c w + d} \right),$$

so werden die zu den verschiedenen $w$ gehörigen Minimalebenen nach § 9 einer Ähnlichkeitstransformation unterworfen. Die von allen solchen Transformationen gebildete Gruppe hängt von 7 komplexen Parametern ab. Die entsprechende Gruppe von reellen Transformationen der Speere, die zu den verschiedenen Minimalebenen gehören, enthält demgemäß 14 reelle Parameter und sei mit $\Gamma_{14}$ bezeichnet. In $\Gamma_{14}$ sind insbesondere auch jene Transformationen enthalten, welche in § 18 betrachtet und als Schwenkungen (aus einem bestimmten Punkt um einen bestimmten Winkel) bezeichnet worden sind. Durch die Gruppe $\Gamma_{14}$ werden die Doppelverhältnisse von irgend vier Speeren (vgl. § 5) derart modifiziert, daß ihre skalaren Teile ungeändert bleiben, die vektoriellen Teile aber mit einem konstanten Faktor multipliziert werden.

---

[1]) Vgl. in Koenigs „Leçons de Cinématique (Paris 1897, p. 352) die Note von Darboux sowie auch A. Grünwalds Abh. in der Zeitschrift für Math. u. Physik (1906): „Die Mannheim-Darbouxsche Umschwungsbewegung eines starren Körpers". Die allgemeinste Bewegung dieser Art erhält man beim inwendigen Abrollen eines geraden Kreiszylinders vom Durchmesser $a$ auf einem doppelt so weiten (unter Gestattung des Gleitens nur in der Richtung der Zylindererzeugenden), wenn hiebei ein mit dem ersten Zylinder starr verbundener Punkt auf einer mit dem zweiten Zylinder fest verbundenen Ebene zu bleiben gezwungen wird. Die „Umschwungsbewegung" im Texte entspricht dem Grenzfall $a = 0$.

Digitized by Google

Dementsprechend werden durch die Transformationen von $\Gamma_{14}$ zwar stets Zyklen in Zyklen, Ketten in Ketten übergeführt, aber im allgemeinen Wirbel **nicht** wieder in Wirbel. Ein Wirbel geht vielmehr in eine Kongruenz über, welche durch Rotation eines Büschels von parallelen Speeren um eine feste Achse erzeugt werden kann und in Ermangelung eines passenderen Namens ein Rotationsfeld von Speeren genannt werden soll. [1])

Die Gruppen $\Gamma_{12}$ und $\Gamma_{14}$ können noch durch Adjunktion der Transformation $w' = \overline{w}$, wobei $\overline{w}$ die zu $w$ konjugiert-imaginäre Zahl ist [welche aus $w$ entsteht, indem man $i$ mit $(-i)$ vertauscht], erweitert werden zu den gemischten Gruppen $\overline{\Gamma}_{12}$ und $\overline{\Gamma}_{14}$.

Statt der oben angenommenen Transformation, könnte man jene adjungieren, welche durch $w' = -\frac{1}{\overline{w}}$ dargestellt wird und nach (51) jeden Speer in einen entgegengesetzten auf derselben Geraden verwandelt. Das Verhalten der Zyklen, Ketten und Wirbel von Speeren gegenüber $\overline{\Gamma}_{12}$ und $\overline{\Gamma}_{14}$ ist völlig analog dem Verhalten bei $\Gamma_{12}$ und $\Gamma_{14}$.

## § 20. Schlußbemerkung.

Im Vorangehenden ist in knappen Umrissen die Anwendung der dualen Zahlen auf die Geometrie der Speere im Raume behandelt, und zwar in keineswegs erschöpfender Weise. Gewisse geometrische Betrachtungen führen dazu, von dem Begriff des Speeres, d. i. einer reellen eigentlichen Geraden mit Durchlaufungssinn, zu einem allgemeineren Begriffe, dem der „orientierten", reellen oder imaginären Geraden aufzusteigen. Diese lassen sich, ähnlich wie die Speere, durch gewöhnliche duale Zahlen $w = u + v\varepsilon$, durch höhere komplexe Zahlen von der Form: $a + bj + c\varepsilon + d\varepsilon j$ darstellen, wobei $j^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$ ist und $a$, $b$, $c$, $d$ gewöhnliche komplexe Zahlen sind. (Diese höheren komplexen Zahlen finden sich in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II A 4, in dem Bericht über: Höhere komplexe Größen, S. 167, als letzter imaginär-reduzibler Typus bei der dort gegebenen Aufzählung, ohne Nummer.) Anderseits lassen sich die orientierten Geraden auf die Punkte einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit $M^{(4)}$ in einem vierzehndimensionalen Raume $R^{(14)}$ derart abbilden, daß den Speeren, d. i. den reellen orientierten Geraden, die reellen Punkte von $M^{(4)}$ entsprechen und die in § 19 mit $\Gamma_{12}$, $\Gamma_{14}$, $\overline{\Gamma}_{12}$, $\overline{\Gamma}_{14}$ bezeichneten Gruppen von Speertransformationen als Kollineationen von $M^{(4)}$ in sich abgebildet werden.

[1]) Die naheliegende Bezeichnung „Quirl" von Speeren dürfte wohl mit Rücksicht auf die anderweitige Verwendung dieser Bezeichnung bei Herrn E. Study nicht ganz frei von Bedenken sein.

Digitized by Google

Durch diese Abbildung gelangt man dazu, die Mannigfaltigkeit der orientierten Geraden in zweckmäßiger Weise zu einem abgeschlossenen Kontinuum zu ergänzen. Begreiflicherweise ist dieses Kontinuum sowohl von jenem der Plückerschen Geraden als auch von jenem der Study schen Strahlen verschieden.

Die metrischen Beziehungen in der Mannigfaltigkeit der orientierten Geraden können dadurch eingeführt werden, daß man einen gewissen „Wirbel" von imaginären orientierten Geraden festlegt, ähnlich wie im projektiven Punktraume die metrischen Beziehungen dadurch eingeführt werden, daß man einen Kegelschnitt, den absoluten Kugelkreis, auszeichnet.

Die nähere Darlegung dieser Untersuchungen soll für eine spätere Gelegenheit aufgespart werden.

Digitized by Google

# Über die zur dritten Stufe gehörigen hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde.

Von **Alfred Berger** in Wien.

Anschließend an eine Darstellung der hypergeometrischen Funktion als eindeutiger Funktion der durch $x = k^2(\tau)$ definierten elliptischen Modulfunktion, wobei $\tau$ das Periodenverhältnis und $k^2$ den zugehörigen Legendreschen Modul [1]) bedeutet, hat Wirtinger eine weitere Verallgemeinerung der hypergeometrischen Integrale gefunden.

Hervorgegangen ist diese aus dem Versuche, auch auf algebraischen Gebilden höheren Geschlechtes Funktionen zu definieren, welche dem hypergeometrischen Integral analog sind.

In der erwähnten Arbeit wird nun gezeigt, daß sich das gewöhnliche hypergeometrische Integral

$$P(x) = \int_0^1 z^\alpha (1-z)^\beta (1-x.z)^\gamma dz$$

in die Gestalt

$$P(x) = 4x^{\frac{\beta-\alpha}{2}}(1-x)^{\frac{\gamma-\beta}{2}} K \int_0^{\frac{1}{2}} \vartheta_{11}^{2\alpha+1}(u)\,\vartheta_{10}^{2\beta+1}(u)\,\vartheta_{00}^{2\gamma+1}(u)\,\vartheta_{01}^{2\delta+1}(u).du$$

umsetzen läßt, wobei

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = -2$$

und

$$K = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-xz)}}$$

die erste Periode des elliptischen Integrals erster Gattung bedeutet. Auf Grund der l. c. aufgestellten Formel läßt sich dann die ganze Theorie der hypergeometrischen Funktion aus der Theorie der elliptischen Thetafunktionen entwickeln.

[1]) W. Wirtinger, „Zur Darstellung der hyperg. Funktion durch bestimmte Integrale". Sitzungsb. d. Wiener Akad. CXI. II a. Juli 1902.

Digitized by Google

Von hier aus ergab sich nun einerseits, daß man bei der erwähnten Verallgemeinerung passende Integrale als Funktionen der Moduln des algebraischen Gebildes betrachten müsse; anderseits aber ergab sich auch eine Verallgemeinerung für das elliptische Gebilde selbst, indem es nahe lag, Integrale zu betrachten, welche in ähnlicher Weise aus Theta- oder Sigmafunktionen mit $n^{\text{tel}}$ Charakteristiken gebildet sind, wie das erwähnte Integral aus den gewöhnlichen Theta mit Charakteristiken, welche Hälften ganzer Zahlen sind.

Die Resultate, welche sich bei Untersuchung dieser neuen Transzendenten ergeben, hat Wirtinger[1]) in zwei der Wiener Akademie überreichten Arbeiten veröffentlicht.

Im folgenden sollen nun diese allgemeinen Resultate für den Fall $n = 3$ im einzelnen durchgeführt werden. Vorher jedoch seien die wesentlichsten, für das Folgende in Betracht kommenden Punkte kurz angeführt.

## I.

### § 1. Gegenstand und Aufgabe der folgenden Untersuchungen

Wir setzen unter der Bedingung $\sum_{\lambda,\mu} k_{\lambda,\mu} = 0$

$$P = \prod_{\lambda,\mu} \sigma_{\lambda,\mu}^{k_{\lambda,\mu}}(u/\omega_1, \omega_2) \quad (\lambda, \mu = 0, 1 \ldots n-1). \tag{1}$$

Hier bedeutet $\sigma_{\lambda,\mu}(u/\omega_1, \omega_2)$ die elliptische Sigmafunktion mit den Charakteristiken $\frac{\lambda}{n}, \frac{\mu}{n}$ in der Bezeichnung von Klein-Fricke, Modulfunktionen, Bd. II, p. 23, und $n$ ist als ungerade Primzahl vorausgesetzt. Es sei hier noch erwähnt, daß für das Folgende alle vorkommenden Bezeichnungen in Übereinstimmung mit dem oben erwähnten Werke gewählt sind.

Betrachten wir nun die zwischen irgend zwei $n^{\text{tel}}$ Perioden unter Vermeidung singulärer Stellen, sonst aber beliebig erstreckten Integrale

$$\int_{\frac{\Omega}{n}}^{\frac{\Omega'}{n}} P\,du, \tag{2}$$

so gelten folgende Sätze:

I. Alle durch (2) definierten Formen sind linear und homogen durch $n^2$ unter ihnen darstellbar, welche linear unabhängig sind.

[1]) W. Wirtinger, Eine neue Verallgemeinerung der hyperg. Integrale. Sitzungsb. d. Wiener Akad. CXII. II. a. Dezember 1903; über die Anzahl der linear unabh. hypergeometrischen Integrale $n^{\text{ter}}$ Stufe; ebenda CXIV. II. a. Dezember 1905.

Digitized by Google

II. Die durch (2) definierte Formenschar geht bei einer Transformation der Hauptkongruenzgruppe nach dem Modul $n$ wohl als Ganzes in sich über, dagegen aber vertauschen sich die einzelnen Formen untereinander und insbesondere gehen daher $n^2$ linear unabhängige Formen bei einer solchen Abänderung über in $n^2$ neue Formen, welche ebenfalls linear unabhängig sind und sich durch die alten linear und homogen mit von $\omega_1$, $\omega_2$ unabhängigen Koeffizienten ausdrücken lassen.

Die Formen dieser Schar haben also gegenüber den Substitutionen der Hauptkongruenzgruppe mod $n$ die Eigenschaften eines Systems polymorpher Formen.

Nennt man zwei Formenscharen verwandt, wenn ihre $k_{\lambda,\mu}$ sich nur um ganze Zahlen $a_{\lambda,\mu}$ unterscheiden, welche den Bedingungen $\sum a_{\lambda,\mu} = 0, \sum \lambda a_{\lambda,\mu} \equiv \sum \mu a_{\lambda,\mu} \equiv 0 \pmod{n}$ genügen, und bezeichnet Formen verschiedener Exponentensysteme als korrespondierend, wenn sie durch Integration auf demselben Wege gewonnen werden, so hat man den Satz:

III. Zwischen den korrespondierenden Formen von $n^2+1$ verwandten Formenscharen besteht immer eine homogene lineare Relation, deren Koeffizienten eindeutige Modulfunktionen $n^{\text{ter}}$ Stufe sind.

Genau wie im Falle der gewöhnlichen hypergeometrischen Funktion erscheint auch hier als spezieller Fall von Satz III der folgende:

IV. Als Funktionen einer zur $n^{\text{ten}}$ Stufe gehörigen Modulfunktion genügt eine passend normierte Form (2) einer linearen Differentialgleichung von der Ordnung $n^2$, deren Koeffizienten ebenfalls Modulfunktionen der $n^{\text{ten}}$ Stufe sind.

Es sollen nun für den Fall $n = 3$ im folgenden Relationen der besprochenen Art zwischen verwandten Formen tatsächlich aufgestellt werden. Weiters wäre die Gestalt der linearen Differentialgleichung neunter Ordnung, der die Form unter (2) für $n = 3$ genügt, zu ermitteln.

Diese letztere Aufgabe kommt aber ersichtlich darauf hinaus, ein System von neun linearen Differentialgleichungen erster Ordnung aufzustellen. Gelingt es nämlich für neun passend zu wählende verwandte Formen neun lineare homogene Relationen zu finden, vermittels deren sich die ersten Derivierten der Formen nach einer zur dritten Stufe gehörigen Modulfunktion durch diese Formen selbst darstellen lassen, so wäre dies eine vollständige Lösung des gestellten Problems. Die Aufstellung der Differentialgleichung selbst wäre dann nur eine einfache Eliminationsaufgabe.

Digitized by Google

Aufgabe des Folgenden ist also die Aufstellung eines solchen Systems von neun linearen Differentialgleichungen. Dabei wird das Hauptgewicht auf die passende Wahl der neun Verwandten zu legen sein. Zu diesem Behufe jedoch gilt es vorerst eine ganze Reihe von Relationen zu berechnen, die teils zwischen den Sigmafunktionen mit Drittel-Charakteristiken, teils zwischen diesen und anderen Modulfunktionen dritter Stufe bestehen.

## II. Vorbereitende Formeln.

### § 2. Formeln zwischen den σ-Teilwerten.

Wir bezeichnen $\sigma_{\lambda,\mu}(u/\omega_1, \omega_2)$ als σ-Teilwert und halten im folgenden stets an der abgekürzten Schreibweise

$$\sigma_{\lambda,\mu} \equiv \sigma_{\lambda,\mu}(0/\omega_1, \omega_2)$$

fest. Die hier zu Grunde gelegte Normierung der σ-Teilwerte, vermöge der das einzelne $\sigma_{\lambda,\mu}$ als algebraische Modulform erscheint, ist die von Klein eingeführte. [1]) Dieselbe stimmt bis auf einen Faktor mit der Normierung von Bianchi [2]) überein, die speziell für unseren Fall $n = 3$ aufgestellt ist. Wir setzen also mit Klein-Fricke, Modulfunktionen, Bd. II, S. $23_{;6}$

$$\sigma_{\lambda,\mu}(u/\omega_1, \omega_2) = e^{\frac{\lambda\eta_1 + \mu\eta_2}{3}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{2.3}\right)}\,\sigma\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}/\omega_1, \omega_2\right).$$

Die Zahl der wesentlich verschiedenen Teilwerte für $u = 0$ beträgt hier vier, und zwar findet man leicht unter Benützung von Modulfunktionen, Bd. I, S. 117, Bd. I, S. 156

$$\sigma_{0,2} = \sigma_{0,1} \qquad \sigma_{2,0} = \sigma_{1,0} \qquad \sigma_{2,2} = \sigma_{1,1}$$

$$\sigma_{2,1} = e^{\frac{i\pi}{3}}\sigma_{1,2} = -\varepsilon^{-1}\sigma_{1,2}, \tag{3}$$

wobei $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \varepsilon$.

Weiter haben wir nach Modulfunktionen, Bd. II, S. $26_{;8}$ die Formeln

$$\sigma_{\lambda+an,\,\mu+bn}(u/\omega_1, \omega_2) = (-1)^{a^2+ab+b^2}\, e^{-\frac{\pi i}{n}(a\mu - b\lambda)}\,\sigma_{\lambda,\mu}(u/\omega_1, \omega_2) \tag{4}$$

[1]) F. Klein, Über die ell. Normalkurven ... Abh. d. kgl. sächsischen Akad. d. W., Leipzig. Bd. 13. Nr. 4. 1885.

[2]) L. Bianchi, Über die Normalformen 3. u. 5. Stufe des ell. Integrals I. Gattung. Math. Annal., Bd. 17.

Digitized by Google

und nach Modulfunktionen, Bd. II, S. 27,7

$$(5) \qquad \sigma_{\lambda,\mu}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \sigma_{\alpha\lambda+\gamma\mu,\,\beta\lambda+\delta\mu}.$$

Nach dem Hermiteschen Satze ist jedes $n$-gliedrige $\sigma$-Produkt von der Residuensumme $s$, das wir etwa $x'$ nennen mögen, linear und homogen in den $n$ linear unabhängigen $\sigma$-Produkten $x_i$ darstellbar in der Form

$$x' = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

wobei die Koeffizienten $\alpha_i$ von $u$ unabhängig sind. Stimmt die Residuensumme von $x'$ mit der von $x_i$ nur bis auf ganze Vielfache der Perioden überein, so werden erst die Produkte von $x'$ mit einem gewissen Exponentialfaktor lineare Funktionen der $x_i$ von obiger Gestalt. Die Koeffizienten dieser Relationen lassen sich dann dadurch bestimmen, daß man in der zunächst mit unbestimmten Koeffizienten angesetzten Relation der Variablen nacheinander eine genügende Anzahl geeigneter spezieller Werte beilegt und die Koeffizienten aus den sich ergebenden linearen Gleichungen berechnet.

Unter Benützung dieses Satzes können wir also schreiben

$$c_1\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u) + c_2\,\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{2,2}(u) = \sigma^2(u).$$

Für $u$ setzen wir geeignet gewählte Drittelperioden, nämlich

$$u = \frac{\omega_1}{3} \quad \text{und} \quad u = \frac{\omega_1 + \omega_2}{3}.$$

Dies ergibt

$$c_2 = \frac{\sigma^2\left(\frac{\omega_2}{3}\right)}{\sigma_{1,1}\left(\frac{\omega_2}{3}\right)\sigma_{2,2}\left(\frac{\omega_2}{3}\right)} = \frac{\sigma_{0,1}^2}{\sigma_{1,0}\,\sigma_{1,2}};$$

$$c_1 = \frac{\sigma^2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{3}\right)}{\sigma_{0,1}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{3}\right)\sigma_{0,2}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{3}\right)} = -\frac{\sigma_{1,1}^2}{\sigma_{1,0}\,\sigma_{1,2}}.$$

Demnach erhalten wir unter Benützung der Formeln (3)

$$(6) \quad -\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\,\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} + \frac{1}{\sigma_{1,1}\sigma_{2,2}}\,\frac{\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{2,2}(u)}{\sigma^2(u)} = \frac{\sigma_{1,0}\,\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\,\sigma_{1,1}^2}.$$

Digitized by Google

Indem wir diese Gleichung mit $S = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1 + \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_2 \end{vmatrix}$ transformieren, erhalten wir unter Benützung von (4) und (5)

$$(6a) \quad -\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}} \frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} + \frac{1}{\sigma_{1,2}\sigma_{2,1}} \frac{\sigma_{1,2}(u)\,\sigma_{2,1}(u)}{\sigma^2(u)} = \varepsilon^{-1} \frac{\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,2}^2}$$

und indem wir nochmals mit $S$ transformieren,

$$(6b) \quad -\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}} \frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} + \frac{1}{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}} \frac{\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{2,0}(u)}{\sigma^2(u)} = \varepsilon^{-2} \frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,0}^2}.$$

Dabei sei bemerkt, daß wir die unter (3) angeführten Reduktionen überall dort nicht anwenden, wo dadurch die Symmetrie der Formeln leiden würde.

In ganz analoger Weise bilden wir die Relation

$$\sigma^3(u) + c_1\,\sigma_{0,1}^3(u) + c_2\,\sigma_{0,2}^3(u) + c_3\,\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u) = 0.$$

Wir erhalten für $u = 0$, $u = \frac{\omega_2}{3}$, $u = \frac{\omega_1}{3}$

$$c_2 = 1 \quad c_1 = -1$$

$$c_3 = \frac{\sigma_{1,0}^3 + \varepsilon^{-1}\sigma_{1,2}^3 + \varepsilon^{-2}\sigma_{1,1}^3}{\varepsilon^{-2}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}.$$

Demnach erhalten wir

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sigma^3(u) - \sigma_{0,1}^3(u) + \sigma_{0,2}^3(u) + \\ &+ \frac{\varepsilon^{-1}\sigma_{0,1}^3 + \varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}^3 + \sigma_{1,1}^3}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}\,\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u) = 0. \end{aligned} \right.$$

Nach Modulfunktionen, Bd. II, S. 30,7 gelten aber die Gleichungen

$$(8) \quad \xi - 1 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{0,1}}\right)^3, \quad \varepsilon^2\xi - 1 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{1,1}}{\sigma_{0,1}}\right)^3,$$

$$\varepsilon\xi - 1 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}}\right)^3.$$

Digitized by Google

Dabei bedeutet $\xi$ die Tetraederirrationalität als Modulform dritter Stufe.

Unter Benützung von (8) schreiben wir (7) in der Gestalt

$$(7a)\quad \sigma^3(u) - \sigma_{0,1}^3(u) + \sigma_{0,2}^3(u) + \frac{3\varepsilon^2\xi}{\sqrt[3]{\xi^3-1}}\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u) = 0.$$

Eine weitere Relation, die wir benötigen, ist die folgende:

$$\sigma^3(u) + c_0\,\sigma_{0,2}^3(u) + c_1\,\sigma_{2,0}^3(u) + c_2\,\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u) = 0.$$

Für $u=0$, $u=\frac{2\omega_2}{3}$, $u=\frac{\omega_1}{3}$ ergibt sich

$$c_1 = -\varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{0,1}^3}{\sigma_{1,2}^3} \qquad c_0 = \varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,0}^3}{\sigma_{1,2}^3}$$

$$c_3 = -\frac{\varepsilon^{-1}\dfrac{\sigma_{1,0}^3}{\sigma_{1,2}^3}\cdot\sigma_{1,1}^3 - \varepsilon^{-2}\dfrac{\sigma_{0,1}^3}{\sigma_{1,2}^3}\sigma_{1,0}^3 - \sigma_{1,0}^3}{\varepsilon^{-2}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}.$$

Unsere gesuchte Relation lautet also

$$(9)\quad \frac{1}{\sigma_{0,1}^3}\frac{\sigma_{0,2}^3(u)}{\sigma^3(u)} - \frac{1}{\sigma_{1,0}^3}\frac{\sigma_{2,0}^3(u)}{\sigma^3(u)} - \frac{\varepsilon^{-1}\sigma_{0,1}^3 + \sigma_{1,1}^3 + \varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} +$$

$$+\varepsilon^{-1}\frac{\sigma_{1,2}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,0}^3} = 0.$$

Wir erhalten ferner aus der Relation (6*b*) indem wir mit $\frac{1}{\sigma_{1,0}}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}$ und $\frac{1}{\sigma_{0,1}}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}$ multiplizieren

$$-\frac{1}{\sigma_{0,1}}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}\cdot\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} + \frac{1}{\sigma_{1,0}^3}\frac{\sigma_{2,0}^3(u)}{\sigma^3(u)} =$$

$$= \varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,0}^2}\cdot\frac{1}{\sigma_{1,0}}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}$$

Digitized by Google

$$\frac{1}{\sigma_{0,1}}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)}\cdot\frac{1}{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}}\frac{\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,0}(u)}{\sigma^2(u)}-\frac{1}{\sigma_{0,1}^3}\frac{\sigma_{0,2}^3(u)}{\sigma^3(u)}=$$

$$=\varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,0}^2}\cdot\frac{1}{\sigma_{0,1}}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,2}(u)}.$$

Aus diesen beiden Relationen erhalten wir unter Benützung von (9)

$$\frac{1}{\sigma_{0,1}}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)}\cdot\frac{1}{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}}\frac{\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,0}(u)}{\sigma^2(u)}-\frac{1}{\sigma_{1,0}}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,0}(u)}\times$$

$$(10)\qquad\times\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}=\varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,0}^3}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,0}(u)}+$$

$$+\varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,0}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)}+\frac{\sigma_{1,1}^3+\varepsilon^{-1}\sigma_{0,1}^3+\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}-\varepsilon^{-1}\frac{\sigma_{1,2}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,0}^3}.$$

Für unsere späteren Relationen brauchen wir noch zwei Relationen, nämlich

$$c_0\frac{\sigma_{0,1}(u)\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}+c_1\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)}+c_2\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,0}(u)}+$$

$$+c_3=\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,0}(u)}$$

oder

$$c_0\sigma_{0,1}^2(u)\sigma_{0,2}(u)\sigma_{1,0}(u)+c_1\sigma_{0,2}^2(u)\sigma(u)\sigma_{1,0}(u)+$$

$$+c_2\sigma_{2,0}^2(u)\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)+c_3\sigma^2(u)\sigma_{0,1}(u)\sigma_{1,0}(u)=\sigma_{0,2}^2(u)\sigma_{2,0}^2(u).$$

Für $u=0$, $u=\frac{\omega_1}{3}$, $u=\frac{\omega_2}{3}$, $u=\frac{2\omega_2}{3}$ erhalten wir

$$c_0=\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{0,1}},\quad c_1=\frac{\varepsilon\sigma_{1,1}^2}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,2}},\quad c_2=-\frac{\sigma_{1,1}^2}{\sigma_{1,0}\sigma_{1,2}},\quad c_3=\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}}.$$

Digitized by Google

Demnach erhalten wir die gesuchte Gleichung in der Gestalt:

$$\frac{\sigma_{0,2}^2(u)\,\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma^3(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{1,0}(u)} = \frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{0,1}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} + \varepsilon\frac{\sigma_{1,1}^2}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,2}}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma(u)} -$$

(11)

$$-\frac{\sigma_{1,1}^2}{\sigma_{1,0}\sigma_{1,2}}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)} - \frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}}.$$

Aus dieser Relation sind durch Transformation der Perioden achtundzwanzig weitere völlig analoge Relationen leicht zu bilden.

Wenn wir endlich auf Relation (10) zweimal die Transformation $S$ anwenden, dabei aber zugleich mittels der Gleichungen (6) reduzieren, so erhalten wir

$$-\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\left(\frac{1}{\sigma_{1,0}}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)} + \varepsilon^{-2}\frac{1}{\sigma_{1,1}}\frac{\sigma_{2,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,1}(u)} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{-1}\frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,1}^2}\frac{\sigma_{2,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,2}(u)}\right)\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} = \varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,0}^3}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)} +$$

$$+ \varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,0}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,1}^3}\frac{\sigma_{2,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,1}(u)} + \frac{\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,2}^3}\frac{\sigma_{2,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,2}(u)} +$$

(12)

$$+\left(2\varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,0}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,1}^2} + 2\varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,0}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,2}^2}\right)\frac{1}{\sigma_{0,1}}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)} +$$

$$+2\frac{\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0}^3+\sigma_{1,1}^3+\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} - \varepsilon^{-1}\frac{\sigma_{1,2}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,0}^3} -$$

$$-\frac{\sigma_{1,0}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,1}^3} - \varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,2}^3}.$$

Die Relationen (6) bis (12) sind es nun, welche wir für das Folgende benötigen.

## § 3. Formeln betreffend die Tetraederirrationalität.

Wir hatten unter (8)

$$\xi - 1 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{0,1}}\right)^3.$$



Digitized by Google

Nach Modulfunktionen, Bd. I, p. $618_{,1}$ haben wir

$$\xi_1 = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}} \frac{\omega_2}{\sqrt{\frac{d\xi}{d\omega}}}, \quad \xi_2 = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}} \frac{\omega_2}{\sqrt{\frac{d\xi}{d\omega}}};$$

und weiter ist nach Modulfunktionen, Bd. I, p. $630_{,5}$

$$\xi_3 = \xi_1 \sqrt[6]{\Delta}, \quad \xi_4 = \xi_2 \sqrt[6]{\Delta},$$

wobei $\Delta$ in bekannter Weise durch

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

definiert ist. Benützen wir nach Modulfunktionen, Bd. II, p. $30_{,6}$ die Formel

$$\sigma_{1,0}^3 = \frac{\xi_3 - \xi_4}{-i\sqrt[3]{\Delta}},$$

so erhalten wir

$$\sigma_{1,0}^3 = \left[\sqrt[6]{\Delta} \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}} \frac{\omega_2}{\sqrt{\frac{d\xi}{d\omega}}} \left(i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{0,1}}\right)^3 - 1\right) - \sqrt[6]{\Delta} \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}} \frac{\omega_2}{\sqrt{\frac{d\xi}{d\omega}}}\right] \frac{1}{-i\sqrt[3]{\Delta}};$$

daraus

$$\frac{\omega_2 (1-i)}{-i\sqrt[6]{\Delta}\, 2\sqrt{\pi}} i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{0,1}}\right)^3 = \sqrt{\frac{d\xi}{d\omega}}\, \sigma_{1,0}^3$$

und daher

$$\frac{d\xi}{d\omega} = \frac{3i}{\sigma_{0,1}^6} \frac{\omega_2^2}{2\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}}. \tag{13}$$

## § 4. Formeln, betreffend die Ableitungen der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ nach $\omega$.

Um die Ableitung irgend eines Quotienten zweier $\sigma_{\lambda,\mu}$ nach $\omega$ in passender Weise durch die Ableitungen nach dem Argument $u$ darzustellen, benützen wir die Darstellung der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ durch die elliptischen $\vartheta$, da sich auf diesem Wege wohl am kürzesten die gewünschten Ausdrücke ergeben.

Digitized by Google

Wir schreiben mit Modulfunktionen, Bd. I, p. 161,

$$\sigma(u/\omega_1, \omega_2) = \frac{e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}}\,\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right), \quad r = e^{2\pi i \omega}.$$

Nachdem

$$\sigma_{\lambda,\mu}(u/\omega_1, \omega_2) = e^{\frac{\lambda\eta_1 + \mu\eta_2}{n}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{2n}\right)}\sigma\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}/\omega_1, \omega_2\right),$$

erhalten wir für $n = 3$ nach elementaren Reduktionen

$$\sigma_{\lambda,\mu}(u/\omega_1, \omega_2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}}\, e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2} - \frac{2\lambda\pi i}{3\omega_2}u + \frac{2\pi i}{18}(\lambda^2\omega + \lambda\mu)}\,\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right).$$

Um nun $\frac{\partial}{\partial\omega} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)$ zu erhalten, schreiben wir

$$l\sigma_{\lambda,\mu}(u) - l\sigma(u) = -\frac{2\lambda\pi i}{3\omega_2}u + \frac{2\pi i}{18}(\lambda^2\omega + \lambda\mu) +$$

$$+ l\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right) - l\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}u, r\right).$$

Daher ist

$$\frac{\partial}{\partial\omega} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) = \frac{2\pi i}{18}\lambda^2 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\omega} l\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right) - \frac{\partial}{\partial\omega} l\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}u, r\right).$$

Nachdem nun

$$\frac{\partial}{\partial\omega} l\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right) = \frac{\partial}{\partial\omega} l\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right) -$$

$$- \frac{\lambda\pi}{3}\frac{\partial}{\partial v} l\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right);$$



Digitized by Google

wobei der erste Differentialquotient rechts ohne Rücksicht auf das Argument genommen ist und $v = \frac{\pi u}{\omega_2}$, und unter Berücksichtigung der Identitäten

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\,\vartheta_1 = \frac{\pi}{4i}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\vartheta_1$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} l\,\vartheta_1 = \frac{\pi}{4i}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\vartheta_1 \cdot \frac{1}{\vartheta_1}$$

$$\frac{\vartheta_1''}{\vartheta_1} = \frac{\partial^2}{\partial v^2} l\,\vartheta_1 + \left[\frac{\partial}{\partial v} l\,\vartheta_1\right]^2$$

erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} l\,\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right) = -\frac{\lambda\pi}{3}\frac{\partial}{\partial v} l\,\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right) +$$

$$+ \frac{\pi}{4i}\frac{\partial^2}{\partial v^2} l\,\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right) +$$

$$+ \frac{\pi}{4i}\left[\frac{\partial}{\partial v}\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right)\right]^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} l \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}u, r\right)} =$$

$$= -\frac{\lambda\pi}{3}\frac{\partial}{\partial v} l\,\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right) +$$

$$+ \frac{\pi}{4i}\frac{\partial}{\partial v} l \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}u, r\right)}\left[\frac{\partial}{\partial v} l\,\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} l\,\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}u, r\right)\right] + \frac{\pi}{4i}\frac{\partial^2}{\partial v^2} l \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}\right), r\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\omega_2}u, r\right)}$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial}{\partial\omega} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) = -\frac{\lambda\omega_2}{3}\frac{\partial}{\partial u} l\sigma_{\lambda,\mu}(u) + \frac{\lambda\eta_2}{3}u - \frac{2\lambda^2\pi i}{18} + \frac{\omega_2^2}{4\pi i}\frac{\partial^2}{\partial u^2} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) +$$

$$+\frac{\omega_2^2}{4\pi i}\left[\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) + \frac{2\lambda\pi i}{3\omega_2}\right]\left[\frac{\partial}{\partial u} l\sigma_{\lambda,\mu}(u) + \frac{2\lambda\pi i}{3\omega_2} + \frac{\partial}{\partial u} l\sigma(u) - \frac{2\eta_2}{\omega_2}u\right].$$

Wenn wir nun gehörig reduzieren, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial\omega} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) = \frac{\omega_2^2}{4\pi i}\frac{\partial^2}{\partial u^2} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) + \frac{\omega_2^2}{4\pi i}\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) \times$$

(14)

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial u} l\sigma_{\lambda,\mu}(u) + \frac{\partial}{\partial u} l\sigma(u) - \frac{2\eta_2}{\omega_2}u\right].$$

Auf Grund von Gleichung (14) berechnen wir uns einen Determinantenausdruck, der nach einer Bemerkung von Wirtinger eine doppelt periodische Funktion darstellt. Unter der Bedingung, daß

$$\frac{\partial}{\partial u} l\Phi \text{ und } \frac{\partial}{\partial u} l\Psi$$

doppelt periodische Funktionen sind, ist nämlich auch

(15)
$$\frac{\partial}{\partial\omega} l\Phi\frac{\partial}{\partial u} l\Psi - \frac{\partial}{\partial u} l\Phi\frac{\partial}{\partial\omega} l\Psi$$

doppelt periodisch.

Nun hat $\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)$ die verlangte Eigenschaft. Demnach auch

$$\frac{\partial}{\partial\omega} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u) - \frac{\partial}{\partial\omega} l\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u).$$

Wenn wir nun Formel (14) anwenden, so erhalten wir für diese Determinante

$$\frac{\omega_2^2}{2\pi i}\left\{\frac{\partial^2}{\partial u^2} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u) - \frac{\partial^2}{\partial u^2} l\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) +\right.$$

(16)

$$\left. +\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma_{0,\mu}}(u)\right\},$$

aus welcher Gestalt die doppelte Periodizität sofort erhellt.

Digitized by Google

## § 5. Darstellung der $\frac{\partial}{\partial u} l \frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)$ durch elliptische Funktionen dritter Ordnung.

Zur Berechnung weiterer Hilfsgrößen müssen wir die von F. Klein l. c. normierten $X_\alpha$ heranziehen, die sich in unserem Falle $n=3$ auf die ebene Kurve dritter Ordnung beziehen, die sich ja in diesen Koordinaten als

$$X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 - 3\xi X_0 X_1 X_2 = 0$$

schreibt, wobei $\xi$ wieder die Tetraederirrationalität bedeutet.

Nach Modulfunktionen, Bd. II, S. 278, 280 ist $X_\alpha$ definiert durch

$$X_\alpha(u/\omega_1\ \omega_2) = (-1)^\alpha \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu} \prod_{\mu=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\alpha,\mu}(u)$$

$$X_\alpha(u/\omega_1\ \omega_2) = z_\alpha + y_\alpha u + x_\alpha \frac{u^2}{2} + \cdots,$$

wo $z_\alpha$, $y_\alpha$, $x_\alpha \ldots$ Modulformen $n^{\text{ter}}$ Stufe sind; demnach gilt für $n=3$

$$X_0(u/\omega_1\ \omega_2) = \sigma_{0,1}\sigma_{0,-1}(u)\,\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u) = -\sigma_{0,1}\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)$$

$$X_1(u/\omega_1\ \omega_2) =$$
$$= -\sigma_{0,1}\sigma_{1,-1}(u)\,\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{1,1}(u) = -\varepsilon^{-2}\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{1,2}(u)$$

$$X_2(u/\omega_1\ \omega_2) =$$
$$= \sigma_{0,1}\sigma_{2,-1}(u)\,\sigma_{2,0}(u)\,\sigma_{2,1}(u) = -\varepsilon^{-1}\sigma_{0,1}\sigma_{2,0}(u)\,\sigma_{2,1}(u)\,\sigma_{2,2}(u)$$

$z_\alpha$ und $y_0$ sind nach Modulfunktionen, Bd. II, S. 281 definiert durch

$$z_\alpha = (-1)^\alpha \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu} \prod_{\mu=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\alpha,\mu}, \quad y_0 = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu}^3.$$

Für $n=3$ also

$$z_1 = -\sigma_{0,1}\sigma_{1,-1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1} = -\varepsilon^{-2}\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}$$

$$z_2 = -z_1 = -\varepsilon^{-1}\sigma_{0,1}\sigma_{2,0}\sigma_{2,1}\sigma_{2,2} = \varepsilon^{-2}\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2};\ y_0 = -\sigma_{0,1}^3.$$

Digitized by Google

Nach Modulfunktionen, Bd. II, S. 283 können wir schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial u} l\sigma(u) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial u} l\sigma_{0,1}(u) + \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial u} l\sigma_{0,2}(u) = -\frac{y_0}{z_1} \frac{X_1(u)}{X_0(u)}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} l\sigma(u) + \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial u} l\sigma_{0,1}(u) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial u} l\sigma_{0,2}(u) = -\frac{y_0}{z_2} \frac{X_2(u)}{X_0(u)},$$

daher:

$$(17a)\quad \begin{cases} (\varepsilon^{-1}-1) \dfrac{\partial}{\partial u} l\dfrac{\sigma_{0,1}}{\sigma}(u) = \\ = \varepsilon^{-1} \dfrac{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}{\sigma_{2,0}\sigma_{2,1}\sigma_{2,2}} \dfrac{\sigma_{2,0}(u)\sigma_{2,1}(u)\sigma_{2,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)\sigma_{0,2}(u)} - \dfrac{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}{\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}} \dfrac{\sigma_{1,0}(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{1,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)\sigma_{0,2}(u)} \\ (\varepsilon^{-1}-1) \dfrac{\partial}{\partial u} l\dfrac{\sigma_{0,2}}{\sigma}(u) = \\ = \varepsilon^{-1} \dfrac{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}{\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}} \dfrac{\sigma_{1,0}(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{1,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)\sigma_{0,2}(u)} - \dfrac{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}{\sigma_{2,0}\sigma_{2,1}\sigma_{2,2}} \dfrac{\sigma_{2,0}(u)\sigma_{2,1}(u)\sigma_{2,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)\sigma_{0,2}(u)}. \end{cases}$$

Wir transformieren beide Gleichungen nacheinander vermittels der drei Transformationen

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1+\omega_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1+\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1+\omega_2 \end{vmatrix}.$$

Das gibt sechs weitere Gleichungen, nämlich

$$(17b)\quad \begin{cases} (\varepsilon^{-1}-1) \dfrac{\partial}{\partial u} l\dfrac{\sigma_{1,1}}{\sigma}(u) = \\ = \varepsilon^{-1} \dfrac{\sigma_{1,1}\sigma_{2,2}}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,2}\sigma_{2,0}} \dfrac{\sigma_{0,1}(u)\sigma_{1,2}(u)\sigma_{2,0}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{2,2}(u)} - \dfrac{\sigma_{1,1}\sigma_{2,2}}{\sigma_{0,2}\sigma_{1,0}\sigma_{2,1}} \dfrac{\sigma_{0,2}(u)\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,1}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{2,2}(u)} \\ (\varepsilon^{-1}-1) \dfrac{\partial}{\partial u} l\dfrac{\sigma_{2,2}}{\sigma}(u) = \\ = \varepsilon^{-1} \dfrac{\sigma_{1,1}\sigma_{2,2}}{\sigma_{0,2}\sigma_{1,0}\sigma_{2,1}} \dfrac{\sigma_{0,2}(u)\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,1}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{2,2}(u)} - \dfrac{\sigma_{1,1}\sigma_{2,2}}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,2}\sigma_{2,0}} \dfrac{\sigma_{0,1}(u)\sigma_{1,2}(u)\sigma_{2,0}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{2,2}(u)}. \end{cases}$$

Digitized by Google

$$(17c)\quad \begin{cases} (\varepsilon^{-1}-1)\dfrac{\partial}{\partial u} l\dfrac{\sigma_{2,0}}{\sigma}(u) = \\ = \varepsilon^{-1}\dfrac{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}}{\sigma_{0,2}\sigma_{1,2}\sigma_{2,2}}\dfrac{\sigma_{0,2}(u)\sigma_{1,2}(u)\sigma_{2,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,0}(u)} - \dfrac{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}\sigma_{2,1}}\dfrac{\sigma_{0,1}(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{2,1}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,0}(u)} \\ (\varepsilon^{-1}-1)\dfrac{\partial}{\partial u} l\dfrac{\sigma_{1,0}}{\sigma}(u) = \\ = \varepsilon^{-1}\dfrac{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}\sigma_{2,1}}\dfrac{\sigma_{0,1}(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{2,1}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,0}(u)} - \dfrac{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}}{\sigma_{0,2}\sigma_{1,2}\sigma_{2,2}}\dfrac{\sigma_{0,2}(u)\sigma_{1,2}(u)\sigma_{2,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,0}(u)}. \end{cases}$$

$$(17d)\quad \begin{cases} (\varepsilon^{-1}-1)\dfrac{\partial}{\partial u} l\dfrac{\sigma_{2,1}}{\sigma}(u) = \\ = \varepsilon^{-1}\dfrac{\sigma_{1,2}\sigma_{2,1}}{\sigma_{0,2}\sigma_{1,1}\sigma_{2,0}}\dfrac{\sigma_{0,2}(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{2,0}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,2}(u)\sigma_{2,1}(u)} - \dfrac{\sigma_{1,2}\sigma_{2,1}}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{2,2}}\dfrac{\sigma_{0,1}(u)\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,2}(u)\sigma_{2,1}(u)} \\ (\varepsilon^{-1}-1)\dfrac{\partial}{\partial u} l\dfrac{\sigma_{1,2}}{\sigma}(u) = \\ = \varepsilon^{-1}\dfrac{\sigma_{1,2}\sigma_{2,1}}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{2,2}}\dfrac{\sigma_{0,1}(u)\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,2}(u)\sigma_{2,1}(u)} - \dfrac{\sigma_{1,2}\sigma_{2,1}}{\sigma_{0,2}\sigma_{1,1}\sigma_{2,0}}\dfrac{\sigma_{0,2}(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{2,0}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,2}(u)\sigma_{2,1}(u)}. \end{cases}$$

## § 6. Darstellung der $\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)$ durch elliptische Funktionen zweiter Ordnung. Die $a_1, a_2, a_3, a_4$.

Linker Hand haben wir in dem Gleichungssystem (17) doppelt periodische Funktionen mit den einfachen Unendlichkeitsstellen $\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}$ und 0. Demnach ist es nach dem Hermiteschen Satze möglich, die links stehende Funktion auch als Aggregat von Quotienten von Produkten der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ darzustellen, die nur je zwei $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ in Zähler und Nenner enthalten. Also gibt es eine Relation von der Gestalt

$$\frac{\varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1}-1}\frac{y_0}{z_2}\frac{X_2(u)}{X_0(u)} - \frac{1}{\varepsilon^{-1}-1}\frac{y_0}{z_1}\frac{X_1(u)}{X_0(u)} = c_0 + c_1\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)}.$$

Den Zähler des letzten Gliedes dieser Gleichung haben wir dabei gleich so gewählt, daß sich die später durchzuführenden Rechnungen möglichst einfach gestalten.

Digitized by Google

Demnach erhalten wir die gesuchte Gleichung in der Gestalt:

$$\frac{\sigma_{0,2}^2(u)\,\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma^2(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{1,0}(u)} = \frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{0,1}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} + \varepsilon\frac{\sigma_{1,1}^2}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,2}}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma(u)} -$$

$$- \frac{\sigma_{1,1}^2}{\sigma_{1,0}\sigma_{1,2}}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)} - \frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}}. \tag{11}$$

Aus dieser Relation sind durch Transformation der Perioden achtundzwanzig weitere völlig analoge Relationen leicht zu bilden.

Wenn wir endlich auf Relation (10) zweimal die Transformation $S$ anwenden, dabei aber zugleich mittels der Gleichungen (6) reduzieren, so erhalten wir

$$-\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\left(\frac{1}{\sigma_{1,0}}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)} + \varepsilon^{-2}\frac{1}{\sigma_{1,1}}\frac{\sigma_{2,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,1}(u)} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{-1}\frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,1}^2}\frac{\sigma_{2,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,2}(u)}\right)\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} = \varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,0}^3}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)} +$$

$$+ \varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,0}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,1}^3}\frac{\sigma_{2,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,1}(u)} + \frac{\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,2}^3}\frac{\sigma_{2,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,2}(u)} +$$

$$+\left(2\varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,0}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,1}^2} + 2\varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,0}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,2}^2}\right)\frac{1}{\sigma_{0,1}}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)} + \tag{12}$$

$$+ 2\frac{\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0}^3 + \sigma_{1,1}^3 + \varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} - \varepsilon^{-1}\frac{\sigma_{1,2}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,0}^3} -$$

$$- \frac{\sigma_{1,0}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,1}^3} - \varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,2}^3}.$$

Die Relationen (6) bis (12) sind es nun, welche wir für das Folgende benötigen.

## § 3. Formeln betreffend die Tetraederirrationalität.

Wir hatten unter (8)

$$\xi - 1 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{0,1}}\right)^3.$$



Digitized by Google

Nach Modulfunktionen, Bd. I, p. $618_{,1}$ haben wir

$$\xi_1 = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\omega_2 \xi}{\frac{d\xi}{d\omega}}}, \quad \xi_2 = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\omega_2}{\frac{d\xi}{d\omega}}};$$

und weiter ist nach Modulfunktionen, Bd. I, p. $630_{,5}$

$$\xi_3 = \xi_1 \sqrt[6]{\Delta}, \quad \xi_4 = \xi_2 \sqrt[6]{\Delta},$$

wobei $\Delta$ in bekannter Weise durch

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

definiert ist. Benützen wir nach Modulfunktionen, Bd. II, p. $30_{,6}$ die Formel

$$\sigma_{1,0}^3 = \frac{\xi_3 - \xi_4}{-i\sqrt[3]{\Delta}},$$

so erhalten wir

$$\sigma_{1,0}^3 = \left[ \sqrt[6]{\Delta} \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\omega_2}{\frac{d\xi}{d\omega}}} \left( i\sqrt{3} \left( \frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{0,1}} \right)^3 - 1 \right) - \sqrt[6]{\Delta} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{i}{\sqrt{\frac{d\xi}{d\omega}}} \frac{\omega_2}{} \right] \frac{1}{-i\sqrt[3]{\Delta}};$$

daraus

$$\frac{\omega_2 (1-i)}{-i\sqrt[6]{\Delta}\, 2\sqrt{\pi}} i\sqrt{3} \left( \frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{0,1}} \right)^3 = \sqrt{\frac{d\xi}{d\omega}}\, \sigma_{1,0}^3$$

und daher

$$\frac{d\xi}{d\omega} = \frac{3i}{\sigma_{0,1}^6} \frac{\omega_2^2}{2\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}}. \tag{13}$$

## § 4. Formeln, betreffend die Ableitungen der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ nach $\omega$.

Um die Ableitung irgend eines Quotienten zweier $\sigma_{\lambda,\mu}$ nach $\omega$ in passender Weise durch die Ableitungen nach dem Argument $u$ darzustellen, benützen wir die Darstellung der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ durch die elliptischen $\vartheta$, da sich auf diesem Wege wohl am kürzesten die gewünschten Ausdrücke ergeben.

Digitized by Google

$$(18d)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u} l\dfrac{\sigma_{1,2}}{\sigma}(u) = \dfrac{-\varepsilon^{-2}\sigma_{0,1}^3 - \sigma_{1,0}^3 + \varepsilon^{-1}\sigma_{1,1}^3}{3\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}} + \dfrac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,1}^2}\dfrac{\sigma_{2,1}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,2}(u)} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} l\dfrac{\sigma_{2,1}}{\sigma}(u) = -\dfrac{-\varepsilon^{-2}\sigma_{0,1}^3 - \sigma_{1,0}^3 + \varepsilon^{-1}\sigma_{1,1}^3}{3\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}} + \dfrac{\sigma_{2,1}}{\sigma_{1,2}^2}\dfrac{\sigma_{1,2}^2(u)}{\sigma(u)\sigma_{2,1}(u)}. \end{cases}$$

Von den ersten Gliedern rechter Hand in diesen Relationen unterscheiden sich je zwei immer nur durch das Vorzeichen. Im ganzen erhalten wir also nur vier wesentlich verschiedene Werte, die wir für das Folgende mit $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ bezeichnen wollen.

Damit sind nun alle jene Hilfsrelationen entwickelt, die wir zur Aufstellung des gesuchten Systems der neun linearen Differentialgleichungen erster Ordnung benötigen. Vorerst jedoch gilt es noch, die gewonnenen Ausdrücke für die Theorie der verwandten Formen zu verwerten.

## III. Relationen zwischen verwandten Integralen.

### § 7. Benachbarte Formen und verwandte Formen.

Um Relationen zwischen verwandten Integralen zu erhalten, genügt es, wie Wirtinger l. c. gezeigt hat, eine beliebige, ganze, homogene Relation zwischen den $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ mit einem geeigneten Faktor der Gestalt

$$\Pi\, \sigma_{\lambda,\mu}^{k_{\lambda,\mu}}(u)$$

zu multiplizieren und auf beiden Seiten zu integrieren; allgemeinere Relationen erhält man zweitens dadurch, daß man in der identischen Gleichung

$$(19)\quad \frac{d}{du}\Pi\sigma_{\lambda,\mu}^{k_{\lambda,\mu}}(u) = \Pi\sigma_{\lambda,\mu}^{k_{\lambda,\mu}}(u)\sum k_{\lambda,\mu}\frac{d}{du} l\,\sigma_{\lambda,\mu}(u) \qquad \left(\sum_{\lambda,\mu} k_{\lambda,\mu} = 0\right)$$

den Ausdruck unter dem Summenzeichen, der eine gewöhnliche doppelt periodische Funktion darstellt und nur an den $n^2$-Stellen $\omega_{\lambda,\mu} = \frac{1}{n}(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)$ unendlich wird, als eine lineare Funktion von $n^2$ aus Quotienten $Q(u)$ von $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ gebildeten Produkten darstellt und sodann auf beiden Seiten über einen Doppelumlauf integriert. Die rechte Seite liefert dann eine Relation der gewünschten Art, während die linke verschwindet.

In der
genügt zur
Integralen s
geometrische

Digitized by Google

sammenhanges benachbarter Formen. Dabei heißen bekanntlich zwei Formen benachbart, wenn von den vier Exponenten des gewöhnlichen Falles zwei bei beiden Formen übereinstimmen, die beiden anderen die Differenz $\pm 1$ aufweisen. Schreiben wir das hypergeometrische Integral also in der eingangs angesetzten Form, so ergeben sich die bei Betrachtung von (19) erwähnten Quotienten von Produkten der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ im Falle $n=2$ in der Gestalt

$$\frac{\vartheta^2_{\lambda,\mu}(u)}{\vartheta^2_{\lambda',\mu'}(u)} \qquad \begin{matrix}\lambda,\ \mu = 0, 1\\ \lambda',\ \mu' = 0, 1\end{matrix}.$$

In diesem Sinne würde man also zur Theorie der verwandten Formen für $n=3$ aufsteigen, wenn man Relationen zwischen Quotienten der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ von der Gestalt

$$\left(\frac{\sigma_{\lambda,\mu}(u)}{\sigma_{\lambda',\mu'}(u)}\right)^3$$

betrachten würde, welche ja die Bedingungen

$$\sum a_{\lambda,\mu} = 0, \quad \sum \lambda\, a_{\lambda,\mu} \equiv \sum \mu\, a_{\lambda,\mu} \equiv 0 \pmod 3$$

stets erfüllen.

Solche Relationen können wir unter Benützung von (7) und (8) auch leicht bilden, indem sich aus sechs solchen Relationen sofort alle übrigen darstellen lassen. Doch ist zu beachten, daß für unsern Fall $n=3$ aus diesen Relationen zwischen benachbarten Formen durchaus nicht mehr sämtliche Relationen zwischen verwandten Formen erhalten werden können, wie dies bei $n=2$ der Fall ist und daß auch die Gestalt der eben betrachteten Quotienten nicht die einfachste ist, die unter den oberwähnten Bedingungen hergestellt werden kann. Auch für die Herstellung des gesuchten Systems von linearen Differentialgleichungen erweist sich diese Gestalt der verwandten Formen nicht als vorteilhaft, weil sich die notwendigen Reduktionen verhältnismäßig kompliziert gestalten.

Indem wir daher gleich an dieser Stelle nur jene verwandten Formen betrachten, die sich auch für das Folgende am brauchbarsten erweisen, wenden wir uns nun der Betrachtung von Relationen zwischen solchen speziell gewählten verwandten Formen zu.

### § 8. Die nächstverwandten Integrale. Relationen zwischen diesen.

Zunächst ist ersichtlich, daß wir aus den Relationen (6) bis (12) drei-, vier-, fünf-, sechs- und neungliedrige Relationen einfach dadurch erhalten, daß wir sie mit $P(u)$ multiplizieren und über einen Doppelumlauf oder beliebig zwischen zwei Periodendritteln integrieren.

Digitized by Google

$$\frac{\partial}{\partial\omega} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) = -\frac{\lambda\omega_2}{3}\frac{\partial}{\partial u} l\sigma_{\lambda,\mu}(u) + \frac{\lambda\eta_2}{3}u - \frac{2\lambda^2\pi i}{18} + \frac{\omega_2^2}{4\pi i}\frac{\partial^2}{\partial u^2} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) +$$

$$+\frac{\omega_2^2}{4\pi i}\left[\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) + \frac{2\lambda\pi i}{3\omega_2}\right]\left[\frac{\partial}{\partial u} l\sigma_{\lambda,\mu}(u) + \frac{2\lambda\pi i}{3\omega_2} + \frac{\partial}{\partial u} l\sigma(u) - \frac{2\eta_2}{\omega_2}u\right].$$

Wenn wir nun gehörig reduzieren, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial\omega} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) = \frac{\omega_2^2}{4\pi i}\frac{\partial^2}{\partial u^2} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) + \frac{\omega_2^2}{4\pi i}\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) \times$$

(14)

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial u} l\sigma_{\lambda,\mu}(u) + \frac{\partial}{\partial u} l\sigma(u) - \frac{2\eta_2}{\omega_2}u\right].$$

Auf Grund von Gleichung (14) berechnen wir uns einen Determinantenausdruck, der nach einer Bemerkung von Wirtinger eine doppelt periodische Funktion darstellt. Unter der Bedingung, daß

$$\frac{\partial}{\partial u} l\Phi \text{ und } \frac{\partial}{\partial u} l\Psi$$

doppelt periodische Funktionen sind, ist nämlich auch

$$\frac{\partial}{\partial\omega} l\Phi\frac{\partial}{\partial u} l\Psi - \frac{\partial}{\partial u} l\Phi\frac{\partial}{\partial\omega} l\Psi \tag{15}$$

doppelt periodisch.

Nun hat $\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)$ die verlangte Eigenschaft. Demnach auch

$$\frac{\partial}{\partial\omega} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u) - \frac{\partial}{\partial\omega} l\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u).$$

Wenn wir nun Formel (14) anwenden, so erhalten wir für diese Determinante

$$\frac{\omega_2^2}{2\pi i}\left\{\frac{\partial^2}{\partial u^2} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u) - \frac{\partial^2}{\partial u^2} l\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) +\right.$$

(16)

$$\left. + \frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma_{0,\mu}}(u)\right\},$$

aus welcher Gestalt die doppelte Periodizität sofort erhellt.

Digitized by Google

Die Integrale sind dabei durchwegs als Doppelumlaufintegrale um dieselben zwei sonst beliebig zu wählenden Periodendrittel zu verstehen. Durch irgend eine Transformation der Perioden wird sich

$$P(u) = \prod_{\lambda,\mu} \sigma_{\lambda,\mu}^{k_{\lambda,\mu}}(u)$$

in der Weise ändern, daß sich die $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ in bestimmter Weise vertauschen; die $Q(u)$ aber werden samt den Modulfunktionen als Koeffizienten wechselweise ineinander übergehen. Ändern wir daher die $k_{\lambda,\mu}$ nach der Transformation so, daß unter dem Integralzeichen an erster Stelle wieder $P(u)$ erscheint, so hat sich an unserer Relation (20) überhaupt nichts geändert und es bleibt daher auch $A$ bei irgend einer Transformation der Perioden unter gleichzeitiger oberwähnter Änderung der $k_{\lambda,\mu}$ ungeändert. Weiter brauchen wir in (20) nur an Stelle von $u \mid u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}$ zu setzen und die $k_{\lambda,\mu}$ so zu ändern, daß unter dem Integral an erster Stelle wieder das ursprüngliche $P(u)$ erscheint, um acht andere völlig analog gebildete Relationen zu erhalten, wo also genau so wie in (20) $\sigma(u)$ irgend ein anderes der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ in den Nennern der $Q(u)$ gemeinsam ist. Hervorgehoben sei endlich noch, daß wir bei dieser Methode, Relationen zwischen verwandten Integralen zu finden, stets auf solche Relationen kommen werden, deren einzelne Glieder aus einander durch Transformation hervorgehen und daher symmetrischen Bau aufweisen.

Vermöge der Identität

$$\frac{d}{du} l \frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) - \frac{d}{du} l \frac{\sigma_{\lambda',\mu'}}{\sigma}(u) = \frac{d}{du} l \frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma_{\lambda',\mu'}}(u)$$

können wir nun unter Benützung des auf p. 154 gesagten leicht zu allgemeineren Relationen unter Beibehaltung derselben Form der $Q(u)$ aufsteigen, indem sich uns Relationen ergeben, wo die $Q(u)$ nicht mehr die Eigenschaft haben, eines der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ im Nenner gemein zu haben. Die $Q(u)$ haben also die Gestalt

$$\frac{\sigma_{\lambda,\mu}^2(u)}{\sigma_{\lambda',\mu'}(u)\,\sigma_{\lambda'',\mu''}(u)} \qquad \begin{matrix} 2\lambda - \lambda' - \lambda'' \equiv 0 \pmod 3 \\ 2\mu - \mu' - \mu'' \equiv 0 \pmod 3 \end{matrix}.$$

Es ergeben sich so leicht 36 Relationen, aus denen durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren und Addition alle anderen folgen. Die erhaltenen Relationen sind sämtlich neungliedrig.

Digitized by Google

und nach Modulfunktionen, Bd. II, S. 27,;

$$\sigma_{\lambda,\mu}(\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\ \gamma\omega_1+\delta\omega_2)=\sigma_{\alpha\lambda+\gamma\mu,\ \beta\lambda+\delta\mu}. \tag{5}$$

Nach dem Hermiteschen Satze ist jedes $n$-gliedrige $\sigma$-Produkt von der Residuensumme $s$, das wir etwa $x'$ nennen mögen, linear und homogen in den $n$ linear unabhängigen $\sigma$-Produkten $x_i$ darstellbar in der Form

$$x'=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n,$$

wobei die Koeffizienten $\alpha_i$ von $u$ unabhängig sind. Stimmt die Residuensumme von $x'$ mit der von $x_i$ nur bis auf ganze Vielfache der Perioden überein, so werden erst die Produkte von $x'$ mit einem gewissen Exponentialfaktor lineare Funktionen der $x_i$ von obiger Gestalt. Die Koeffizienten dieser Relationen lassen sich dann dadurch bestimmen, daß man in der zunächst mit unbestimmten Koeffizienten angesetzten Relation der Variablen nacheinander eine genügende Anzahl geeigneter spezieller Werte beilegt und die Koeffizienten aus den sich ergebenden linearen Gleichungen berechnet.

Unter Benützung dieses Satzes können wir also schreiben

$$c_1\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)+c_2\,\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{2,2}(u)=\sigma^2(u).$$

Für $u$ setzen wir geeignet gewählte Drittelperioden, nämlich

$$u=\frac{\omega_1}{3}\quad\text{und}\quad u=\frac{\omega_1+\omega_2}{3}.$$

Dies ergibt

$$c_2=\frac{\sigma^2\left(\frac{\omega_2}{3}\right)}{\sigma_{1,1}\left(\frac{\omega_2}{3}\right)\sigma_{2,2}\left(\frac{\omega_2}{3}\right)}=\frac{\sigma_{0,1}^2}{\sigma_{1,0}\sigma_{1,2}};$$

$$c_1=\frac{\sigma^2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{3}\right)}{\sigma_{0,1}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{3}\right)\sigma_{0,2}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{3}\right)}=-\frac{\sigma_{1,1}^2}{\sigma_{1,0}\sigma_{1,2}}.$$

Demnach erhalten wir unter Benützung der Formeln (3)

$$-\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}+\frac{1}{\sigma_{1,1}\sigma_{2,2}}\frac{\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{2,2}(u)}{\sigma^2(u)}=\frac{\sigma_{1,0}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,1}^2}. \tag{6}$$

Digitized by Google

zwischen den $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ nach dem Hermiteschen Satze leicht aufzustellen. Doch sind uns solche Relationen für das Folgende nicht von Wichtigkeit.

(Schluß im nächsten Heft)

---

# INHALT.

I. Einleitung. Seite

§ 1. Gegenstand und Aufgabe der folgenden Untersuchungen . . . . . 138

II. Vorbereitende Formeln.

§ 2. Formeln zwischen den σ-Teilwerten . . . . . 140
§ 3. Formeln betreffend die Tetraederirrationalität . . . . . 145
§ 4. Formeln betreffend die Ableitungen der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ nach ω . . . . . 146
§ 5. Darstellung der $\frac{\partial}{\partial u} l \frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)$ durch elliptische Funktionen dritter Ordnung 150
§ 6. Darstellung der $\frac{\partial}{\partial u} l \frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)$ durch elliptische Funktionen zweiter Ordnung 152

III. Relationen zwischen verwandten Integralen.

§ 7. Benachbarte Formen und verwandte Formen . . . . . 155
§ 8. Die nächstverwandten Integrale. Relationen zwischen diesen . . . . . 156
§ 9. Eine achtgliedrige Relation zwischen verwandten Integralen . . . . . 159

---

Digitized by Google

# Bedeutende Preisermäßigung!

Im Besitze der gesamten Vorräte, bieten wir folgende in Fachkreisen bestens bekannte und berühmte Zeitschrift zu sehr ermäßigten Preisen an:

# Archiv der Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von **A. Grunert,** fortgesetzt von **R. Hoppe.**

I. Reihe: Band 1 2, 9—19, 21—25, 27—48 und 51—70 (1841—1883).
II. Reihe: Band 1—17 (1884—1899).
Registerhefte: I zu Band 1—25; II zu Band 26—40; III zu Band 41—54 IV zu Band 55—70.

(Die Bände 3—8, 20, 26 und 49—50 sind vergriffen und nicht mehr zu haben).

Wir offerieren bis auf Wiederruf, da spätere Preiserhöhung vorbehalten sobald ein bestimmter Vorrat verkauft ist:

**1 Exemplar aller vorrätigen 77 Bände mit den 4 Registerheften** statt des Ladenpreises von **950 Kronen** für **250 Kronen.**

Einzelne Bände der I. Reihe für **4 Kronen.**
Einzelne Bände der II. Reihe für **6 Kronen.**

Die bedeutendsten Mathematiker und Physiker unserer Zeit zählen zu den Mitarbeitern dieses seit 65 Jahren erscheinenden Archivs, das hauptsächlich den Bedürfnissen der Mittelschulprofessoren entgegenkommt

Wir empfehlen deshalb ganz speziell den Gymnasial- und Realschulbibliotheken die Gelegenheit zu benützen, etwa fehlende Bände zu ergänzen oder wo das Archiv in der betreffenden Bibliothek noch fehlt, alle 77 Bände anzuschaffen.

Bestellungen beliebe man an uns selbst oder an jede beliebige Buchhandlung zu richten.

**J. Eisenstein & Co.**
Buchhandlung u. Antiquariat,
**Wien, IX/3, Währingerstr. 2.**


Digitized by Google

TESCHEN.
K. U. K. HOFBUCHDRUCKEREI KARL PROCHASKA.

Digitized by Google

*XVII. Jahrgang 1906.* *3. Vierteljahr.*

# MONATSHEFTE

FÜR

# MATHEMATIK UND PHYSIK.

Stanford University Library
JUL 12 1906

---

MIT UNTERSTÜTZUNG DES

HOHEN K. K. MINISTERIUMS FÜR KULTUS UND UNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN VON

G. v. ESCHERICH, F. MERTENS und W. WIRTINGER

IN WIEN.

---

**WIEN, 1906.**

VERLAG DES MATH. SEMINARS DER UNIVERSITÄT WIEN.

IM BUCHHANDEL DURCH J. EISENSTEIN & CO. IN WIEN.

***Bezugspreis: Jährlich 14 K.***

Digitized by Google

# Inhaltsverzeichnis.


Seite

*Gmeiner, J. A.*, Otto Stolz, Nachruf . . . . . 161

*Berger, Alfred*, Über die zur dritten Stufe gehörigen hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde . . . . . 179

*Tauber, Alfred*, Über die unvollständigen Gammafunktionen . . . . . 207

*Niels Nielsen*, Notiz über die Kugelfunktionen . . . . . 222

*Carda, Karl*, Über eine Schar dreigliedriger algebraischer Gruppen der Ebene 225

*Biermann, Otto*, Über gewisse lineare Transformationen . . . . . 234


## Literaturberichte.


*Scott, Robert Forsyth*, The theory of determinants and their applications . 33

*Dassen, Claro Cornelio*, Étude sur les quantités mathématiques, grandeurs dirigées, quaternions . . . . . 34

*Netto, Eugen, Dr.*, Elementare Algebra . . . . . 35

*Sturm, Ambros*, Geschichte der Mathematik . . . . . 36

*Cantor, Moritz*, Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften . . . . . 37

*Gans, Richard, Dr.*, Einführung in die Vektoranalysis . . . . . 38

*Abraham, M., Dr.*, Theorie der Elektrizität . . . . . 38

Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1906 . . . . . 39

*Rogel, Fr.*, Das Rechnen mit Vorteil . . . . . 40

*La Cour, Paul*, und *Appell, Jakob*, Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung . . . . . 40

*Lehmann, Otto, Dr.*, Dr. J. Fricks Physikalische Technik . . . . . 40

*Müller-Pouillet's* Lehrbuch der Physik und Meteorologie . . . . . 41

*Wien, W., Dr.*, Über Elektronen . . . . . 42

*Neesen, Friedrich, Dr.*, Die Physik . . . . . 42

*Blau, Ernst*, Die Mechanik fester Körper . . . . . 43

*Wilda*, Diagramm- und Flächenmesser . . . . . 43

Astronomischer Kalender für 1906 . . . . . 44

*Ostwalds* Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 147 . . . . . 44

*Chwolson, O. D.*, Lehrbuch der Physik . . . . . 44

*Fraunhofer, J.*, Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Glasarten . . . . . 45

*Classen, J.*, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus . . . . . 45

*Bucherer, A. H.*, Mathematische Einführung in die Elektronentheorie . . . 45

*Marcuse, Adolf, Dr.*, Handbuch der geographischen Ortsbestimmung . . . 45

*Leher, Ernst, Dr.*, Das Wasser und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe . . . . . 46

*Danneel, Heinrich, Dr.*, Elektrochemie . . . . . 47

*Karrass, Th.*, Telegraphen- und Fernsprechtechnik in Einzeldarstellungen . 47

*Schubert, Hermann, Prof. Dr.*, Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis . . . . . 47

*Wallentin, Ignaz, Dr.*, Grundzüge der Naturlehre . . . . . 48


Digitized by Google

# Otto Stolz.

Nachruf von **J. Anton Gmeiner** in Prag.

Am 25. November 1905 wurde in Innsbruck einer der hervorragendsten Mathematiker Österreichs, dessen Name in der gesamten mathematischen Welt wohlbekannt und hochgeschätzt ist, Hofrat Professor Dr. Otto Stolz, unter allgemeiner Trauer zu Grabe getragen. Dem Sarge folgten die Angehörigen des Verblichenen, die Professoren der Universität, die verschiedenen studentischen Vereinigungen sowie zahllose Bürger und Einwohner Innsbrucks. Bei der St. Johannes-Kapelle am Innrain, wo die Einsegnung der Leiche stattfand, brachte der akademische Gesangverein dem allverehrten Lehrer zum letzten Abschiedsgruße das ergreifende Lied: „Dort über den Sternen ist alles klar" zum Vortrage und es nahm darauf der Trauerzug seinen Weg zu den Arkaden des Innsbrucker städtischen Friedhofes, unter denen die irdische Hülle des Verstorbenen zur ewigen Ruhe gebettet wurde.

Otto Stolz[1]) wurde am 3. Juli 1842 zu Hall in Tirol als Sohn des Hauswundarztes und nachmaligen Direktors der dortigen Landesirrenanstalt Dr. med. et chir. Josef Stolz und dessen Gattin Aloisia, geb. Rapp, Tochter des k. k. Gubernialprokurators Dr. Josef Rapp, des bekannten Verfassers des Geschichtswerkes „Tirol im Jahre 1809", geboren. Sein Vater der schon als praktischer Arzt und geschickter Operateur eine ausgebreitete Tätigkeit entfaltet hatte, wandte sich später hauptsächlich der Psychiatrie zu und erwarb sich durch seine Publikationen auf diesem Gebiete einen bleibenden Ruf. Insbesondere suchte er das traurige Los der Irren auf jede mögliche Weise zu erleichtern und führte auf humanere Behandlung der Geisteskranken abzielende Reformen mit Erfolg durch. Im Jahre 1873 zum Supplenten der Psychiatrie an der Innsbrucker Universität bestellt, hielt er von da ab in jedem Sommersemester Vorträge über dieses Fach und wurde später auch zum Examinator der Psychiatrie bei den Physikatsprüfungen ernannt, welche Ämter er bis zu seinem im Jahre 1877 erfolgten Tode bekleidete. Auch der Bruder des letzteren, Michael Stolz, hatte sich als Bildhauer einen bedeutenden Namen verschafft.

[1]) Die biographischen Daten verdanke ich zum größeren Teile dem Bruder des Verstorbenen, Herrn Prof. Dr. Friedrich Stolz. Einige Angaben sind dem Wurzbachschen biographischen Lexikon entnommen.



Digitized by Google

Kunst und Wissenschaft fanden also in der elterlichen Familie Stolz die eifrigste Pflege. Infolgedessen erhielten die beiden Söhne derselben, von denen Otto der ältere war, schon in ihrer zartesten Jugend die vielseitigste Anregung zur Entwicklung ihrer geistigen Fähigkeiten, welche denn auch auf fruchtbarsten Boden fiel.

Otto Stolz begann seine Mittelschulstudien am Franziskaner-Gymnasium in seiner Vaterstadt Hall. Da jedoch dort zur damaligen Zeit nur die unteren Klassen bestanden, wandte er sich schon nach Absolvierung des dritten Kurses nach Innsbruck, wo er seine Studien am Obergymnasium fortsetzte. Hier bot sich ihm noch als Gymnasiasten die Gelegenheit, sich als treuer Sohn des herrlichen Tirols in den Dienst des Vaterlandes zu stellen. Im Kriegsjahre 1859 ließ er sich nämlich in die unter dem Rektorat Fickers aufgestellte akademische Schützenkompagnie, bei der unter anderen auch sein späterer Lehrer der Mathematik, Professor Baumgarten, als Oberleutnant stand, einreihen. Die Kompagnie, die schon anfangs Juni ihre Ausrüstung vollendet hatte, marschierte am 21. Juni unter dem Kommando des Hauptmannes Hupfauf, dessen Name schon vom Jahre 1848 her bekannt ist, 140 Mann stark von Innsbruck nach Trient ab und rückte von dort nach Loppio und Riva vor, wo sie Aufstellung nahm. Wohl wurde die Studentenkompagnie während ihrer länger dauernden Kriegsbereitschaft in kein feindliches Gefecht verwickelt; daß sie aber ihre Aufgabe ehrenvoll gelöst hatte, bezeugt die allerhöchste Anerkennung, die ihr nach ihrer Rückkehr nach Innsbruck im September desselben Jahres zu teil wurde.

Im darauffolgenden Jahre (1860) beendete Stolz seine Gymnasialstudien und bezog sodann, mit einem Zeugnisse der Reife mit Auszeichnung versehen, im Herbste desselben Jahres die Innsbrucker Universität. Hier hörte er durch sechs Semester hindurch vorzüglich Vorlesungen über Mathematik bei Baumgarten, Physik bei Waltenhofen, Chemie bei Hlasiwetz und Botanik bei Kerner. Mit welchem Eifer er sich gleich von Anfang an in das Studium der Mathematik vertiefte und wie rasch er sich dank seiner hervorragenden Begabung in dieser Wissenschaft, die sein Berufsfach werden sollte, zurecht fand, ersehen wir daraus, daß er schon im zweiten Universitätsjahre die von der philosophischen Fakultät für das Studienjahr 1861/62 ausgeschriebene Preisaufgabe: „Man gebe einen Abriß der Lehre von den singulären Punkten, welche bei ebenen algebraischen Kurven vorkommen“ löste und für diese Arbeit den Preis von 210 Gulden zuerkannt erhielt.

Im Oktober 1863 verließ Stolz die tirolische Landeshauptstadt, um an der Universität in Wien seine Studien fortzusetzen. Hier beschäftigte er sich außer der Mathematik insbesondere auch eingehend mit Astronomie. Er hörte die Vorlesungen von Petzval und Littrow und erwarb sich im Oktober 1864 die philosophische Doktorwürde.

Digitized by Google

In der nächsten Zeit stand Stolz beim Feldmarschalleutnant Baumgartten in Mainz und Lemberg in Verwendung; er kehrte aber nach einiger Zeit wieder nach Wien zurück, wo er im Mai 1867 zum Assistenten der Universitätssternwarte bestellt wurde. Im nämlichen Jahre habilitierte er sich, nachdem er schon im Februar eine größere Arbeit über die Achsen der Kurven zweiter Ordnung vollendet und an die Akademie der Wissenschaften eingereicht hatte, an der Universität für das gesamte Gebiet der Mathematik und hielt daraufhin als Privatdozent Kollegien ab über Differential- und Integralrechnung, über Theorie und Anwendung der Determinanten, über analytische Geometrie des Raumes und der Kegelschnitte, sowie auch über synthetische Geometrie, welche gut besucht waren. Der Erfolg der Tätigkeit, welche Stolz in dieser ersten Zeit seiner akademischen Laufbahn entfaltete, und die Wertschätzung, welche schon seine ersten wissenschaftlichen Arbeiten erfuhren, finden sich trefflich charakterisiert im 39. Bande von Wurzbachs biographischem Lexikon. Wir entnehmen demselben die nachfolgende Stelle, die uns auch über den nächsten Zeitabschnitt aus Stolz' Leben Aufschluß gibt: „Nachdem er (Stolz) als Privatdozent eine hervorragende Lehrbegabung an den Tag gelegt, sowie durch die in der Zwischenzeit in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Abhandlungen: ‚Über die Achsen der Linien zweiter Ordnung in allgemeinen trimetrischen Punktkoordinaten' (55. Bd., 1867) und ‚Über die Kriterien zur Unterscheidung der Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlichen' (58. Bd., 1868) Beweise eines seltenen mathematischen Talents geliefert hatte, erhielt er wiederholt Staatsreisestipendien zu dem Zwecke, auf den Universitäten in Berlin und Göttingen, an welchen die neuere Richtung der mathematischen Forschung ihre glänzendste Vertretung fand, seine höhere Ausbildung zu fördern."

In Berlin, wohin sich Stolz im Herbste 1869 begeben hatte, besuchte er durch drei Semester die Kollegien Weierstraß', Kummers und Kroneckers und nahm während dieser Zeit auch an dem von Weierstraß und Kummer geleiteten Seminar den tätigsten Anteil. Einen überwältigenden Eindruck machten auf den jungen Gelehrten, wie aus mehrfachen gelegentlichen Äußerungen Stolz' hervorgeht, Weierstraß' funktionentheoretische Vorlesungen, wie denn überhaupt von den drei genannten Meistern der mathematischen Wissenschaft Weierstraß auf Stolz offenbar den tiefstgehenden und nachhaltigsten Einfluß ausgeübt hatte. Die der Weierstraßschen Lehre in ganz besonderem Grade eigene Exaktheit sagte der wissenschaftlichen Auffassung und ich möchte sagen, auch dem ganzen Charakter von Stolz am meisten zu und findet sich in den Arbeiten und Werken des letzteren wieder. Während seines Aufenthaltes in Berlin veröffentlichte Stolz seine Abhandlung „Über eine analytische Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in voller



Digitized by Google

Allgemeinheit", welche im 16. Bande der Schlömilchschen Zeitschrift erschien.

Das Sommersemester 1871 brachte Stolz in Göttingen zu, wo er Clebsch und Klein hörte und seinen bereits gewonnenen wissenschaftlichen Gesichtskreis um manche wertvolle und fruchtbringende Idee erweiterte. Hier schrieb er die im 4. Bande der mathematischen Annalen 1871 publizierte Abhandlung über „Die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der analytischen Geometrie".

Zur Zeit als die letztgenannte Arbeit im Drucke herauskam, befand sich Stolz bereits wieder in Wien. Daselbst nahm er im Herbste 1871 seine Vorträge an der Universität vor sehr zahlreicher Hörerschaft in erweitertem Umfange wieder auf und erwarb sich schon während der kurzen Dauer seiner dortigen Lehrtätigkeit einen ausgezeichneten Ruf. Schon im nächsten Jahre, im Juli 1872, wurde er zum außerordentlichen Professor für die neuerrichtete zweite Lehrkanzel der Mathematik in Innsbruck ernannt, wo er auch vier Jahre später, am 30. Juli 1876, nachdem er einen Ruf an das Polytechnikum in Darmstadt abgelehnt hatte, das Ordinariat erlangte. Anfangs Oktober desselben Jahres vermählte sich Stolz mit Fräulein Paula Meyer aus Innsbruck.

Der Innsbrucker Universität blieb Stolz, wiewohl ihm zweimal eine Professur in Wien angeboten worden war, treu bis zu dem kurz vor seinem Tode wegen schwerer Erkrankung erfolgten Übertritte in den Ruhestand; und er war eine Zierde dieser Hochschule, die schon manche bedeutende Männer zu den Ihrigen zählen konnte.

In Innsbruck entfaltete Stolz eine ebenso erfolgreiche wie unermüdliche, der Wissenschaft und dem akademischen Lehramte gewidmete Wirksamkeit. Um seiner Lehrtätigkeit einen größeren Erfolg zu sichern, war er bald nach dem Antritte seiner Professur auf die Errichtung eines mathematischen Seminars bedacht, welches denn auch mit dem Wintersemester 1876/77 eröffnet und seiner Leitung übergeben wurde. In seinen Vorlesungen, die ein reichhaltiges Programm aufweisen, behandelte Stolz außer den bereits oben genannten Stoffen, über welche er schon als Privatdozent gelesen hatte, die Gebiete: Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die analytische Geometrie der Ebene, Theorie der Raumkurven und Flächen, allgemeine Arithmetik, Funktionentheorie, Doppelintegrale, Differentialgleichungen, Variationsrechnung, algebraische Funktionen und deren Integrale. In den früheren Jahren hielt er überdies Kollegien ab über Algebra, elliptische Funktionen, sphärische Trigonometrie und sphärische Astronomie. Dem Lehramte gab sich Stolz mit ebensolcher Liebe und Begeisterung hin wie der wissenschaftlichen Forschung; ja, diese beiden Tätigkeiten machten zusammen so recht eigentlich sein Lebenselement aus. Seine Vorträge waren sachlich überaus fein durchdacht und durchgearbeitet, klar und bündig in der Definition der Begriffe ebenso

Digitized by Google

wie in der Fassung der Lehrsätze und Probleme, streng und exakt in der Beweisführung. Ein tief gründlicher und ungemein scharfsinniger Denker, wie er war, verfolgte er die einmal aufgeworfenen Gedanken, wo immer es nur tunlich war, bis zu ihren äußersten Konsequenzen. Von der strengsten Wissenschaftlichkeit abzuweichen, ließ er sich auch durch keine didaktischen Gründe bestimmen. Jede Popularisierung der Mathematik widerstrebte ihm seiner innersten Natur nach. Daher war es dem Anfänger in der Mathematik wohl nicht immer leicht, mit seinen Ausführungen gleichen Schritt zu halten, dem fortgeschritteneren Hörer aber boten seine Vorlesungen aus ebendemselben Grunde ein um so größeres Interesse dar.

Mit der größten Gewissenhaftigkeit war Stolz stets auch darauf bedacht, seine Hörer mit den neuesten Erscheinungen auf den von ihm vorgetragenen Gebieten bekannt, oder falls dieselben seinem eigenen Lehrsystem sich nicht einfügen ließen, so doch auf sie aufmerksam zu machen. Überhaupt waren seine Vorlesungen reich an Bemerkungen über die Literatur und geschichtliche Entwicklung der Mathematik, worin er über einen unerschöpflichen Wissensvorrat verfügte. Am Schlusse seiner am 2. März 1891 in der Aula der Universität gehaltenen Rektoratsrede legte Stolz den Studierenden ans Herz, sich behufs Erwerbung gründlicher Kenntnisse und wissenschaftlicher Bildung an die Werke der Meister zu wenden oder, falls dies untunlich sein sollte, sich einen Führer zu wählen, der sie zu den Quellen und Originalen geleite; und von den hiezu berufenen Führern war er selbst der besten einer.

Wie soeben angedeutet wurde, bekleidete Stolz im Studienjahre 1890/91 die Würde des Rektors der Innsbrucker Universität. Vordem hatte er zweimal, nämlich in den Studienjahren 1877/78 und 1888/89, das Amt des Dekans der philosophischen Fakultät inne. Auch war er Mitglied der Prüfungskommission für das Lehramt an Gymnasien und Realschulen. Im Professorenkollegium genoß Stolz nicht nur als Gelehrter, sondern auch wegen seines grundehrlichen, unbedingt verläßlichen, geraden und biederen Charakters hohes Ansehen. Von ihm wurde auch die gegenwärtig geltende Geschäftsordnung der Innsbrucker philosophischen Fakultät seinerzeit ausgearbeitet. An der Universität machte er sich noch verdient um den bis Ende der Siebzigerjahre bestandenen akademischen Leseverein und das 1879 gegründete Lesekasino, dessen Vorstandschaft er durch viele Jahre hindurch angehörte.

Neben dem akademischen Lehramte war Stolz von seinen fachwissenschaftlichen Studien und Arbeiten vollauf in Anspruch genommen. Dies hinderte ihn jedoch nicht, sich nebenher noch mit anderen Wissenschaften zu beschäftigen, zu welchen er zum Teil gerade durch seine mathematischen Studien hingeführt wurde. Es möge hier nur erwähnt sein, daß Stolz ein reges Interesse für die alte Geschichte des Orients und Ägyptens an den Tag legte, das durch sein eingehendes Studium der Geschichte der Mathematik von ihren ersten Anfängen an und insbesondere durch daraus sich

Digitized by Google

ergebende chronologische Fragen beständig wach erhalten wurde. In seinen freien, der Erholung gewidmeten Stunden befaßte sich Stolz mit Vorliebe mit der Pflanzenwelt. Wie bereits bemerkt wurde, hatte er schon als Universitätsstudent sich für die Botanik interessiert und Vorlesungen aus diesem Fache gehört; so bot ihm denn die prächtige Umgebung Innsbrucks auf seinen Spaziergängen, welche er zur Pflege seiner Gesundheit in der besseren Jahreszeit mit großer Regelmäßigkeit unternahm, die vielfältigste Anregung dazu, die dort erworbenen Kenntnisse in dieser Wissenschaft zu bereichern und zu vertiefen. Sein Interesse an diesem Gegenstand wurde noch besonders erhöht durch seinen freundschaftlichen Verkehr mit dem Professor der Botanik Johann Peyritsch, der in den Jahren 1878—1889 an der Universität in Innsbruck wirkte, und später neuerdings dadurch, daß sein älterer Sohn die Neigung zur Botanik mit dem Vater teilte.

Als Schriftsteller auf dem Gebiete der Mathematik war Stolz unausgesetzt in hervorragender Weise tätig. Er schrieb außer den bekannten Lehrbüchern über 60 mathematische Abhandlungen, von denen die meisten in den mathematischen Annalen, in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie, in den Monatsheften für Mathematik und Physik und in den Berichten des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines in Innsbruck erschienen sind. Die in den letzteren Berichten veröffentlichten Arbeiten gehören der Zeit von 1874 bis 1890 an und sind zumeist aus Vorträgen hervorgegangen, welche Stolz in dem genannten Vereine, dessen eifriges Mitglied er war, gehalten hatte. Ferner finden sich drei Arbeiten von Stolz in der Schlömilch schen Zeitschrift, je zwei in den „Transactions of the American mathematical society“ und im „Periodico di Matematica“ und endlich je eine in der Zeitschrift für österreichische Gymnasien, in den Jahresberichten der deutschen Mathematikervereinigung, in den „Acta mathematica“ und in den Sitzungsberichten der Münchner Akademie. Außerdem veröffentlichte Stolz noch im Sonderdrucke einen populären Vortrag über „Die Sonne“ (Innsbruck 1876) sowie seine Rektoratsrede über „Größen und Zahlen“ (Leipzig 1891), in welcher er einen sehr interessanten Überblick über die geschichtliche Entwicklung des Größen- und Zahlenbegriffes von der Zeit Euklids bis auf die Gegenwart entwirft.

Von seinen Lehrbüchern erschien zunächst im Jahre 1885 der erste, die Arithmetik der reellen Zahlen umfassende Teil der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“, dem schon im nächsten Jahre der zweite, die Arithmetik der komplexen Zahlen enthaltende Teil nachfolgte. Unmittelbar darauf begann Stolz mit den Vorarbeiten zu seinem umfangreichen Werke: „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung“, dessen drei Teile („Reelle Veränderliche und Funktionen“, „Komplexe Veränderliche und Funktionen“ und „Die Lehre von den Doppelintegralen“) nacheinander in den Jahren 1893, 1896 und 1899 zur Ausgabe gelangten.

Digitized by Google

Im letztgenannten Jahre brach über Stolz und seine Familie ein schweres, tieftrauriges Verhängnis herein. Sein älterer Sohn Friedrich, der nach Absolvierung des Gymnasiums in den letzten Jahren in Innsbruck und München Naturwissenschaften studierte und sich auf dem Gebiete der Kryptogamenforschung Tirols trotz seiner Jugend bereits einen beachtenswerten Platz errungen hatte,[1]) fand am 14. August 1899 im Pitztale durch Absturz über eine Felswand seinen frühzeitigen Tod. Den Schmerz über den Verlust dieses ihres vielversprechenden, zu den schönsten Hoffnungen berechtigenden Sohnes vermochten die Eltern, wiewohl noch zwei liebe Kinder sie umgaben, durch lange Zeit hindurch kaum zu überwinden. Stolz selbst fühlte sich infolge dieses Schicksalsschlages derart erschüttert und niedergebeugt, daß er das Ende seines Schaffens gekommen glaubte und einen kurz vorher über Anregung des Herrn Teubner in Leipzig gefaßten Plan zur Abfassung eines neuen Werkes, welches den Titel: „Die Grundlagen der Arithmetik" erhalten sollte, momentan wieder aufgab. Doch nach und nach mochte er gerade in der Beschäftigung mit seiner Wissenschaft eine wohltuende Ablenkung von den trüben Gedanken, in die ihn die Trauer um seinen Sohn versenkt hatte, finden. In der Tat nahm er im Herbste desselben Jahres den früheren Plan wieder auf, änderte ihn aber später etwas ab. Da nämlich unterdessen eine neue Auflage seiner „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" notwendig geworden war, so entschloß er sich jetzt, dieses ganze Werk umzuarbeiten und es in neuer und vermehrter Gestalt in zwei selbständigen Bänden als „Theoretische Arithmetik" und „Einleitung in die Funktionentheorie" herauszugeben.

Zur Beteiligung an dieser Arbeit, welche seine letzten Lebensjahre völlig ausfüllte, hatte Stolz mich schon am 2. August 1899 und sodann, da die Sache infolge des erwähnten Trauerfalles wieder rückgängig geworden war, neuerdings im September desselben Jahres eingeladen. Dabei hatte er von Anfang an die Absicht, den größten Teil der „Arithmetik" selbst umzuarbeiten, während meine Aufgabe hauptsächlich darin bestehen sollte, den Text zu revidieren und im Falle, daß er selbst physisch daran verhindert würde, die Herstellung des Manuskripts weiter zu führen und zum Abschlusse zu bringen. „In meinen Jahren", so schrieb Stolz in seinem Briefe vom 2. August 1899, „kann man sich nicht mit Sicherheit auf weitgehende Pläne einlassen. So möchte ich denn durch Beiziehung eines Gesellschafters die Vollendung des Werkes in dem von mir beabsichtigten Sinne sichern." In der Folge überließ er mir sodann die Umarbeitung einzelner Abschnitte (welche in den Vorreden zu den beiden oben genannten Werken sich genau angegeben finden), während er alle übrigen Abschnitte noch selbst ausarbeitete. Ja, er war unausgesetzt tätig, bis der Druck seines letzten Werkes,

[1]) Vgl. den Nekrolog von P. Magnus, Österreichische botanische Zeitschrift, 1899.

Digitized by Google

der „Einleitung in die Funktionentheorie“ gegen Ende August 1905 endlich fertiggestellt war. Wenige Wochen später warf ihn ein schweres Leiden aufs Krankenlager, von dem er sich leider nicht mehr erheben sollte.

Während seiner letzten Lebensjahre hatte Stolz öfter an vorübergehenden Gesundheitsstörungen zu leiden und er brachte aus diesem Grunde zu Ostern und im Herbste vor Beginn des Wintersemesters gewöhnlich einige Wochen in Meran zu, wo er sich jedesmal recht gut erholte und neu gekräftigt fühlte. Auch das Sommersemester 1905 hatte er noch mit gutem Mute und froher Hoffnung begonnen; doch wurde ihm die Lehrtätigkeit nach und nach immer schwerer und gegen das Ende des Semesters war er schon sehr leidend. Der zu Rate gezogene Arzt stellte ein Herzleiden und Arteriensklerose fest und empfahl dem Kranken möglichste Ruhe. In Maurach am Achensee, wohin sich Stolz sofort nach Schluß seiner Vorlesungen zum Sommeraufenthalte begeben hatte, besserte sich anfangs sein Zustand wieder, so daß er die Sommermonate noch verhältnismäßig gut verbrachte; jedoch durfte er seine gewohnten Spaziergänge, welche früher seine beste Erholung gebildet hatten, nur mehr in ganz beschränktem Maße ausführen. Er fühlte auch, daß er seine Vorlesungen im kommenden Wintersemester nicht mehr werde aufnehmen können, und reichte daher Mitte August um seine Versetzung in den Ruhestand ein. Als er dann gegen Mitte September wieder nach Innsbruck zurückgekehrt war, machte sich unmittelbar darauf eine neuerliche Verschlimmerung seines Befindens geltend, die, wie sich allmählich herausstellte, nicht allein in dem bereits erwähnten Leiden ihren Grund hatte, sondern auch insbesondere durch eine Neubildung in den inneren Organen verursacht wurde. Nunmehr trat an dem Kranken ein rascher und stetiger Kräftezerfall ein, der am 23. November seine Auflösung herbeiführte, die, wie der Verlauf der ganzen Krankheit, völlig schmerzlos erfolgte.

Stolz war bis kurz vor dem Eintritte des Todes bei klarem Bewußtsein und noch in den letzten Tagen verweilten seine Gedanken bei der Wissenschaft; so ließ er mir noch am 9. November eine ihm zugekommene mathematische Abhandlung behufs Einsichtnahme zusenden. Ihm war die Beschäftigung mit seiner Wissenschaft, der er vom Beginne seiner Studienzeit an seine volle Kraft gewidmet hatte, sozusagen zur zweiten Natur geworden. Sein sehr ersprießliches und verdienstvolles Wirken hatte auch mehrfache öffentliche Anerkennung gefunden. Im Jahre 1898 wurde Stolz von Sr. Majestät dem Kaiser Franz Josef I. durch Verleihung des Ordens der Eisernen Krone III. Klasse ausgezeichnet. Im folgenden Jahre, am 22. Juli 1899, fand seine Wahl zum wirklichen Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, deren korrespondierendes Mitglied er schon seit 1893 war, statt. Seit 1900 war er auch korrespondierendes Mitglied der königl.-bayerischen Akademie der Wissenschaften und in der nämlichen Eigenschaft

Digitized by Google

gehörte er noch der königl.-böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag an. Im Februar 1904 wurde er endlich zum k. k. Hofrat ernannt. Welcher Wertschätzung sich Stolz unter den Fachgelehrten erfreute, zeigt unter anderem ein Einblick in den ersten Band der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften", wo bei den einschlägigen Artikeln an sehr zahlreichen Stellen von den verschiedensten Autoren auf die Stolzschen Bücher und Abhandlungen hingewiesen wird. Dieselbe Hochschätzung seiner wissenschaftlichen Leistungen kommt auch in den von verschiedenen Seiten erfolgten Besprechungen seiner Werke sowie in gelegentlichen Urteilen hervorragender Fachmänner zum Ausdruck.

Stolz war aber nicht nur ein großer Gelehrter, sondern ebenso ein durch und durch edler Charakter. Der immer sehr ernste Mann mochte wohl dem Fernstehenden etwas unnahbar erscheinen; hatte man aber Gelegenheit, mit ihm in näheren Verkehr zu treten, so zeigte er sich, immer nach seiner geraden und offenen Art, ungemein liebenswürdig, wohlwollend und hilfsbereit und dabei war er von einer geradezu rührenden Anspruchslosigkeit. Ebenso gewissenhaft, wie in seinem Berufe, war er auch in seinem Privatleben, ein Muster ernster Lebensführung und treuer Pflichterfüllung.

Während ich im vorstehenden ein Bild von dem Leben und Wirken meines hochverehrten Lehrers in allgemeinen Zügen zu entwerfen trachtete, will ich nun noch versuchen, einen Überblick über die Ergebnisse seiner wissenschaftlichen Forschung zu geben. Faßt man die Abhandlungen und Lehrbücher von Stolz zusammen, so gehören seine Arbeiten zumeist der Arithmetik, Infinitesimalrechnung und Funktionentheorie, sowie der analytischen Geometrie an. Dazu kommen noch ein paar Arbeiten rein geometrischen Inhalts und außerdem einige mit vorwiegend mathematisch-geschichtlichem Charakter.

In seiner ersten Publikation (W. S. 55)[1]) bestimmt Stolz die Halbachsen eines durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades in trimetrischen Punktkoordinaten, deren Beziehung zu einem rechtwinkligen Koordinatensystem gegeben ist, dargestellten Kegelschnittes als Maximum und Minimum des Radiusvektors, welcher das Zentrum desselben mit einem Kurvenpunkte verbindet. Er gelangt dabei zu Ausdrücken für die Summe und das Produkt der Quadrate dieser Halbachsen, wie sie für den Fall rechtwinkliger Koordinaten schon früher von Faure gegeben wurden. Stolz geht aber nicht nur in der Wahl des Koordinatensystems, sondern insbesondere dadurch über Faure hinaus, daß er den genannten Ausdrücken eine Form erteilt, mittels welcher die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades, d. i. die Untersuchung über die verschiedenen Arten der Örter zweiter Ordnung sich in sehr einfacher Weise unmittelbar zu Ende führen läßt.

[1]) Im folgenden bedeutet: W. S. = Sitzungsberichte der Wiener Akademie; M. = Monatshefte für Math. u. Phys.; Ann. = Mathematische Annalen; I. B. = Berichte des naturw.-med. Vereines in Innsbruck.

Digitized by Google

In seiner zweiten geometrischen Abhandlung (Schlömilchs Zeitschrift 16) leitet er die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie auf analytischem Wege, d. h. unter Zugrundelegung von räumlichen Richtungskoordinaten her. Eine Schwierigkeit für eine solche Behandlungsweise dieser Grundformeln bestand darin, daß dabei mehrfach Wurzelausdrücke auftreten, deren Vorzeichen sich nicht ohne weiteres bestimmen lassen. Stolz gewinnt jedoch durchaus eindeutige und für alle Fälle gültige Formeln dadurch, daß er nicht nur die dabei in Betracht kommenden geometrischen Größen als relative Größen nach dem Vorgange von Möbius eindeutig definiert, sondern auch die Grundbegriffe der analytischen Geometrie einer strengeren Fassung unterzieht. Den nämlichen auf die konsequente Durchführung des Prinzips der Zeichen hinzielenden Gedanken verfolgt er in einer späteren Arbeit (M. 1) hinsichtlich der Raumkurven, indem er durch genaue Festlegung der positiven Richtungen der Kurventangente, der Hauptnormalen und Binormalen die Eindeutigkeit der Formeln für die Richtungskosinusse und insbesondere auch jener für die beiden Krümmungen der Raumkurven herstellt. Hiebei weist er darauf hin, daß obwohl die Koordinatenmethode auf der Einführung relativer Raumgrößen an Stelle der absoluten beruhe, das Prinzip der Zeichen in der analytischen Geometrie doch nicht überall dort, wo es der Natur der Sache nach anwendhar ist, durchgedrungen sei. Bei der Durchführung dieses Prinzips verlangt Stolz die möglichste mit ihrer Eindeutigkeit verträgliche Allgemeinheit der Formeln (Ann. 43).

Eine der ersten Arbeiten hat Stolz, wie bereits bemerkt wurde, den komplexen Elementen in der Geometrie gewidmet (Ann. 4); sie betrifft die Frage nach der geometrischen Bedeutung dieser Elemente. Diese Frage hatte v. Staudt in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ auf rein geometrischem Wege vollständig beantwortet, doch hatten seine Untersuchungen bis dahin in der analytischen Geometrie nur wenig Berücksichtigung gefunden. Stolz unternimmt es nun, die v. Staudtschen Gedanken nach der Methode der analytischen Geometrie durchzuführen, wobei dieselben an Klarheit und Durchsichtigkeit bedeutend gewinnen und zugleich die Übereinstimmung des Imaginären in der analytischen Geometrie mit dem v. Staudtschen Imaginären unmittelbar nachgewiesen wird. Auf diesen Gegenstand kommt Stolz später nochmals in J. B. 19 zurück, woselbst er auch einen kurzen Überblick über die bis dahin auf diesem Gebiete erschienenen Arbeiten gibt.

Über algebraische Kurven hat Stolz drei wichtige, in den mathematischen Annalen erschienene Abhandlungen geschrieben. In der ersten derselben (Ann. 8) vervollständigt er die von Plücker in seiner „Theorie der algebraischen Kurven“ gegebene Darstellung der bei den algebraischen Kurven auftretenden Singularitäten und bringt sie durch konsequente Benützung der von Plücker selbst gebrauchten Differentialgleichungen zum Abschlusse, indem er namentlich die Frage nach der Gestalt einer Kurve in der Umgebung

Digitized by Google

eines Doppelpunktes vollständig erledigt und auch die bei einem $n$-fachen Punkte möglichen Fälle angibt. Hiebei zeigt er auch, daß in zwei reziproken Kurven einer Singularität von der Plückerschen Ordnung $n$ und Klasse $m$ eine solche von der Ordnung $m$ und Klasse $n$ entspreche und beweist im Anschlusse daran außerdem noch die Richtigkeit der von Cayley angegebenen, aber nicht vollständig erwiesenen Anzahl der einer Singularität äquivalenten Doppelpunkte und Rückkehrpunkte bezw. Doppeltangenten und Wendetangenten.

Die zweite (Ann. 11) enthält eine „allgemeine Theorie der Asymptoten der algebraischen Kurven". Während Plücker die Asymptoten bis einschließlich zur vierten Ordnung hauptsächlich mit Hilfe von Kontinuitätsbetrachtungen entwickelt hatte, zeigt hier Stolz, wie man auf Grund der fundamentalen Eigenschaften der algebraischen Funktionen von der Kurvengleichung aus unmittelbar zur Aufstellung der Gleichungen der krummlinigen Asymptoten beliebiger Ordnung gelangen kann. Läßt die Kurvengleichung in der Umgebung eines uneigentlichen Punktes $(1, a_m, 0)$ eine Entwicklung von der Form

$$y = a_m x + a_{m-k} x^{\frac{m-k}{m}} + \cdots + a_1 x^{\frac{1}{m}} + a_0 + a_{-1} x^{-\frac{1}{m}} + \cdots$$

zu, so gilt nach Stolz als Asymptote des hiedurch dargestellten Kurvenzweiges jede Kurve $A(x, y) = 0$, die mit der uneigentlichen Geraden außer dem Punkt $(1, a_m, 0)$ keinen Punkt gemeinsam hat und dabei in der Umgebung dieses Punktes eine einzige Entwicklung für $y$ liefert, welche bis einschließlich zum Gliede $a_0$ mit der obigen übereinstimmt. Von diesen unendlich vielen, mit dem Koordinatensystem zugleich sich ändernden Asymptoten wählt Stolz als typische Asymptoten oder Asymptoten im engeren Sinne durch geeignete Bestimmung der in $A(x, y)$ noch vorkommenden willkürlichen Koeffizienten solche aus, welche bei den zulässigen Koordinatentransformationen ein möglichst übersichtliches Kurvensystem liefern. Dabei zeigt es sich, daß es im allgemeinen ganze Scharen von Kurven gibt, die mit gleicher Berechtigung als typische Asymptoten angesehen werden können. Stolz behandelt sodann noch eingehend die Frage nach der Ordnung der Berührung zwischen Kurve und Asymptote und wendet seine Resultate auf die Kurven 3. bis 6. Ordnung an.

In der dritten der genannten Abhandlungen (Ann. 15) gibt Stolz zunächst eine allgemeine Definition der Multiplizität der eigentlichen und uneigentlichen Schnittpunkte zweier algebraischer Kurven $F(x, y) = 0$ und $G(x, y) = 0$, wozu er die Kroneckersche Resolvente benützt, und zeigt, daß die Multiplizität eine geometrische, von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige Größe ist. Sodann beantwortet er die Frage, wie die Multiplizität eines eigentlichen Schnittpunktes $(x_0, y_0)$ aus den gegebenen Kurven-

Digitized by Google

gleichungen unmittelbar bestimmt werden könne, indem er nachweist, daß dieselbe mit dem Exponenten des ersten Gliedes des nach steigenden Potenzen von $x - x_0$ entwickelten, in der Resultante $X = R_y(F, G)$ vorkommenden Produkts $\prod'_{r,s}(y_r - y'_s)$ übereinstimmt, worin $y_r$ und $y'_s$ nur auf jene Wurzeln der Gleichungen $F = 0$ und $G = 0$ bezogen werden, die für $x = x_0$ in $y = y_0$ übergehen. Die Abhandlung enthält auch interessante Bemerkungen über die Grade der beiden Resultanten $R_x(F, G)$ und $R_y(F, G)$ und ist sowohl von geometrischem als auch von algebraischem Standpunkte aus von Bedeutung.

Sehr eingehend hat sich Stolz mit den Grundproblemen der Integralgeometrie sowohl in den „Grundzügen" als auch in mehreren seiner Abhandlungen befaßt; insbesondere kommt er bei mehrfachen Gelegenheiten auf die Rektifikation zurück. In der Abhandlung über B. Bolzano (Ann. 18), in welcher er die Schriften und Leistungen dieses Mathematikers auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung einer eingehenden Würdigung unterzieht, führt er uns im Anschlusse an die Darlegung von Bolzanos Auffassung der Rektifikation, Komplanation und Kubatur die Hauptmomente in der gsschichtlichen Entwicklung des Problems der Rektifikation vor. Der Erklärung der Bogenzahl sowie auch des Inhaltes eines begrenzten krummen Flächenstückes sind die beiden Aufsätze im 3. Bande der „Transactions" gewidmet. Die Abhandlung im 35. Bande der „Münchner Berichte" enthält einen sehr einfachen Beweis für die Rektifizierbarkeit der regulären Kurven, welcher sich auf die komplexe Darstellung dieser Kurven gründet. Einen interessanten Satz der Integralgeometrie, der eine Verallgemeinerung der bekannten Volumsformel für einen Körper, dessen Querschnitt senkrecht zur $X$-Achse als Funktion von $x$ gegeben ist, bildet, hat Stolz in W. S. 112 mitgeteilt.

Seine Auffassung von den Grundlagen der Geometrie hat er in J. B. 15 ausgesprochen. Da die Tatsache, daß neben der Euklidschen Geometrie noch andere geometrische Systeme möglich sind, die Geometrie auf das Gebiet der Erfahrung verweist, so fordert er eine solche Formulierung der geometrischen Axiome, daß dieselben durch Versuche geprüft und innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler bestätigt werden können. In der Tat läßt sich, wie Stolz ausführlich nachweist, das ganze Lehrgebäude der Euklidschen Geometrie gewinnen, wenn man die Axiome der Geraden, der Ebene und des Kreises für einen hinlänglich kleinen Teil des Raumes gelten läßt und das unkontrollierbare 11. Axiom, auf welchem bei Euklid die ganze Parallelentheorie beruht, durch die Forderung ersetzt, daß es mindestens ein Dreieck, dessen Winkelsumme $180^0$ beträgt, oder, was damit gleichbedeutend ist, mindestens ein ebenes Viereck gebe, worin jeder Winkel ein rechter ist, während die Annahme, daß mindestens ein Dreieck existiere,

Digitized by Google

dessen Winkelsumme größer, bezw. kleiner als $180^0$ ist, zu den nichteuklidischen Geometrien führt.

Weiter hat Stolz (J. B. 12; Ann. 22 und 39; Theoretische Arithmetik, V. und VI. Abschnitt) die Größenvergleichung in der Geometrie der alten Griechen sowie das Verfahren der Größenbildung, welches uns in der Euklidschen Theorie der Verhältnisse in vollendeter Gestalt entgegentritt, kritisch beleuchtet und dabei namentlich die Bedeutung, welche dem Axiom des Archimedes, d. h. dem Satze, daß eine Größe so oft vervielfältigt werden könne, daß sie jede andere ihr gleichartige Größe übertrifft, in der Theorie der absoluten Größen zukommt, hervorgehoben und klargestellt.

Die Euklidschen Prinzipien der Größenbildung wendet Stolz auch an zur Herleitung von zwei Arten unendlich kleiner Größen (J. B. 14; Allgem. Arith. I, p. 205; Ann. 31). Die erste Art dieser Größen, die er Momente nennt, knüpft sich an ein System von Funktionen $f(x), g(x), \ldots$ an, von denen jede bei einem und demselben bestimmten Grenzübergange des $x$ den Grenzwert $+0$ hat und welche außerdem so beschaffen sind, daß auch jede rationale Funktion von beliebig vielen dieser Funktionen bei demselben Grenzübergange (einen endlichen oder unendlichen) Grenzwert besitzt. Jeder dieser Funktionen $f(x)$ wird ein neues Objekt, ein Moment $u(f)$, zugeordnet und dabei festgesetzt, daß

mit $\lim (f:g) \gtreqless 1$ zugleich $u(f) \gtreqless u(g)$ und außerdem

$$u(f)+u(g)=u(f+g) \text{ und } u(f).u(g)=u(f.g)$$

sein solle. Es gelten dann für die ersten drei Grundoperationen (Addition, Subtraktion und Multiplikation) der Momente im allgemeinen dieselben Regeln wie bei den absoluten Zahlen. Dagegen ist die Division im System der Momente nicht unbedingt möglich; sie wird es aber, wenn man dasselbe durch die absoluten Zahlen und die Größen $u(f):u(g)$, worin $\lim (f:g)=+\infty$ ist, erweitert. Die zweite Art der von Stolz hergeleiteten unendlich kleinen Größen stimmt mit den „Nullen der Funktionen" von P. du Bois-Reymond überein. Seine Entwicklungen lassen sich unmittelbar auch auf die „Unendlich der Funktionen" übertragen. Später (M. 5) hat Stolz als eine dritte Art von unendlich kleinen Größen noch die Berührungswinkel gewisser ebener Kurven behandelt und mit den Winkeln der Halbstrahlen zu einem uneigentlichen absoluten Größensystem zusammengefaßt. Im übrigen hält Stolz, wie er selbst ausdrücklich bemerkt, keines der bekannten Systeme von unendlich kleinen Größen in der Analysis für unentbehrlich, sondern betrachtet dieselben lediglich als lehrreiche Anwendungen der Prinzipien der Größenbildung.

Die Theorie der Kettenbrüche verdankt Stolz die wichtige, zuerst in J. B. 15 mitgeteilte und in „Allgem. Arith." II, p. 300, bewiesene, allgemeine Regel, nach welcher sich die Konvergenz oder Divergenz eines jeden rein periodischen Kettenbruches entscheiden und im Falle der Konvergenz auch dessen Grenzwert un-

Digitized by Google

mittelbar bestimmen läßt. Derselben stellt er in J. B. 17 noch einige sehr einfache Divergenzkriterien für die nämlichen Kettenbrüche zur Seite.

Große Aufmerksamkeit hat Stolz auch der Reihentheorie zugewendet. Abgesehen von der systematischen Darstellung derselben, welche er in seinen Lehrbüchern gibt, hat er in einer größeren Anzahl von Abhandlungen verschiedene Probleme der Reihentheorie zum Gegenstand seiner Untersuchungen gewählt. So enthalten zunächst die beiden in der „Schlömilchschen Zeitschrift" (Bd. 20 und 29) veröffentlichten Arbeiten mehrere an Abels Abhandlung über die binomische Reihe sich anschließende Sätze über die ganzen Potenzreihen von $x$, namentlich solche über das Verhalten einer Potenzreihe auf dem Umfange des Konvergenzkreises, sowie bei Annäherung des $x$ an denselben. In W. S. 95 und 104 befaßt sich Stolz mit der Umkehrung der Potenzreihen und gelangt dabei insbesondere zu einem wichtigen Satze über den Konvergenzradius der umgekehrten Reihe. Die Abhandlung in W. S. 95, p. 659, enthält außerdem eine neue Herleitung des Grenzwertes und des Konvergenzradius der Lambertschen Reihe. Auch die zuerst von Cauchy betrachteten Doppelreihen hat Stolz (Ann. 24) sehr ausführlich untersucht. Der Cauchyschen Darstellung dieser Gebilde gegenüber hebt er besonders hervor, daß aus der Konvergenz der Doppelreihe keineswegs jene ihrer Horizontal- und Vertikalreihen folge. Nach Feststellung der Grundeigenschaften der Doppelreihen mit positiven Gliedern, sowie der absolut konvergenten Doppelreihen gelangt er sodann zu dem Satze: „Wenn die Doppelreihe sowie jede ihrer Horizontal- und Vertikalreihen und ebenso ihre Diagonalreihe konvergiert, so hat die zuletzt genannte Reihe den nämlichen Grenzwert wie die Doppelreihe selbst." Hieraus ergibt sich schließlich, wie bei den einfachen unendlichen Reihen, als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Doppelreihe bei jeder Anordnung ihrer Glieder konvergiere und stets den nämlichen Grenzwert darbiete, die absolute Konvergenz derselben. Eine Anwendung auf elliptische Funktionen finden die Doppelreihen in J. B. 12.

Der Theorie der analytischen Funktionen gehören zunächst drei kleinere Arbeiten (J. B. 11, 15 und 17) an. Die erste behandelt einen von Picard gegebenen Satz über eine bestimmte Reihenentwicklung einer analytischen Funktion $f(x)$, welche innerhalb des Kreises vom Radius $r<1$ mit Ausnahme des Nullpunktes keinen singulären Punkt besitzt. In der zweiten leitet Stolz die Partialbruchentwicklung der Funktion $e^{az}:(e^z-1)$ auf einem von Briot und Bouquet vorgeschlagenen Wege her. Die dritte endlich enthält eine genaue Untersuchung der Unstetigkeiten der Hauptzweige, sowie der wechselseitigen Beziehungen der Hauptwerte der verschiedenen Kreisfunktionen. Einige neue Sätze über monogene analytische Funktionen hat Stolz im VIII. Abschnitt der „Einleitung in die Funktionentheorie" hergeleitet. Auch kann hier noch

Digitized by Google

auf eine andere von seinen letzten Publikationen, Acta math. 28, hingewiesen werden, worin er nachweist, daß Abel in seiner Abhandlung über die binomische Reihe die Frage nach denjenigen analytischen Funktionen $f(x)$, die dem Additionstheoreme $f(x).f(y) = f(x+y)$ gehorchen, unter einer gewissen Beschränkung gelöst habe.

Zahlreiche uud höchst bedeutsame Arbeiten hat Stolz auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung veröffentlicht. Von diesen wollen wir zunächst diejenigen betrachten, welche sich mit Gegenständen der Differentialrechnung befassen. In Ann. 14 und 15 leitet Stolz auf verschiedenen Wegen die Bedingungen her, unter welchen die bekannte, schon von Cauchy behandelte, jedoch von letzterem noch nicht in befriedigender Weise erledigte Formel für die sogenannten unbestimmten Quotienten $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ bei einem bestimmten Grenzübergange des $x$ besteht, wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ dabei je einen unendlichen Grenzwert besitzen. Während bei Cauchy die Existenz des Grenzwertes $\lim \{f(x) : \varphi(x)\}$ vorausgesetzt ist, wodurch die Formel praktisch fast wertlos wird, ist nach Stolz nur das Vorhandensein von $\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\}$ zum vorhinein verlangt. Stolz dehnt die obige Formel auch auf den Fall aus, daß nur $\varphi(x)$ bei dem betreffenden Grenzübergange einen unendlichen Grenzwert hat, während $f(x)$ endlich bleibt. In der ersteren der beiden genannten Abhandlungen ist außerdem der Fall, daß $f(x)$ und $\varphi(x)$ zugleich zur Null konvergieren, mit in Betracht gezogen. Daselbst benützt Stolz zwei Hilfssätze, welche auch an sich von Interesse sind und in der Theorie der Konvergenz und Divergenz der unendlichen Reihen vorteilhafte Verwendung finden; sie besagen, daß die Gleichung

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=+\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} \quad (h \gtrless 0)$$

besteht, wenn der Grenzwert auf der rechten Seite vorhanden ist, $\varphi(x)$ bei wachsendem $x$ sich stets in dem nämlichen Sinne ändert und entweder $\lim \varphi(x) = +\infty\,(-\infty)$ ist, oder aber $f(x)$ und $\varphi(x)$ zugleich den Grenzwert Null haben. Mehrfache Verallgemeinerungen dieser Sätze hat er später in Ann. 33 gegeben.

Vier wichtige Abhandlungen hat Stolz über die Maxima und Minima der Funktionen mehrerer Veränderlichen geschrieben. Mit diesem Gegenstande hatte er sich, wie bereits bemerkt wurde, schon in einer seiner ersten Arbeiten (W. S. 58) befaßt. In derselben leitet er auf einem sehr einfachen und übersichtlichen Wege die Regel her: Wenn die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ an einer Stelle $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, an welcher alle ersten, jedoch nicht alle zweiten partiellen Ableitungen verschwinden, sich in eine Taylorsche Reihe entwickeln läßt, so müssen, damit überhaupt ein Extremum vor-

Digitized by Google

handen sei, die Hauptunterdeterminanten aller geraden Grade der Determinante

$$H = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s} \right| (r, s = 1, 2, \ldots n),$$

soweit sie nicht verschwinden, sämtlich positiv sein; die Hauptunterdeterminanten aller ungeraden Grade von $H$ sind, soweit sie nicht verschwinden, im Falle eines Maximums sämtlich negativ, im Falle eines Minimums sämtlich positiv. Im Anschluß hieran betrachtet Stolz sodann noch die relativen Extreme, sowie jene der impliziten Funktionen. Erst 22 Jahre später finden wir ihn zum zweitenmal mit diesem Gegenstand beschäftigt. Angeregt wurde er hiezu durch die im Jahre 1890 erschienene „Theorie der Maxima und Minima einer Funktion von zwei Veränderlichen" von Scheeffer, zu der er eine drei Abhandlungen umfassende, äußerst wertvolle Ergänzung lieferte. In W. S. 99 beweist er zunächst den Fundamentalsatz der Scheefferschen Theorie für $m$ Veränderliche und sucht die von Scheeffer gegebene Methode zur Bestimmung der Extrema auf Funktionen von mehreren Veränderlichen auszudehnen, wobei er für den Fall dreier Veränderlichen zu einem vollständigen Abschlusse gelangt. In der zweiten Abhandlung (W. S. 100) führt er uns ein neues Verfahren zur Bestimmung der Extrema einer Funktion zweier Veränderlichen vor und zeigt zugleich, wie sich dasselbe auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen übertragen lasse. Die Grundlage desselben bildet der Doppelsatz: Wenn die in der Umgebung der Stelle $(0, 0)$ stetige Funktion $f(x, y)$ bei konstantem $x$ und Beschränkung des $y$ auf das Intervall $(-x, x)$ für $y = \varphi(x)$ und ebenso bei konstantem $y$ und Beschränkung von $x$ auf das Intervall $(-y, y)$ für $x = \psi(y)$ ihre obere (bezw. untere) Grenze erreicht, so ist zum Vorhandensein eines Maximums (bezw. Minimums) notwendig und hinreichend, daß eine Zahl $\delta > 0$ derart existiert, daß für $0 < |x| < \delta$ und $0 < |y| < \delta$ sowohl $f(x, \varphi(x))$ als auch $f(\psi(y), y)$ kleiner (bezw. größer) als $f(0, 0)$ sei. Sowohl die Scheeffersche als auch die Stolzsche Methode führt in ihrer Anwendung auf eine Funktion von $m$ Veränderlichen in letzter Linie darauf hinaus, ein System von $m - 1$ algebraischen Gleichungen zwischen diesen $m$ Veränderlichen nach $m - 1$ Veränderlichen durch Reihen aufzulösen. Stolz untersucht nun in seiner dritten Abhandlung (W. S. 102) noch eingehend den Fall, daß die linken Seiten dieser Gleichungen einen gemeinsamen Teiler besitzen.

Große Verdienste hat sich Stolz noch um die Theorie der bestimmten Integrale erworben. Seine Arbeiten auf diesem Gebiete umfassen wohl alle grundlegenden Fragen der bestimmten Integralrechnung und sind durchaus von fundamentaler Bedeutung. In Ann. 23 stellt er zwei zum bestimmten Integrale in naher Beziehung stehende Grenzwerte für Punktmengen auf, welche er die Intervallgrenze bezw. die Flächengrenze der betreffenden Punkt-

Digitized by Google

menge nennt; dieselben sind mit den heute als äußere Länge einer linearen bezw. äußere Flächenzahl einer ebenen Punktmenge bekannten Grenzwerten identisch. Die Abhandlungen M. 7 und W. S. 107, p. 736, bringen zwei neue Formen der Bedingung für die Integrierbarkeit einer endlichen Funktion $f(x)$ in einem endlichen Intervall. Ebenso enthält die Abhandlung Ann. 26 eine neue Form der Integrabilitätsbedingung für eine Funktion von zwei Veränderlichen; dieselbe lehnt sich an den gerade erwähnten Begriff der Flächengrenze an und lautet: Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, daß die endliche Funktion $f(x, y)$ ein eigentliches Doppelintegral im Gebiete $F$ besitzt, besteht darin, daß die Punkte $(x', y')$ in $F$, in welchen der Sprung der Funktion $f(x, y)$ irgend eine vorgelegte positive Zahl $\rho$ übersteigt, ein System von der Flächengrenze Null bilden. Stolz zeigt auch an einigen Beispielen, daß diese Form der Integrierbarkeitsbedingung manchmal bequemer ist als die gewöhnliche. Im Anschlusse daran beweist er noch einen Satz über die Berechnung eines Doppelintegrals durch zwei aufeinander folgende Integrationen. In der nämlichen Abhandlung hebt Stolz die große Bedeutung hervor, welche die gleichmäßige Konvergenz für die Integralrechnung hat, und zeigt insbesondere, welche Wichtigkeit diesem Begriffe bei Aufstellung der allgemeinen Quadraturformel sowie der allgemeinen Formeln für den Körperinhalt, für die Komplanation und für die Transformation eines Doppelintegrals zukomme. In M. 8 dehnt er die von Peano für das einfache bestimmte Integral gegebene Definition auf das Doppelintegral aus für den Fall, daß die zu integrierende Funktion $f(x, y)$ keine negativen Werte annimmt. Die Abhandlung W. S. 106 bringt zwei neue, zu einer für alle Punkte eines ebenen Punktsystems erklärten und dabei endlichen Funktion $f(x, y)$ gehörige Grenzwerte, welche als besondere Fälle das obere Doppelintegral in sich enthalten und für den Fall $f(x, y) \equiv 1$ in die äußere bezw. innere Flächenzahl der Punktmenge übergehen. Zwei analoge Grenzwerte entsprechen auch dem unteren Doppelintegral und es lassen sich dieselben, wie Stolz noch bemerkt, auch auf den Raum von drei und mehr Dimensionen übertragen.

Über die absolut konvergenten uneigentlichen bestimmten Integrale hat Stolz in den Jahren 1898 und 1899 drei wichtige Arbeiten (W. S. 107 und 108; M. 9) veröffentlicht. Bekanntlich hatte De la Vallée-Poussin in seiner Abhandlung: „Recherches sur la convergence des intégrales définies“ (Journ. de Math., 1892) die absolute Konvergenz der uneigentlichen Integrale über ein endliches Gebiet, und zwar sowohl der einfachen als auch der Doppelintegrale auf eine neue Weise erklärt und eine vollständige Theorie dieser Integrale gegeben. Stolz stellt nun derselben eine zweite, ebenso allgemeine und in ihren Ergebnissen mit der ersteren durchaus übereinstimmende Theorie der uneigentlichen Integrale gegenüber, die sich hinsichtlich der einfachen Integrale auf die allgemein übliche, von Cauchy herrührende Erklärung und auf die von



Digitized by Google

Harnack gegebene Erweiterung derselben gründet, welche letztere Stolz strenger gefaßt und in ihren Folgen konsequent durchgeführt hat. Einen analogen Weg schlägt er auch bezüglich der uneigentlichen Doppelintegrale ein. Die betreffenden Untersuchungen finden sich auch im 3. Teile der „Grundzüge“ ausführlich dargestellt. Schließlich mögen hier noch die von Stolz gegebenen, in M. 11, Transactions 3 und Münchner Ber. 35 enthaltenen Existenzbeweise für das komplexe Integral längs eines regulären Weges erwähnt sein.

Von den Stolzschen Abhandlungen können mehrere als Vorarbeiten, einige auch als Nachträge zu seinen Lehrbüchern, in denen die Ergebnisse seiner Forschungen, soweit dieselben der Arithmetik, Funktionentheorie oder Infinitesimalrechnung angehören, zum größten Teile niedergelegt sind, betrachtet werden. Selbstredend enthalten seine Lehrbücher auch manche von ihm selbst aufgefundene Sätze und Resultate, welche in den Abhandlungen nicht vorkommen, sondern erst aus der Ausarbeitung des in den ersteren vorgetragenen Stoffes gleichsam hervorgewachsen sind. In dem vorstehenden kurzen Überblicke konnte jedoch nur gelegentlich auf einige derselben hingedeutet werden. Aber auch dort, wo Stolz bereits Vorhandenes gesammelt hat, tritt uns in der Behandlungsweise und Darstellung des Stoffes seine kraftvolle Eigenart entgegen. Er hat eben nirgends nur gesammelt, sondern überall dem behandelten Gegenstand seinen eigenen Geist eingeprägt. Insbesondere hat er gar manche Begriffe und Sätze genauer und strenger gefaßt, als es vor ihm der Fall war. Die Stolzschen Lehrbücher haben auch in der Tat in den Fachkreisen allgemein sehr günstige Aufnahme und Anerkennung gefunden und es ist an ihnen namentlich die Klarheit, Einfachheit und große Genauigkeit in der Darstellung des darin vorgeführten Stoffes sowie ihre Reichhaltigkeit an literarischen Nachweisen von den verschiedensten Seiten mit Recht rühmend hervorgehoben worden.

Durch seine Werke hat sich Stolz selbst das beste Denkmal, ein monumentum aere perennius geschaffen und in ihnen wird sein Geist fortleben und uns belehrend weiter begleiten, wenn auch der unerbittliche Tod ihn selbst, den geliebten Meister, uns entrissen hat. Ein zweites Denkmal hat er in den Herzen seiner Schüler hinterlassen, denen er ein ausgezeichneter Lehrer, ein gewissenhafter und wohlmeinender Führer und Berater war, und dankbar werden alle, die einst seinen begeisterten Worten gelauscht, ihm ein treues Andenken, voll der höchsten Verehrung bewahren. Wer aber des näheren persönlichen Verkehres mit ihm sich erfreute, der betrauert in ihm nicht nur den hervorragenden Gelehrten und den hochgeschätzten Lehrer, sondern vor allem den edlen, lieben Menschen.

---

Digitized by Google

Weiter betrachten wir Formen der Gestalt

$$\int \Pi \sigma_{\lambda,\mu}^{k_{\lambda,\mu}}(u)\,\frac{\sigma_{\lambda,\mu}^{2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{3-\lambda,\,3-\mu}(u)}\,du.$$

Der zutretende Faktor soll ferner mit $Q(u)$ bezeichnet werden und man sieht sofort, daß es einfachere $Q(u)$ nicht geben kann, wenn dabei die in § 7 genannten Bedingungen erfüllt sein sollen.

Diese Integrale wollen wir die zu dem aus $P(u)$ entspringenden nächstverwandten Integrale nennen. So gestaltete $Q(u)$ sind uns aber bereits in den Relationen (18) begegnet. Beachten wir also, daß wegen $\sum k_{\lambda,\mu} = 0$ ·

$$\sum_{\lambda,\mu} k_{\lambda,\mu}\frac{d}{du}\,l\,\sigma_{\lambda,\mu}(u) = \sum_{\lambda,\mu} k_{\lambda,\mu}\frac{d}{du}\,l\,\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u),$$

so erhalten wir sogleich folgende, für das Weitere wichtige Relation zwischen nächstverwandten Integralen:

$$(20)\quad \begin{cases} A\int P(u)\,du + k_{0,1}\dfrac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^{2}}\int P(u)\,\dfrac{\sigma_{0,2}^{2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\,du + \\ + k_{0,2}\dfrac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^{2}}\int P(u)\dfrac{\sigma_{0,1}^{2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\,du + k_{1,0}\dfrac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{2,0}^{2}}\int P(u)\,\dfrac{\sigma_{2,0}^{2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\,du + \\ + k_{1,1}\dfrac{\sigma_{1,1}}{\sigma_{2,2}^{2}}\int P(u)\dfrac{\sigma_{2,2}^{2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,1}(u)}\,du + k_{1,2}\dfrac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,1}^{2}}\int P(u)\,\dfrac{\sigma_{2,1}^{2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,2}(u)}\,du + \\ + k_{2,0}\dfrac{\sigma_{2,0}}{\sigma_{1,0}^{2}}\int P(u)\dfrac{\sigma_{1,0}^{2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,0}(u)}\,du + k_{2,1}\dfrac{\sigma_{2,1}}{\sigma_{1,2}^{2}}\int P(u)\,\dfrac{\sigma_{1,2}^{2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,1}(u)}\,du + \\ + k_{2,2}\dfrac{\sigma_{2,2}}{\sigma_{1,1}^{2}}\int P(u)\,\dfrac{\sigma_{1,1}^{2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,2}(u)}\,du = 0. \end{cases}$$

Dabei bedeutet

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{3\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}\Big[&\sigma_{0,1}^{3}(-\varepsilon^{-1}k_{1,0} - k_{1,1} - \varepsilon^{-2}k_{1,2} + \varepsilon^{-1}k_{2,0} + \varepsilon^{-2}k_{2,1} + k_{2,2}) + \\ &+ \sigma_{1,0}^{3}(\varepsilon^{-1}k_{0,1} - \varepsilon^{-1}k_{0,2} + \varepsilon^{-2}k_{1,1} - k_{1,2} + k_{2,1} - \varepsilon^{-2}k_{2,2}) + \\ &+ \sigma_{1,1}^{3}(k_{0,1} - k_{0,2} - \varepsilon^{-2}k_{1,0} + \varepsilon^{-1}k_{1,2} + \varepsilon^{-2}k_{2,0} - \varepsilon^{-1}k_{2,1}) + \\ &+ \sigma_{1,2}^{3}(\varepsilon^{-2}k_{0,1} - \varepsilon^{-2}k_{0,2} - \varepsilon^{-1}k_{1,1} + \varepsilon^{-1}k_{2,2} + k_{1,0} - k_{2,0})\Big]. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Die Integrale sind dabei durchwegs als Doppelumlaufintegrale um dieselben zwei sonst beliebig zu wählenden Periodendrittel zu verstehen. Durch irgend eine Transformation der Perioden wird sich

$$P(u) = \prod_{\lambda,\mu} \sigma_{\lambda,\mu}^{k_{\lambda,\mu}}(u)$$

in der Weise ändern, daß sich die $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ in bestimmter Weise vertauschen; die $Q(u)$ aber werden samt den Modulfunktionen als Koeffizienten wechselweise ineinander übergehen. Ändern wir daher die $k_{\lambda,\mu}$ nach der Transformation so, daß unter dem Integralzeichen an erster Stelle wieder $P(u)$ erscheint, so hat sich an unserer Relation (20) überhaupt nichts geändert und es bleibt daher auch $A$ bei irgend einer Transformation der Perioden unter gleichzeitiger oberwähnter Änderung der $k_{\lambda,\mu}$ ungeändert. Weiter brauchen wir in (20) nur an Stelle von $u \mid u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}$ zu setzen und die $k_{\lambda,\mu}$ so zu ändern, daß unter dem Integral an erster Stelle wieder das ursprüngliche $P(u)$ erscheint, um acht andere völlig analog gebildete Relationen zu erhalten, wo also genau so wie in (20) $\sigma(u)$ irgend ein anderes der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ in den Nennern der $Q(u)$ gemeinsam ist. Hervorgehoben sei endlich noch, daß wir bei dieser Methode, Relationen zwischen verwandten Integralen zu finden, stets auf solche Relationen kommen werden, deren einzelne Glieder aus einander durch Transformation hervorgehen und daher symmetrischen Bau aufweisen.

Vermöge der Identität

$$\frac{d}{du} l \frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) - \frac{d}{du} l \frac{\sigma_{\lambda',\mu'}}{\sigma}(u) = \frac{d}{du} l \frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma_{\lambda',\mu'}}(u)$$

können wir nun unter Benützung des auf p. 154 gesagten leicht zu allgemeineren Relationen unter Beibehaltung derselben Form der $Q(u)$ aufsteigen, indem sich uns Relationen ergeben, wo die $Q(u)$ nicht mehr die Eigenschaft haben, eines der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ im Nenner gemein zu haben. Die $Q(u)$ haben also die Gestalt

$$\frac{\sigma_{\lambda,\mu}^2(u)}{\sigma_{\lambda',\mu'}(u)\,\sigma_{\lambda'',\mu''}(u)} \qquad \begin{matrix} 2\lambda - \lambda' - \lambda'' \equiv 0 \pmod 3 \\ 2\mu - \mu' - \mu'' \equiv 0 \pmod 3 \end{matrix}$$

Es ergeben sich so leicht 36 Relationen, aus denen durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren und Addition alle anderen folgen. Die erhaltenen Relationen sind sämtlich neungliedrig.

Digitized by Google

## § 9. Eine achtgliedrige Relation zwischen verwandten Integralen.

Auf genau demselben Wege können wir aber auch zu achtgliedrigen Relationen zwischen verwandten Integralen kommen, wenn wir nur die Darstellung von $\frac{\partial}{\partial u} l \frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)$ im Gleichungssystem (17) heranziehen.

Wollte man auch hier sämtliche Relationen dieser Art bilden, so wäre es allerdings notwendig, entweder vermittels Relationen zwischen den $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ aus den oberwähnten 36 Relationen diese zu entwickeln oder aber die $X_0(u)$, $X_1(u)$, $X_2(u)$ in anderer Weise festzulegen.

Die gesuchte Relation aber lautet:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}{\sigma_{2,0}\sigma_{2,1}\sigma_{2,2}}(\varepsilon^{-1}k_{0,1}-k_{0,2})\int P(u)\frac{\sigma_{2,0}(u)\sigma_{2,1}(u)\sigma_{2,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)\sigma_{0,2}(u)}du+\\
&+\frac{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}{\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}(\varepsilon^{-1}k_{0,2}-k_{0,1})\int P(u)\frac{\sigma_{1,0}(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{1,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)\sigma_{0,2}(u)}du+\\
&+\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{2,2}}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,2}\sigma_{2,0}}(\varepsilon^{-1}k_{1,1}-k_{2,2})\int P(u)\frac{\sigma_{0,1}(u)\sigma_{1,2}(u)\sigma_{2,0}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{1,2}(u)}du+\\
&+\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{2,2}}{\sigma_{0,2}\sigma_{1,0}\sigma_{2,1}}(\varepsilon^{-1}k_{2,2}-k_{1,1})\int P(u)\frac{\sigma_{0,2}(u)\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,1}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{2,2}(u)}du+\\
&+\frac{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}}{\sigma_{0,2}\sigma_{1,2}\sigma_{2,2}}(\varepsilon^{-1}k_{2,0}-k_{1,0})\int P(u)\frac{\sigma_{0,2}(u)\sigma_{1,2}(u)\sigma_{2,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,0}(u)}du+\\
&+\frac{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}\sigma_{2,1}}(\varepsilon^{-1}k_{1,0}-k_{2,0})\int P(u)\frac{\sigma_{0,1}(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{2,1}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,0}(u)}du+\\
&+\frac{\sigma_{1,2}\sigma_{2,1}}{\sigma_{0,2}\sigma_{1,1}\sigma_{2,0}}(\varepsilon^{-1}k_{2,1}-k_{1,2})\int P(u)\frac{\sigma_{0,2}(u)\sigma_{1,1}(u)\sigma_{2,0}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,2}(u)\sigma_{2,1}(u)}du+\\
&+\frac{\sigma_{1,2}\sigma_{2,1}}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{2,2}}(\varepsilon^{-1}k_{1,2}-k_{2,1})\int P(u)\frac{\sigma_{0,1}(u)\sigma_{1,0}(u)\sigma_{2,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{1,2}(u)\sigma_{2,1}(u)}du=0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Was nun $n^2+1$-gliedrige Relationen zwischen verwandten Integralen betrifft, so sind dieselben aus $n^2+1$-gliedrigen Relationen

Digitized by Google

zwischen den $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ nach dem Hermiteschen Satze leicht aufzustellen. Doch sind uns solche Relationen für das Folgende nicht von Wichtigkeit.

(Schluß im nächsten Heft)

---

## INHALT.

I. Einleitung. Seite

§ 1. Gegenstand und Aufgabe der folgenden Untersuchungen . . . . . 138

II. Vorbereitende Formeln.

§ 2. Formeln zwischen den σ-Teilwerten . . . . . 140
§ 3. Formeln betreffend die Tetraederirrationalität . . . . . 145
§ 4. Formeln betreffend die Ableitungen der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ nach ω . . . . . 146
§ 5. Darstellung der $\frac{\partial}{\partial u} l \frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)$ durch elliptische Funktionen dritter Ordnung 150
§ 6. Darstellung der $\frac{\partial}{\partial u} l \frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)$ durch elliptische Funktionen zweiter Ordnung 152

III. Relationen zwischen verwandten Integralen.

§ 7. Benachbarte Formen und verwandte Formen . . . . . 155
§ 8. Die nächstverwandten Integrale. Relationen zwischen diesen . . . . . 156
§ 9. Eine achtgliedrige Relation zwischen verwandten Integralen . . . . . 159

---

Digitized by Google

# Bedeutende Preisermäßigung!

Im Besitze der gesamten Vorräte, bieten wir folgende in Fachkreisen bestens bekannte und berühmte Zeitschrift zu sehr ermäßigten Preisen an:

# Archiv der Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von **A. Grunert,** fortgesetzt von **R. Hoppe.**

I. Reihe: Band 1—2, 9—19, 21—25, 27—48 und 51—70 (1841—1883).
II. Reihe: Band 1—17 (1884—1899).
Registerhefte: I zu Band 1—25; II zu Band 26—40; III zu Band 41—54 IV zu Band 55—70.
(Die Bände 3—8, 20, 26 und 49—50 sind vergriffen und nicht mehr zu haben).

Wir offerieren bis auf Wiederruf, da spätere Preiserhöhung vorbehalten sobald ein bestimmter Vorrat verkauft ist:

**1 Exemplar aller vorrätigen 77 Bände mit den 4 Registerheften** statt des Ladenpreises von **950 Kronen** für **250 Kronen.**

Einzelne Bände der I. Reihe für **4 Kronen.**
Einzelne Bände der II. Reihe für **6 Kronen.**

Die bedeutendsten Mathematiker und Physiker unserer Zeit zählen zu den Mitarbeitern dieses seit 65 Jahren erscheinenden Archivs, das hauptsächlich den Bedürfnissen der Mittelschulprofessoren entgegenkommt

Wir empfehlen deshalb ganz speziell den Gymnasial- und Realschulbibliotheken die Gelegenheit zu benützen, etwa fehlende Bände zu ergänzen oder wo das Archiv in der betreffenden Bibliothek noch fehlt, alle 77 Bände anzuschaffen.

Bestellungen beliebe man an uns selbst oder an jede beliebige Buchhandlung zu richten.

**J. Eisenstein & Co.**
Buchhandlung u. Antiquariat,
**Wien, IX/3, Währingerstr. 2.**


Digitized by Google

# Inhaltsverzeichnis.


Seite

*Gmeiner, J. A.*, Otto Stolz, Nachruf . . . . . 161

*Berger, Alfred*, Über die zur dritten Stufe gehörigen hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde . . . . . 179

*Tauber, Alfred*, Über die unvollständigen Gammafunktionen . . . . . 207

*Niels Nielsen*, Notiz über die Kugelfunktionen . . . . . 222

*Carda, Karl*, Über eine Schar dreigliedriger algebraischer Gruppen der Ebene 225

*Biermann, Otto*, Über gewisse lineare Transformationen . . . . . 234


## Literaturberichte.


*Scott, Robert Forsyth*, The theory of determinants and their applications . 33

*Dassen, Claro Cornelio*, Étude sur les quantités mathématiques, grandeurs dirigées, quaternions . . . . . 34

*Netto, Eugen, Dr.*, Elementare Algebra . . . . . 35

*Sturm, Ambros*, Geschichte der Mathematik . . . . . 36

*Cantor, Moritz*, Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften . . . . . 37

*Gans, Richard, Dr.*, Einführung in die Vektoranalysis . . . . . 38

*Abraham, M., Dr.*, Theorie der Elektrizität . . . . . 38

Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1906 . . . . . 39

*Rogel, Fr.*, Das Rechnen mit Vorteil . . . . . 40

*La Cour, Paul*, und *Appell, Jakob*, Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung . . . . . 40

*Lehmann, Otto, Dr.*, Dr. J. Fricks Physikalische Technik . . . . . 40

*Müller-Pouillet's* Lehrbuch der Physik und Meteorologie . . . . . 41

*Wien, W., Dr.*, Über Elektronen . . . . . 42

*Neesen, Friedrich, Dr.*, Die Physik . . . . . 42

*Blau, Ernst*, Die Mechanik fester Körper . . . . . 43

*Wilda*, Diagramm- und Flächenmesser . . . . . 43

Astronomischer Kalender für 1906 . . . . . 44

*Ostwalds* Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 147 . . . . . 44

*Chwolson, O. D.*, Lehrbuch der Physik . . . . . 44

*Fraunhofer, J.*, Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Glasarten . . . . . 45

*Classen, J.*, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus . . . . . 45

*Bucherer, A. H.*, Mathematische Einführung in die Elektronentheorie . . . 45

*Marcuse, Adolf, Dr.*, Handbuch der geographischen Ortsbestimmung . . . 45

*Leher, Ernst, Dr.*, Das Wasser und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe . . . . . 46

*Danneel, Heinrich, Dr.*, Elektrochemie . . . . . 47

*Karrass, Th.*, Telegraphen- und Fernsprechtechnik in Einzeldarstellungen . 47

*Schubert, Hermann, Prof. Dr.*, Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis . . . . . 47

*Wallentin, Ignaz, Dr.*, Grundzüge der Naturlehre . . . . . 48


Digitized by Google

# Otto Stolz.

Nachruf von **J. Anton Gmeiner** in Prag.

Am 25. November 1905 wurde in Innsbruck einer der hervorragendsten Mathematiker Österreichs, dessen Name in der gesamten mathematischen Welt wohlbekannt und hochgeschätzt ist, Hofrat Professor Dr. Otto Stolz, unter allgemeiner Trauer zu Grabe getragen. Dem Sarge folgten die Angehörigen des Verblichenen, die Professoren der Universität, die verschiedenen studentischen Vereinigungen sowie zahllose Bürger und Einwohner Innsbrucks. Bei der St. Johannes-Kapelle am Innrain, wo die Einsegnung der Leiche stattfand, brachte der akademische Gesangverein dem allverehrten Lehrer zum letzten Abschiedsgruße das ergreifende Lied: „Dort über den Sternen ist alles klar" zum Vortrage und es nahm darauf der Trauerzug seinen Weg zu den Arkaden des Innsbrucker städtischen Friedhofes, unter denen die irdische Hülle des Verstorbenen zur ewigen Ruhe gebettet wurde.

Otto Stolz[1]) wurde am 3. Juli 1842 zu Hall in Tirol als Sohn des Hauswundarztes und nachmaligen Direktors der dortigen Landesirrenanstalt Dr. med. et chir. Josef Stolz und dessen Gattin Aloisia, geb. Rapp, Tochter des k. k. Gubernialprokurators Dr. Josef Rapp, des bekannten Verfassers des Geschichtswerkes „Tirol im Jahre 1809", geboren. Sein Vater der schon als praktischer Arzt und geschickter Operateur eine ausgebreitete Tätigkeit entfaltet hatte, wandte sich später hauptsächlich der Psychiatrie zu und erwarb sich durch seine Publikationen auf diesem Gebiete einen bleibenden Ruf. Insbesondere suchte er das traurige Los der Irren auf jede mögliche Weise zu erleichtern und führte auf humanere Behandlung der Geisteskranken abzielende Reformen mit Erfolg durch. Im Jahre 1873 zum Supplenten der Psychiatrie an der Innsbrucker Universität bestellt, hielt er von da ab in jedem Sommersemester Vorträge über dieses Fach und wurde später auch zum Examinator der Psychiatrie bei den Physikatsprüfungen ernannt, welche Ämter er bis zu seinem im Jahre 1877 erfolgten Tode bekleidete. Auch der Bruder des letzteren, Michael Stolz, hatte sich als Bildhauer einen bedeutenden Namen verschafft.

[1]) Die biographischen Daten verdanke ich zum größeren Teile dem Bruder des Verstorbenen, Herrn Prof. Dr. Friedrich Stolz. Einige Angaben sind dem Wurzbachschen biographischen Lexikon entnommen.



Digitized by Google

Kunst und Wissenschaft fanden also in der elterlichen Familie Stolz die eifrigste Pflege. Infolgedessen erhielten die beiden Söhne derselben, von denen Otto der ältere war, schon in ihrer zartesten Jugend die vielseitigste Anregung zur Entwicklung ihrer geistigen Fähigkeiten, welche denn auch auf fruchtbarsten Boden fiel.

Otto Stolz begann seine Mittelschulstudien am Franziskaner-Gymnasium in seiner Vaterstadt Hall. Da jedoch dort zur damaligen Zeit nur die unteren Klassen bestanden, wandte er sich schon nach Absolvierung des dritten Kurses nach Innsbruck, wo er seine Studien am Obergymnasium fortsetzte. Hier bot sich ihm noch als Gymnasiasten die Gelegenheit, sich als treuer Sohn des herrlichen Tirols in den Dienst des Vaterlandes zu stellen. Im Kriegsjahre 1859 ließ er sich nämlich in die unter dem Rektorat Fickers aufgestellte akademische Schützenkompagnie, bei der unter anderen auch sein späterer Lehrer der Mathematik, Professor Baumgarten, als Oberleutnant stand, einreihen. Die Kompagnie, die schon anfangs Juni ihre Ausrüstung vollendet hatte, marschierte am 21. Juni unter dem Kommando des Hauptmannes Hupfauf, dessen Name schon vom Jahre 1848 her bekannt ist, 140 Mann stark von Innsbruck nach Trient ab und rückte von dort nach Loppio und Riva vor, wo sie Aufstellung nahm. Wohl wurde die Studentenkompagnie während ihrer länger dauernden Kriegsbereitschaft in kein feindliches Gefecht verwickelt; daß sie aber ihre Aufgabe ehrenvoll gelöst hatte, bezeugt die allerhöchste Anerkennung, die ihr nach ihrer Rückkehr nach Innsbruck im September desselben Jahres zu teil wurde.

Im darauffolgenden Jahre (1860) beendete Stolz seine Gymnasialstudien und bezog sodann, mit einem Zeugnisse der Reife mit Auszeichnung versehen, im Herbste desselben Jahres die Innsbrucker Universität. Hier hörte er durch sechs Semester hindurch vorzüglich Vorlesungen über Mathematik bei Baumgarten, Physik bei Waltenhofen, Chemie bei Hlasiwetz und Botanik bei Kerner. Mit welchem Eifer er sich gleich von Anfang an in das Studium der Mathematik vertiefte und wie rasch er sich dank seiner hervorragenden Begabung in dieser Wissenschaft, die sein Berufsfach werden sollte, zurecht fand, ersehen wir daraus, daß er schon im zweiten Universitätsjahre die von der philosophischen Fakultät für das Studienjahr 1861/62 ausgeschriebene Preisaufgabe: „Man gebe einen Abriß der Lehre von den singulären Punkten, welche bei ebenen algebraischen Kurven vorkommen“ löste und für diese Arbeit den Preis von 210 Gulden zuerkannt erhielt.

Im Oktober 1863 verließ Stolz die tirolische Landeshauptstadt, um an der Universität in Wien seine Studien fortzusetzen. Hier beschäftigte er sich außer der Mathematik insbesondere auch eingehend mit Astronomie. Er hörte die Vorlesungen von Petzval und Littrow und erwarb sich im Oktober 1864 die philosophische Doktorwürde.

Digitized by Google

In der nächsten Zeit stand Stolz beim Feldmarschalleutnant Paumgartten in Mainz und Lemberg in Verwendung; er kehrte aber nach einiger Zeit wieder nach Wien zurück, wo er im Mai 1867 zum Assistenten der Universitätssternwarte bestellt wurde. Im nämlichen Jahre habilitierte er sich, nachdem er schon im Februar eine größere Arbeit über die Achsen der Kurven zweiter Ordnung vollendet und an die Akademie der Wissenschaften eingereicht hatte, an der Universität für das gesamte Gebiet der Mathematik und hielt daraufhin als Privatdozent Kollegien ab über Differential- und Integralrechnung, über Theorie und Anwendung der Determinanten, über analytische Geometrie des Raumes und der Kegelschnitte, sowie auch über synthetische Geometrie, welche gut besucht waren. Der Erfolg der Tätigkeit, welche Stolz in dieser ersten Zeit seiner akademischen Laufbahn entfaltete, und die Wertschätzung, welche schon seine ersten wissenschaftlichen Arbeiten erfuhren, finden sich trefflich charakterisiert im 39. Bande von Wurzbachs biographischem Lexikon. Wir entnehmen demselben die nachfolgende Stelle, die uns auch über den nächsten Zeitabschnitt aus Stolz' Leben Aufschluß gibt: „Nachdem er (Stolz) als Privatdozent eine hervorragende Lehrbegabung an den Tag gelegt, sowie durch die in der Zwischenzeit in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Abhandlungen: ‚Über die Achsen der Linien zweiter Ordnung in allgemeinen trimetrischen Punktkoordinaten' (55. Bd., 1867) und ‚Über die Kriterien zur Unterscheidung der Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlichen' (58. Bd., 1868) Beweise eines seltenen mathematischen Talents geliefert hatte, erhielt er wiederholt Staatsreisestipendien zu dem Zwecke, auf den Universitäten in Berlin und Göttingen, an welchen die neuere Richtung der mathematischen Forschung ihre glänzendste Vertretung fand, seine höhere Ausbildung zu fördern."

In Berlin, wohin sich Stolz im Herbste 1869 begeben hatte, besuchte er durch drei Semester die Kollegien Weierstraß', Kummers und Kroneckers und nahm während dieser Zeit auch an dem von Weierstraß und Kummer geleiteten Seminar den tätigsten Anteil. Einen überwältigenden Eindruck machten auf den jungen Gelehrten, wie aus mehrfachen gelegentlichen Äußerungen Stolz' hervorgeht, Weierstraß' funktionentheoretische Vorlesungen, wie denn überhaupt von den drei genannten Meistern der mathematischen Wissenschaft Weierstraß auf Stolz offenbar den tiefstgehenden und nachhaltigsten Einfluß ausgeübt hatte. Die der Weierstraßschen Lehre in ganz besonderem Grade eigene Exaktheit sagte der wissenschaftlichen Auffassung und ich möchte sagen, auch dem ganzen Charakter von Stolz am meisten zu und findet sich in den Arbeiten und Werken des letzteren wieder. Während seines Aufenthaltes in Berlin veröffentlichte Stolz seine Abhandlung „Über eine analytische Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in voller



Digitized by Google

Allgemeinheit", welche im 16. Bande der Schlömilchschen Zeitschrift erschien.

Das Sommersemester 1871 brachte Stolz in Göttingen zu, wo er Clebsch und Klein hörte und seinen bereits gewonnenen wissenschaftlichen Gesichtskreis um manche wertvolle und fruchtbringende Idee erweiterte. Hier schrieb er die im 4. Bande der mathematischen Annalen 1871 publizierte Abhandlung über „Die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der analytischen Geometrie".

Zur Zeit als die letztgenannte Arbeit im Drucke herauskam, befand sich Stolz bereits wieder in Wien. Daselbst nahm er im Herbste 1871 seine Vorträge an der Universität vor sehr zahlreicher Hörerschaft in erweitertem Umfange wieder auf und erwarb sich schon während der kurzen Dauer seiner dortigen Lehrtätigkeit einen ausgezeichneten Ruf. Schon im nächsten Jahre, im Juli 1872, wurde er zum außerordentlichen Professor für die neuerrichtete zweite Lehrkanzel der Mathematik in Innsbruck ernannt, wo er auch vier Jahre später, am 30. Juli 1876, nachdem er einen Ruf an das Polytechnikum in Darmstadt abgelehnt hatte, das Ordinariat erlangte. Anfangs Oktober desselben Jahres vermählte sich Stolz mit Fräulein Paula Meyer aus Innsbruck.

Der Innsbrucker Universität blieb Stolz, wiewohl ihm zweimal eine Professur in Wien angeboten worden war, treu bis zu dem kurz vor seinem Tode wegen schwerer Erkrankung erfolgten Übertritte in den Ruhestand; und er war eine Zierde dieser Hochschule, die schon manche bedeutende Männer zu den Ihrigen zählen konnte.

In Innsbruck entfaltete Stolz eine ebenso erfolgreiche wie unermüdliche, der Wissenschaft und dem akademischen Lehramte gewidmete Wirksamkeit. Um seiner Lehrtätigkeit einen größeren Erfolg zu sichern, war er bald nach dem Antritte seiner Professur auf die Errichtung eines mathematischen Seminars bedacht, welches denn auch mit dem Wintersemester 1876/77 eröffnet und seiner Leitung übergeben wurde. In seinen Vorlesungen, die ein reichhaltiges Programm aufweisen, behandelte Stolz außer den bereits oben genannten Stoffen, über welche er schon als Privatdozent gelesen hatte, die Gebiete: Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die analytische Geometrie der Ebene, Theorie der Raumkurven und Flächen, allgemeine Arithmetik, Funktionentheorie, Doppelintegrale, Differentialgleichungen, Variationsrechnung, algebraische Funktionen und deren Integrale. In den früheren Jahren hielt er überdies Kollegien ab über Algebra, elliptische Funktionen, sphärische Trigonometrie und sphärische Astronomie. Dem Lehramte gab sich Stolz mit ebensolcher Liebe und Begeisterung hin wie der wissenschaftlichen Forschung; ja, diese beiden Tätigkeiten machten zusammen so recht eigentlich sein Lebenselement aus. Seine Vorträge waren sachlich überaus fein durchdacht und durchgearbeitet, klar und bündig in der Definition der Begriffe ebenso

Digitized by Google

wie in der Fassung der Lehrsätze und Probleme, streng und exakt in der Beweisführung. Ein tief gründlicher und ungemein scharfsinniger Denker, wie er war, verfolgte er die einmal aufgeworfenen Gedanken, wo immer es nur tunlich war, bis zu ihren äußersten Konsequenzen. Von der strengsten Wissenschaftlichkeit abzuweichen, ließ er sich auch durch keine didaktischen Gründe bestimmen. Jede Popularisierung der Mathematik widerstrebte ihm seiner innersten Natur nach. Daher war es dem Anfänger in der Mathematik wohl nicht immer leicht, mit seinen Ausführungen gleichen Schritt zu halten, dem fortgeschritteneren Hörer aber boten seine Vorlesungen aus ebendemselben Grunde ein um so größeres Interesse dar.

Mit der größten Gewissenhaftigkeit war Stolz stets auch darauf bedacht, seine Hörer mit den neuesten Erscheinungen auf den von ihm vorgetragenen Gebieten bekannt, oder falls dieselben seinem eigenen Lehrsystem sich nicht einfügen ließen, so doch auf sie aufmerksam zu machen. Überhaupt waren seine Vorlesungen reich an Bemerkungen über die Literatur und geschichtliche Entwicklung der Mathematik, worin er über einen unerschöpflichen Wissensvorrat verfügte. Am Schlusse seiner am 2. März 1891 in der Aula der Universität gehaltenen Rektoratsrede legte Stolz den Studierenden ans Herz, sich behufs Erwerbung gründlicher Kenntnisse und wissenschaftlicher Bildung an die Werke der Meister zu wenden oder, falls dies untunlich sein sollte, sich einen Führer zu wählen, der sie zu den Quellen und Originalen geleite; und von den hiezu berufenen Führern war er selbst der besten einer.

Wie soeben angedeutet wurde, bekleidete Stolz im Studienjahre 1890/91 die Würde des Rektors der Innsbrucker Universität. Vordem hatte er zweimal, nämlich in den Studienjahren 1877/78 und 1888/89, das Amt des Dekans der philosophischen Fakultät inne. Auch war er Mitglied der Prüfungskommission für das Lehramt an Gymnasien und Realschulen. Im Professorenkollegium genoß Stolz nicht nur als Gelehrter, sondern auch wegen seines grundehrlichen, unbedingt verläßlichen, geraden und biederen Charakters hohes Ansehen. Von ihm wurde auch die gegenwärtig geltende Geschäftsordnung der Innsbrucker philosophischen Fakultät seinerzeit ausgearbeitet. An der Universität machte er sich noch verdient um den bis Ende der Siebzigerjahre bestandenen akademischen Leseverein und das 1879 gegründete Lesekasino, dessen Vorstandschaft er durch viele Jahre hindurch angehörte.

Neben dem akademischen Lehramte war Stolz von seinen fachwissenschaftlichen Studien und Arbeiten vollauf in Anspruch genommen. Dies hinderte ihn jedoch nicht, sich nebenher noch mit anderen Wissenschaften zu beschäftigen, zu welchen er zum Teil gerade durch seine mathematischen Studien hingeführt wurde. Es möge hier nur erwähnt sein, daß Stolz ein reges Interesse für die alte Geschichte des Orients und Ägyptens an den Tag legte, das durch sein eingehendes Studium der Geschichte der Mathematik von ihren ersten Anfängen an und insbesondere durch daraus sich

Digitized by Google

ergebende chronologische Fragen beständig wach erhalten wurde. In seinen freien, der Erholung gewidmeten Stunden befaßte sich Stolz mit Vorliebe mit der Pflanzenwelt. Wie bereits bemerkt wurde, hatte er schon als Universitätsstudent sich für die Botanik interessiert und Vorlesungen aus diesem Fache gehört; so bot ihm denn die prächtige Umgebung Innsbrucks auf seinen Spaziergängen, welche er zur Pflege seiner Gesundheit in der besseren Jahreszeit mit großer Regelmäßigkeit unternahm, die vielfältigste Anregung dazu, die dort erworbenen Kenntnisse in dieser Wissenschaft zu bereichern und zu vertiefen. Sein Interesse an diesem Gegenstand wurde noch besonders erhöht durch seinen freundschaftlichen Verkehr mit dem Professor der Botanik Johann Peyritsch, der in den Jahren 1878—1889 an der Universität in Innsbruck wirkte, und später neuerdings dadurch, daß sein älterer Sohn die Neigung zur Botanik mit dem Vater teilte.

Als Schriftsteller auf dem Gebiete der Mathematik war Stolz unausgesetzt in hervorragender Weise tätig. Er schrieb außer den bekannten Lehrbüchern über 60 mathematische Abhandlungen, von denen die meisten in den mathematischen Annalen, in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie, in den Monatsheften für Mathematik und Physik und in den Berichten des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines in Innsbruck erschienen sind. Die in den letzteren Berichten veröffentlichten Arbeiten gehören der Zeit von 1874 bis 1890 an und sind zumeist aus Vorträgen hervorgegangen, welche Stolz in dem genannten Vereine, dessen eifriges Mitglied er war, gehalten hatte. Ferner finden sich drei Arbeiten von Stolz in der Schlömilch'schen Zeitschrift, je zwei in den „Transactions of the American mathematical society“ und im „Periodico di Matematica“ und endlich je eine in der Zeitschrift für österreichische Gymnasien, in den Jahresberichten der deutschen Mathematikervereinigung, in den „Acta mathematica“ und in den Sitzungsberichten der Münchner Akademie. Außerdem veröffentlichte Stolz noch im Sonderdrucke einen populären Vortrag über „Die Sonne“ (Innsbruck 1876) sowie seine Rektoratsrede über „Größen und Zahlen“ (Leipzig 1891), in welcher er einen sehr interessanten Überblick über die geschichtliche Entwicklung des Größen- und Zahlenbegriffes von der Zeit Euklids bis auf die Gegenwart entwirft.

Von seinen Lehrbüchern erschien zunächst im Jahre 1885 der erste, die Arithmetik der reellen Zahlen umfassende Teil der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“, dem schon im nächsten Jahre der zweite, die Arithmetik der komplexen Zahlen enthaltende Teil nachfolgte. Unmittelbar darauf begann Stolz mit den Vorarbeiten zu seinem umfangreichen Werke: „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung“, dessen drei Teile („Reelle Veränderliche und Funktionen“, „Komplexe Veränderliche und Funktionen“ und „Die Lehre von den Doppelintegralen“) nacheinander in den Jahren 1893, 1896 und 1899 zur Ausgabe gelangten.

Digitized by Google

Im letztgenannten Jahre brach über Stolz und seine Familie ein schweres, tieftrauriges Verhängnis herein. Sein älterer Sohn Friedrich, der nach Absolvierung des Gymnasiums in den letzten Jahren in Innsbruck und München Naturwissenschaften studierte und sich auf dem Gebiete der Kryptogamenforschung Tirols trotz seiner Jugend bereits einen beachtenswerten Platz errungen hatte,[1]) fand am 14. August 1899 im Pitztale durch Absturz über eine Felswand seinen frühzeitigen Tod. Den Schmerz über den Verlust dieses ihres vielversprechenden, zu den schönsten Hoffnungen berechtigenden Sohnes vermochten die Eltern, wiewohl noch zwei liebe Kinder sie umgaben, durch lange Zeit hindurch kaum zu überwinden. Stolz selbst fühlte sich infolge dieses Schicksalsschlages derart erschüttert und niedergebeugt, daß er das Ende seines Schaffens gekommen glaubte und einen kurz vorher über Anregung des Herrn Teubner in Leipzig gefaßten Plan zur Abfassung eines neuen Werkes, welches den Titel: „Die Grundlagen der Arithmetik" erhalten sollte, momentan wieder aufgab. Doch nach und nach mochte er gerade in der Beschäftigung mit seiner Wissenschaft eine wohltuende Ablenkung von den trüben Gedanken, in die ihn die Trauer um seinen Sohn versenkt hatte, finden. In der Tat nahm er im Herbste desselben Jahres den früheren Plan wieder auf, änderte ihn aber später etwas ab. Da nämlich unterdessen eine neue Auflage seiner „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" notwendig geworden war, so entschloß er sich jetzt, dieses ganze Werk umzuarbeiten und es in neuer und vermehrter Gestalt in zwei selbständigen Bänden als „Theoretische Arithmetik" und „Einleitung in die Funktionentheorie" herauszugeben.

Zur Beteiligung an dieser Arbeit, welche seine letzten Lebensjahre völlig ausfüllte, hatte Stolz mich schon am 2. August 1899 und sodann, da die Sache infolge des erwähnten Trauerfalles wieder rückgängig geworden war, neuerdings im September desselben Jahres eingeladen. Dabei hatte er von Anfang an die Absicht, den größten Teil der „Arithmetik" selbst umzuarbeiten, während meine Aufgabe hauptsächlich darin bestehen sollte, den Text zu revidieren und im Falle, daß er selbst physisch daran verhindert würde, die Herstellung des Manuskripts weiter zu führen und zum Abschlusse zu bringen. „In meinen Jahren", so schrieb Stolz in seinem Briefe vom 2. August 1899, „kann man sich nicht mit Sicherheit auf weitgehende Pläne einlassen. So möchte ich denn durch Beiziehung eines Gesellschafters die Vollendung des Werkes in dem von mir beabsichtigten Sinne sichern." In der Folge überließ er mir sodann die Umarbeitung einzelner Abschnitte (welche in den Vorreden zu den beiden oben genannten Werken sich genau angegeben finden), während er alle übrigen Abschnitte noch selbst ausarbeitete. Ja, er war unausgesetzt tätig, bis der Druck seines letzten Werkes,

[1]) Vgl. den Nekrolog von P. Magnus, Österreichische botanische Zeitschrift, 1899.

Digitized by Google

der „Einleitung in die Funktionentheorie“ gegen Ende August 1905 endlich fertiggestellt war. Wenige Wochen später warf ihn ein schweres Leiden aufs Krankenlager, von dem er sich leider nicht mehr erheben sollte.

Während seiner letzten Lebensjahre hatte Stolz öfter an vorübergehenden Gesundheitsstörungen zu leiden und er brachte aus diesem Grunde zu Ostern und im Herbste vor Beginn des Wintersemesters gewöhnlich einige Wochen in Meran zu, wo er sich jedesmal recht gut erholte und neu gekräftigt fühlte. Auch das Sommersemester 1905 hatte er noch mit gutem Mute und froher Hoffnung begonnen; doch wurde ihm die Lehrtätigkeit nach und nach immer schwerer und gegen das Ende des Semesters war er schon sehr leidend. Der zu Rate gezogene Arzt stellte ein Herzleiden und Arteriensklerose fest und empfahl dem Kranken möglichste Ruhe. In Maurach am Achensee, wohin sich Stolz sofort nach Schluß seiner Vorlesungen zum Sommeraufenthalte begeben hatte, besserte sich anfangs sein Zustand wieder, so daß er die Sommermonate noch verhältnismäßig gut verbrachte; jedoch durfte er seine gewohnten Spaziergänge, welche früher seine beste Erholung gebildet hatten, nur mehr in ganz beschränktem Maße ausführen. Er fühlte auch, daß er seine Vorlesungen im kommenden Wintersemester nicht mehr werde aufnehmen können, und reichte daher Mitte August um seine Versetzung in den Ruhestand ein. Als er dann gegen Mitte September wieder nach Innsbruck zurückgekehrt war, machte sich unmittelbar darauf eine neuerliche Verschlimmerung seines Befindens geltend, die, wie sich allmählich herausstellte, nicht allein in dem bereits erwähnten Leiden ihren Grund hatte, sondern auch insbesondere durch eine Neubildung in den inneren Organen verursacht wurde. Nunmehr trat an dem Kranken ein rascher und stetiger Kräftezerfall ein, der am 23. November seine Auflösung herbeiführte, die, wie der Verlauf der ganzen Krankheit, völlig schmerzlos erfolgte.

Stolz war bis kurz vor dem Eintritte des Todes bei klarem Bewußtsein und noch in den letzten Tagen verweilten seine Gedanken bei der Wissenschaft; so ließ er mir noch am 9. November eine ihm zugekommene mathematische Abhandlung behufs Einsichtnahme zusenden. Ihm war die Beschäftigung mit seiner Wissenschaft, der er vom Beginne seiner Studienzeit an seine volle Kraft gewidmet hatte, sozusagen zur zweiten Natur geworden. Sein sehr ersprießliches und verdienstvolles Wirken hatte auch mehrfache öffentliche Anerkennung gefunden. Im Jahre 1898 wurde Stolz von Sr. Majestät dem Kaiser Franz Josef I. durch Verleihung des Ordens der Eisernen Krone III. Klasse ausgezeichnet. Im folgenden Jahre, am 22. Juli 1899, fand seine Wahl zum wirklichen Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, deren korrespondierendes Mitglied er schon seit 1893 war, statt. Seit 1900 war er auch korrespondierendes Mitglied der königl.-bayerischen Akademie der Wissenschaften und in der nämlichen Eigenschaft

Digitized by Google

gehörte er noch der königl.-böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag an. Im Februar 1904 wurde er endlich zum k. k. Hofrat ernannt. Welcher Wertschätzung sich Stolz unter den Fachgelehrten erfreute, zeigt unter anderem ein Einblick in den ersten Band der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften", wo bei den einschlägigen Artikeln an sehr zahlreichen Stellen von den verschiedensten Autoren auf die Stolzschen Bücher und Abhandlungen hingewiesen wird. Dieselbe Hochschätzung seiner wissenschaftlichen Leistungen kommt auch in den von verschiedenen Seiten erfolgten Besprechungen seiner Werke sowie in gelegentlichen Urteilen hervorragender Fachmänner zum Ausdruck.

Stolz war aber nicht nur ein großer Gelehrter, sondern ebenso ein durch und durch edler Charakter. Der immer sehr ernste Mann mochte wohl dem Fernstehenden etwas unnahbar erscheinen; hatte man aber Gelegenheit, mit ihm in näheren Verkehr zu treten, so zeigte er sich, immer nach seiner geraden und offenen Art, ungemein liebenswürdig, wohlwollend und hilfsbereit und dabei war er von einer geradezu rührenden Anspruchslosigkeit. Ebenso gewissenhaft, wie in seinem Berufe, war er auch in seinem Privatleben, ein Muster ernster Lebensführung und treuer Pflichterfüllung.

Während ich im vorstehenden ein Bild von dem Leben und Wirken meines hochverehrten Lehrers in allgemeinen Zügen zu entwerfen trachtete, will ich nun noch versuchen, einen Überblick über die Ergebnisse seiner wissenschaftlichen Forschung zu geben. Faßt man die Abhandlungen und Lehrbücher von Stolz zusammen, so gehören seine Arbeiten zumeist der Arithmetik, Infinitesimalrechnung und Funktionentheorie, sowie der analytischen Geometrie an. Dazu kommen noch ein paar Arbeiten rein geometrischen Inhalts und außerdem einige mit vorwiegend mathematisch-geschichtlichem Charakter.

In seiner ersten Publikation (W. S. 55)[1]) bestimmt Stolz die Halbachsen eines durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades in trimetrischen Punktkoordinaten, deren Beziehung zu einem rechtwinkligen Koordinatensystem gegeben ist, dargestellten Kegelschnittes als Maximum und Minimum des Radiusvektors, welcher das Zentrum desselben mit einem Kurvenpunkte verbindet. Er gelangt dabei zu Ausdrücken für die Summe und das Produkt der Quadrate dieser Halbachsen, wie sie für den Fall rechtwinkliger Koordinaten schon früher von Faure gegeben wurden. Stolz geht aber nicht nur in der Wahl des Koordinatensystems, sondern insbesondere dadurch über Faure hinaus, daß er den genannten Ausdrücken eine Form erteilt, mittels welcher die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades, d. i. die Untersuchung über die verschiedenen Arten der Örter zweiter Ordnung sich in sehr einfacher Weise unmittelbar zu Ende führen läßt.

[1]) Im folgenden bedeutet: W. S. = Sitzungsberichte der Wiener Akademie; M. = Monatshefte für Math. u. Phys.; Ann. = Mathematische Annalen; I. B. = Berichte des naturw.-med. Vereines in Innsbruck.

Digitized by Google

In seiner zweiten geometrischen Abhandlung (Schlömilchs Zeitschrift 16) leitet er die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie auf analytischem Wege, d. h. unter Zugrundelegung von räumlichen Richtungskoordinaten her. Eine Schwierigkeit für eine solche Behandlungsweise dieser Grundformeln bestand darin, daß dabei mehrfach Wurzelausdrücke auftreten, deren Vorzeichen sich nicht ohne weiteres bestimmen lassen. Stolz gewinnt jedoch durchaus eindeutige und für alle Fälle gültige Formeln dadurch, daß er nicht nur die dabei in Betracht kommenden geometrischen Größen als relative Größen nach dem Vorgange von Möbius eindeutig definiert, sondern auch die Grundbegriffe der analytischen Geometrie einer strengeren Fassung unterzieht. Den nämlichen auf die konsequente Durchführung des Prinzips der Zeichen hinzielenden Gedanken verfolgt er in einer späteren Arbeit (M. 1) hinsichtlich der Raumkurven, indem er durch genaue Festlegung der positiven Richtungen der Kurventangente, der Hauptnormalen und Binormalen die Eindeutigkeit der Formeln für die Richtungskosinusse und insbesondere auch jener für die beiden Krümmungen der Raumkurven herstellt. Hiebei weist er darauf hin, daß obwohl die Koordinatenmethode auf der Einführung relativer Raumgrößen an Stelle der absoluten beruhe, das Prinzip der Zeichen in der analytischen Geometrie doch nicht überall dort, wo es der Natur der Sache nach anwendbar ist, durchgedrungen sei. Bei der Durchführung dieses Prinzips verlangt Stolz die möglichste mit ihrer Eindeutigkeit verträgliche Allgemeinheit der Formeln (Ann. 43).

Eine der ersten Arbeiten hat Stolz, wie bereits bemerkt wurde, den komplexen Elementen in der Geometrie gewidmet (Ann. 4); sie betrifft die Frage nach der geometrischen Bedeutung dieser Elemente. Diese Frage hatte v. Staudt in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ auf rein geometrischem Wege vollständig beantwortet, doch hatten seine Untersuchungen bis dahin in der analytischen Geometrie nur wenig Berücksichtigung gefunden. Stolz unternimmt es nun, die v. Staudtschen Gedanken nach der Methode der analytischen Geometrie durchzuführen, wobei dieselben an Klarheit und Durchsichtigkeit bedeutend gewinnen und zugleich die Übereinstimmung des Imaginären in der analytischen Geometrie mit dem v. Staudtschen Imaginären unmittelbar nachgewiesen wird. Auf diesen Gegenstand kommt Stolz später nochmals in J. B. 19 zurück, woselbst er auch einen kurzen Überblick über die bis dahin auf diesem Gebiete erschienenen Arbeiten gibt.

Über algebraische Kurven hat Stolz drei wichtige, in den mathematischen Annalen erschienene Abhandlungen geschrieben. In der ersten derselben (Ann. 8) vervollständigt er die von Plücker in seiner „Theorie der algebraischen Kurven“ gegebene Darstellung der bei den algebraischen Kurven auftretenden Singularitäten und bringt sie durch konsequente Benützung der von Plücker selbst gebrauchten Differentialgleichungen zum Abschlusse, indem er namentlich die Frage nach der Gestalt einer Kurve in der Umgebung

Digitized by Google

eines Doppelpunktes vollständig erledigt und auch die bei einem $n$-fachen Punkte möglichen Fälle angibt. Hiebei zeigt er auch, daß in zwei reziproken Kurven einer Singularität von der Plückerschen Ordnung $n$ und Klasse $m$ eine solche von der Ordnung $m$ und Klasse $n$ entspreche und beweist im Anschlusse daran außerdem noch die Richtigkeit der von Cayley angegebenen, aber nicht vollständig erwiesenen Anzahl der einer Singularität äquivalenten Doppelpunkte und Rückkehrpunkte bezw. Doppeltangenten und Wendetangenten.

Die zweite (Ann. 11) enthält eine „allgemeine Theorie der Asymptoten der algebraischen Kurven". Während Plücker die Asymptoten bis einschließlich zur vierten Ordnung hauptsächlich mit Hilfe von Kontinuitätsbetrachtungen entwickelt hatte, zeigt hier Stolz, wie man auf Grund der fundamentalen Eigenschaften der algebraischen Funktionen von der Kurvengleichung aus unmittelbar zur Aufstellung der Gleichungen der krummlinigen Asymptoten beliebiger Ordnung gelangen kann. Läßt die Kurvengleichung in der Umgebung eines uneigentlichen Punktes $(1, a_m, 0)$ eine Entwicklung von der Form

$$y = a_m x + a_{m-k} x^{\frac{m-k}{m}} + \cdots + a_1 x^{\frac{1}{m}} + a_0 + a_{-1} x^{-\frac{1}{m}} + \cdots$$

zu, so gilt nach Stolz als Asymptote des hiedurch dargestellten Kurvenzweiges jede Kurve $A(x, y) = 0$, die mit der uneigentlichen Geraden außer dem Punkt $(1, a_m, 0)$ keinen Punkt gemeinsam hat und dabei in der Umgebung dieses Punktes eine einzige Entwicklung für $y$ liefert, welche bis einschließlich zum Gliede $a_0$ mit der obigen übereinstimmt. Von diesen unendlich vielen, mit dem Koordinatensystem zugleich sich ändernden Asymptoten wählt Stolz als typische Asymptoten oder Asymptoten im engeren Sinne durch geeignete Bestimmung der in $A(x, y)$ noch vorkommenden willkürlichen Koeffizienten solche aus, welche bei den zulässigen Koordinatentransformationen ein möglichst übersichtliches Kurvensystem liefern. Dabei zeigt es sich, daß es im allgemeinen ganze Scharen von Kurven gibt, die mit gleicher Berechtigung als typische Asymptoten angesehen werden können. Stolz behandelt sodann noch eingehend die Frage nach der Ordnung der Berührung zwischen Kurve und Asymptote und wendet seine Resultate auf die Kurven 3. bis 6. Ordnung an.

In der dritten der genannten Abhandlungen (Ann. 15) gibt Stolz zunächst eine allgemeine Definition der Multiplizität der eigentlichen und uneigentlichen Schnittpunkte zweier algebraischer Kurven $F(x, y) = 0$ und $G(x, y) = 0$, wozu er die Kroneckersche Resolvente benützt, und zeigt, daß die Multiplizität eine geometrische, von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige Größe ist. Sodann beantwortet er die Frage, wie die Multiplizität eines eigentlichen Schnittpunktes $(x_0, y_0)$ aus den gegebenen Kurven-

Digitized by Google

gleichungen unmittelbar bestimmt werden könne, indem er nachweist, daß dieselbe mit dem Exponenten des ersten Gliedes des nach steigenden Potenzen von $x - x_0$ entwickelten, in der Resultante $X = R_y(F, G)$ vorkommenden Produkts $\prod_{r,s}' (y_r - y_s')$ übereinstimmt, worin $y_r$ und $y_s'$ nur auf jene Wurzeln der Gleichungen $F = 0$ und $G = 0$ bezogen werden, die für $x = x_0$ in $y = y_0$ übergehen. Die Abhandlung enthält auch interessante Bemerkungen über die Grade der beiden Resultanten $R_x(F, G)$ und $R_y(F, G)$ und ist sowohl von geometrischem als auch von algebraischem Standpunkte aus von Bedeutung.

Sehr eingehend hat sich Stolz mit den Grundproblemen der Integralgeometrie sowohl in den „Grundzügen" als auch in mehreren seiner Abhandlungen befaßt; insbesondere kommt er bei mehrfachen Gelegenheiten auf die Rektifikation zurück. In der Abhandlung über B. Bolzano (Ann. 18), in welcher er die Schriften und Leistungen dieses Mathematikers auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung einer eingehenden Würdigung unterzieht, führt er uns im Anschlusse an die Darlegung von Bolzanos Auffassung der Rektifikation, Komplanation und Kubatur die Hauptmomente in der gsschichtlichen Entwicklung des Problems der Rektifikation vor. Der Erklärung der Bogenzahl sowie auch des Inhaltes eines begrenzten krummen Flächenstückes sind die beiden Aufsätze im 3. Bande der „Transactions" gewidmet. Die Abhandlung im 35. Bande der „Münchner Berichte" enthält einen sehr einfachen Beweis für die Rektifizierbarkeit der regulären Kurven, welcher sich auf die komplexe Darstellung dieser Kurven gründet. Einen interessanten Satz der Integralgeometrie, der eine Verallgemeinerung der bekannten Volumsformel für einen Körper, dessen Querschnitt senkrecht zur $X$-Achse als Funktion von $x$ gegeben ist, bildet, hat Stolz in W. S. 112 mitgeteilt.

Seine Auffassung von den Grundlagen der Geometrie hat er in J. B. 15 ausgesprochen. Da die Tatsache, daß neben der Euklidschen Geometrie noch andere geometrische Systeme möglich sind, die Geometrie auf das Gebiet der Erfahrung verweist, so fordert er eine solche Formulierung der geometrischen Axiome, daß dieselben durch Versuche geprüft und innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler bestätigt werden können. In der Tat läßt sich, wie Stolz ausführlich nachweist, das ganze Lehrgebäude der Euklidschen Geometrie gewinnen, wenn man die Axiome der Geraden, der Ebene und des Kreises für einen hinlänglich kleinen Teil des Raumes gelten läßt und das unkontrollierbare 11. Axiom, auf welchem bei Euklid die ganze Parallelentheorie beruht, durch die Forderung ersetzt, daß es mindestens ein Dreieck, dessen Winkelsumme $180^0$ beträgt, oder, was damit gleichbedeutend ist, mindestens ein ebenes Viereck gebe, worin jeder Winkel ein rechter ist, während die Annahme, daß mindestens ein Dreieck existiere,

Digitized by Google

dessen Winkelsumme größer, bezw. kleiner als $180^0$ ist, zu den nichteuklidischen Geometrien führt.

Weiter hat Stolz (J. B. 12; Ann. 22 und 39; Theoretische Arithmetik, V. und VI. Abschnitt) die Größenvergleichung in der Geometrie der alten Griechen sowie das Verfahren der Größenbildung, welches uns in der Euklidschen Theorie der Verhältnisse in vollendeter Gestalt entgegentritt, kritisch beleuchtet und dabei namentlich die Bedeutung, welche dem Axiom des Archimedes, d. h. dem Satze, daß eine Größe so oft vervielfältigt werden könne, daß sie jede andere ihr gleichartige Größe übertrifft, in der Theorie der absoluten Größen zukommt, hervorgehoben und klargestellt.

Die Euklidschen Prinzipien der Größenbildung wendet Stolz auch an zur Herleitung von zwei Arten unendlich kleiner Größen (J. B. 14; Allgem. Arith. I, p. 205; Ann. 31). Die erste Art dieser Größen, die er Momente nennt, knüpft sich an ein System von Funktionen $f(x), g(x), \ldots$ an, von denen jede bei einem und demselben bestimmten Grenzübergange des $x$ den Grenzwert $+0$ hat und welche außerdem so beschaffen sind, daß auch jede rationale Funktion von beliebig vielen dieser Funktionen bei demselben Grenzübergange (einen endlichen oder unendlichen) Grenzwert besitzt. Jeder dieser Funktionen $f(x)$ wird ein neues Objekt, ein Moment $u(f)$, zugeordnet und dabei festgesetzt, daß

mit $\lim (f:g) \gtreqless 1$ zugleich $u(f) \gtreqless u(g)$ und außerdem

$$u(f)+u(g)=u(f+g) \text{ und } u(f).u(g)=u(f.g)$$

sein solle. Es gelten dann für die ersten drei Grundoperationen (Addition, Subtraktion und Multiplikation) der Momente im allgemeinen dieselben Regeln wie bei den absoluten Zahlen. Dagegen ist die Division im System der Momente nicht unbedingt möglich; sie wird es aber, wenn man dasselbe durch die absoluten Zahlen und die Größen $u(f):u(g)$, worin $\lim (f:g)=+\infty$ ist, erweitert. Die zweite Art der von Stolz hergeleiteten unendlich kleinen Größen stimmt mit den „Nullen der Funktionen" von P. du Bois-Reymond überein. Seine Entwicklungen lassen sich unmittelbar auch auf die „Unendlich der Funktionen" übertragen. Später (M. 5) hat Stolz als eine dritte Art von unendlich kleinen Größen noch die Berührungswinkel gewisser ebener Kurven behandelt und mit den Winkeln der Halbstrahlen zu einem uneigentlichen absoluten Größensystem zusammengefaßt. Im übrigen hält Stolz, wie er selbst ausdrücklich bemerkt, keines der bekannten Systeme von unendlich kleinen Größen in der Analysis für unentbehrlich, sondern betrachtet dieselben lediglich als lehrreiche Anwendungen der Prinzipien der Größenbildung.

Die Theorie der Kettenbrüche verdankt Stolz die wichtige, zuerst in J. B. 15 mitgeteilte und in „Allgem. Arith." II, p. 300, bewiesene, allgemeine Regel, nach welcher sich die Konvergenz oder Divergenz eines jeden rein periodischen Kettenbruches entscheiden und im Falle der Konvergenz auch dessen Grenzwert un-

Digitized by Google

mittelbar bestimmen läßt. Derselben stellt er in J. B. 17 noch einige sehr einfache Divergenzkriterien für die nämlichen Kettenbrüche zur Seite.

Große Aufmerksamkeit hat Stolz auch der Reihentheorie zugewendet. Abgesehen von der systematischen Darstellung derselben, welche er in seinen Lehrbüchern gibt, hat er in einer größeren Anzahl von Abhandlungen verschiedene Probleme der Reihentheorie zum Gegenstand seiner Untersuchungen gewählt. So enthalten zunächst die beiden in der „Schlömilchschen Zeitschrift" (Bd. 20 und 29) veröffentlichten Arbeiten mehrere an Abels Abhandlung über die binomische Reihe sich anschließende Sätze über die ganzen Potenzreihen von $x$, namentlich solche über das Verhalten einer Potenzreihe auf dem Umfange des Konvergenzkreises, sowie bei Annäherung des $x$ an denselben. In W. S. 95 und 104 befaßt sich Stolz mit der Umkehrung der Potenzreihen und gelangt dabei insbesondere zu einem wichtigen Satze über den Konvergenzradius der umgekehrten Reihe. Die Abhandlung in W. S. 95, p. 659, enthält außerdem eine neue Herleitung des Grenzwertes und des Konvergenzradius der Lambertschen Reihe. Auch die zuerst von Cauchy betrachteten Doppelreihen hat Stolz (Ann. 24) sehr ausführlich untersucht. Der Cauchyschen Darstellung dieser Gebilde gegenüber hebt er besonders hervor, daß aus der Konvergenz der Doppelreihe keineswegs jene ihrer Horizontal- und Vertikalreihen folge. Nach Feststellung der Grundeigenschaften der Doppelreihen mit positiven Gliedern, sowie der absolut konvergenten Doppelreihen gelangt er sodann zu dem Satze: „Wenn die Doppelreihe sowie jede ihrer Horizontal- und Vertikalreihen und ebenso ihre Diagonalreihe konvergiert, so hat die zuletzt genannte Reihe den nämlichen Grenzwert wie die Doppelreihe selbst." Hieraus ergibt sich schließlich, wie bei den einfachen unendlichen Reihen, als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Doppelreihe bei jeder Anordnung ihrer Glieder konvergiere und stets den nämlichen Grenzwert darbiete, die absolute Konvergenz derselben. Eine Anwendung auf elliptische Funktionen finden die Doppelreihen in J. B. 12.

Der Theorie der analytischen Funktionen gehören zunächst drei kleinere Arbeiten (J. B. 11, 15 und 17) an. Die erste behandelt einen von Picard gegebenen Satz über eine bestimmte Reihenentwicklung einer analytischen Funktion $f(x)$, welche innerhalb des Kreises vom Radius $r < 1$ mit Ausnahme des Nullpunktes keinen singulären Punkt besitzt. In der zweiten leitet Stolz die Partialbruchentwicklung der Funktion $e^{ax} : (e^x - 1)$ auf einem von Briot und Bouquet vorgeschlagenen Wege her. Die dritte endlich enthält eine genaue Untersuchung der Unstetigkeiten der Hauptzweige, sowie der wechselseitigen Beziehungen der Hauptwerte der verschiedenen Kreisfunktionen. Einige neue Sätze über monogene analytische Funktionen hat Stolz im VIII. Abschnitt der „Einleitung in die Funktionentheorie" hergeleitet. Auch kann hier noch

Digitized by Google

auf eine andere von seinen letzten Publikationen, Acta math. 28, hingewiesen werden, worin er nachweist, daß Abel in seiner Abhandlung über die binomische Reihe die Frage nach denjenigen analytischen Funktionen $f(x)$, die dem Additionstheoreme $f(x).f(y) = f(x+y)$ gehorchen, unter einer gewissen Beschränkung gelöst habe.

Zahlreiche uud höchst bedeutsame Arbeiten hat Stolz auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung veröffentlicht. Von diesen wollen wir zunächst diejenigen betrachten, welche sich mit Gegenständen der Differentialrechnung befassen. In Ann. 14 und 15 leitet Stolz auf verschiedenen Wegen die Bedingungen her, unter welchen die bekannte, schon von Cauchy behandelte, jedoch von letzterem noch nicht in befriedigender Weise erledigte Formel für die sogenannten unbestimmten Quotienten $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ bei einem bestimmten Grenzübergange des $x$ besteht, wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ dabei je einen unendlichen Grenzwert besitzen. Während bei Cauchy die Existenz des Grenzwertes $\lim \{f(x) : \varphi(x)\}$ vorausgesetzt ist, wodurch die Formel praktisch fast wertlos wird, ist nach Stolz nur das Vorhandensein von $\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\}$ zum vorhinein verlangt. Stolz dehnt die obige Formel auch auf den Fall aus, daß nur $\varphi(x)$ bei dem betreffenden Grenzübergange einen unendlichen Grenzwert hat, während $f(x)$ endlich bleibt. In der ersteren der beiden genannten Abhandlungen ist außerdem der Fall, daß $f(x)$ und $\varphi(x)$ zugleich zur Null konvergieren, mit in Betracht gezogen. Daselbst benützt Stolz zwei Hilfssätze, welche auch an sich von Interesse sind und in der Theorie der Konvergenz und Divergenz der unendlichen Reihen vorteilhafte Verwendung finden; sie besagen, daß die Gleichung

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=+\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} \quad (h \gtrless 0)$$

besteht, wenn der Grenzwert auf der rechten Seite vorhanden ist, $\varphi(x)$ bei wachsendem $x$ sich stets in dem nämlichen Sinne ändert und entweder $\lim \varphi(x) = +\infty\ (-\infty)$ ist, oder aber $f(x)$ und $\varphi(x)$ zugleich den Grenzwert Null haben. Mehrfache Verallgemeinerungen dieser Sätze hat er später in Ann. 33 gegeben.

Vier wichtige Abhandlungen hat Stolz über die Maxima und Minima der Funktionen mehrerer Veränderlichen geschrieben. Mit diesem Gegenstande hatte er sich, wie bereits bemerkt wurde, schon in einer seiner ersten Arbeiten (W. S. 58) befaßt. In derselben leitet er auf einem sehr einfachen und übersichtlichen Wege die Regel her: Wenn die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ an einer Stelle $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, an welcher alle ersten, jedoch nicht alle zweiten partiellen Ableitungen verschwinden, sich in eine Taylorsche Reihe entwickeln läßt, so müssen, damit überhaupt ein Extremum vor-

Digitized by Google

handen sei, die Hauptunterdeterminanten aller geraden Grade der Determinante

$$H = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \, \partial x_s} \right| (r, s = 1, 2, \ldots n),$$

soweit sie nicht verschwinden, sämtlich positiv sein; die Hauptunterdeterminanten aller ungeraden Grade von $H$ sind, soweit sie nicht verschwinden, im Falle eines Maximums sämtlich negativ, im Falle eines Minimums sämtlich positiv. Im Anschluß hieran betrachtet Stolz sodann noch die relativen Extreme, sowie jene der impliziten Funktionen. Erst 22 Jahre später finden wir ihn zum zweitenmal mit diesem Gegenstand beschäftigt. Angeregt wurde er hiezu durch die im Jahre 1890 erschienene „Theorie der Maxima und Minima einer Funktion von zwei Veränderlichen“ von Scheeffer, zu der er eine drei Abhandlungen umfassende, äußerst wertvolle Ergänzung lieferte. In W. S. 99 beweist er zunächst den Fundamentalsatz der Scheefferschen Theorie für $m$ Veränderliche und sucht die von Scheeffer gegebene Methode zur Bestimmung der Extrema auf Funktionen von mehreren Veränderlichen auszudehnen, wobei er für den Fall dreier Veränderlichen zu einem vollständigen Abschlusse gelangt. In der zweiten Abhandlung (W. S. 100) führt er uns ein neues Verfahren zur Bestimmung der Extrema einer Funktion zweier Veränderlichen vor und zeigt zugleich, wie sich dasselbe auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen übertragen lasse. Die Grundlage desselben bildet der Doppelsatz: Wenn die in der Umgebung der Stelle $(0, 0)$ stetige Funktion $f(x, y)$ bei konstantem $x$ und Beschränkung des $y$ auf das Intervall $(-x, x)$ für $y = \varphi(x)$ und ebenso bei konstantem $y$ und Beschränkung von $x$ auf das Intervall $(-y, y)$ für $x = \psi(y)$ ihre obere (bezw. untere) Grenze erreicht, so ist zum Vorhandensein eines Maximums (bezw. Minimums) notwendig und hinreichend, daß eine Zahl $\delta > 0$ derart existiert, daß für $0 < |x| < \delta$ und $0 < |y| < \delta$ sowohl $f(x, \varphi(x))$ als auch $f(\psi(y), y)$ kleiner (bezw. größer) als $f(0, 0)$ sei. Sowohl die Scheeffersche als auch die Stolzsche Methode führt in ihrer Anwendung auf eine Funktion von $m$ Veränderlichen in letzter Linie darauf hinaus, ein System von $m - 1$ algebraischen Gleichungen zwischen diesen $m$ Veränderlichen nach $m - 1$ Veränderlichen durch Reihen aufzulösen. Stolz untersucht nun in seiner dritten Abhandlung (W. S. 102) noch eingehend den Fall, daß die linken Seiten dieser Gleichungen einen gemeinsamen Teiler besitzen.

Große Verdienste hat sich Stolz noch um die Theorie der bestimmten Integrale erworben. Seine Arbeiten auf diesem Gebiete umfassen wohl alle grundlegenden Fragen der bestimmten Integralrechnung und sind durchaus von fundamentaler Bedeutung. In Ann. 23 stellt er zwei zum bestimmten Integrale in naher Beziehung stehende Grenzwerte für Punktmengen auf, welche er die Intervallgrenze bezw. die Flächengrenze der betreffenden Punkt-

Digitized by Google

menge nennt; dieselben sind mit den heute als äußere Länge einer linearen bezw. äußere Flächenzahl einer ebenen Punktmenge bekannten Grenzwerten identisch. Die Abhandlungen M. 7 und W. S. 107, p. 736, bringen zwei neue Formen der Bedingung für die Integrierbarkeit einer endlichen Funktion $f(x)$ in einem endlichen Intervall. Ebenso enthält die Abhandlung Ann. 26 eine neue Form der Integrabilitätsbedingung für eine Funktion von zwei Veränderlichen; dieselbe lehnt sich an den gerade erwähnten Begriff der Flächengrenze an und lautet: Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, daß die endliche Funktion $f(x, y)$ ein eigentliches Doppelintegral im Gebiete $F$ besitzt, besteht darin, daß die Punkte $(x', y')$ in $F$, in welchen der Sprung der Funktion $f(x, y)$ irgend eine vorgelegte positive Zahl $\rho$ übersteigt, ein System von der Flächengrenze Null bilden. Stolz zeigt auch an einigen Beispielen, daß diese Form der Integrierbarkeitsbedingung manchmal bequemer ist als die gewöhnliche. Im Anschlusse daran beweist er noch einen Satz über die Berechnung eines Doppelintegrals durch zwei aufeinander folgende Integrationen. In der nämlichen Abhandlung hebt Stolz die große Bedeutung hervor, welche die gleichmäßige Konvergenz für die Integralrechnung hat, und zeigt insbesondere, welche Wichtigkeit diesem Begriffe bei Aufstellung der allgemeinen Quadraturformel sowie der allgemeinen Formeln für den Körperinhalt, für die Komplanation und für die Transformation eines Doppelintegrals zukomme. In M. 8 dehnt er die von Peano für das einfache bestimmte Integral gegebene Definition auf das Doppelintegral aus für den Fall, daß die zu integrierende Funktion $f(x, y)$ keine negativen Werte annimmt. Die Abhandlung W. S. 106 bringt zwei neue, zu einer für alle Punkte eines ebenen Punktsystems erklärten und dabei endlichen Funktion $f(x, y)$ gehörige Grenzwerte, welche als besondere Fälle das obere Doppelintegral in sich enthalten und für den Fall $f(x, y) \equiv 1$ in die äußere bezw. innere Flächenzahl der Punktmenge übergehen. Zwei analoge Grenzwerte entsprechen auch dem unteren Doppelintegral und es lassen sich dieselben, wie Stolz noch bemerkt, auch auf den Raum von drei und mehr Dimensionen übertragen.

Über die absolut konvergenten uneigentlichen bestimmten Integrale hat Stolz in den Jahren 1898 und 1899 drei wichtige Arbeiten (W. S. 107 und 108; M. 9) veröffentlicht. Bekanntlich hatte De la Vallée-Poussin in seiner Abhandlung: „Recherches sur la convergence des intégrales définies“ (Journ. de Math., 1892) die absolute Konvergenz der uneigentlichen Integrale über ein endliches Gebiet, und zwar sowohl der einfachen als auch der Doppelintegrale auf eine neue Weise erklärt und eine vollständige Theorie dieser Integrale gegeben. Stolz stellt nun derselben eine zweite, ebenso allgemeine und in ihren Ergebnissen mit der ersteren durchaus übereinstimmende Theorie der uneigentlichen Integrale gegenüber, die sich hinsichtlich der einfachen Integrale auf die allgemein übliche, von Cauchy herrührende Erklärung und auf die von



Digitized by Google

Harnack gegebene Erweiterung derselben gründet, welche letztere Stolz strenger gefaßt und in ihren Folgen konsequent durchgeführt hat. Einen analogen Weg schlägt er auch bezüglich der uneigentlichen Doppelintegrale ein. Die betreffenden Untersuchungen finden sich auch im 3. Teile der „Grundzüge“ ausführlich dargestellt. Schließlich mögen hier noch die von Stolz gegebenen, in M. 11, Transactions 3 und Münchner Ber. 35 enthaltenen Existenzbeweise für das komplexe Integral längs eines regulären Weges erwähnt sein.

Von den Stolzschen Abhandlungen können mehrere als Vorarbeiten, einige auch als Nachträge zu seinen Lehrbüchern, in denen die Ergebnisse seiner Forschungen, soweit dieselben der Arithmetik, Funktionentheorie oder Infinitesimalrechnung angehören, zum größten Teile niedergelegt sind, betrachtet werden. Selbstredend enthalten seine Lehrbücher auch manche von ihm selbst aufgefundene Sätze und Resultate, welche in den Abhandlungen nicht vorkommen, sondern erst aus der Ausarbeitung des in den ersteren vorgetragenen Stoffes gleichsam hervorgewachsen sind. In dem vorstehenden kurzen Überblicke konnte jedoch nur gelegentlich auf einige derselben hingedeutet werden. Aber auch dort, wo Stolz bereits Vorhandenes gesammelt hat, tritt uns in der Behandlungsweise und Darstellung des Stoffes seine kraftvolle Eigenart entgegen. Er hat eben nirgends nur gesammelt, sondern überall dem behandelten Gegenstand seinen eigenen Geist eingeprägt. Insbesondere hat er gar manche Begriffe und Sätze genauer und strenger gefaßt, als es vor ihm der Fall war. Die Stolzschen Lehrbücher haben auch in der Tat in den Fachkreisen allgemein sehr günstige Aufnahme und Anerkennung gefunden und es ist an ihnen namentlich die Klarheit, Einfachheit und große Genauigkeit in der Darstellung des darin vorgeführten Stoffes sowie ihre Reichhaltigkeit an literarischen Nachweisen von den verschiedensten Seiten mit Recht rühmend hervorgehoben worden.

Durch seine Werke hat sich Stolz selbst das beste Denkmal, ein monumentum aere perennius geschaffen und in ihnen wird sein Geist fortleben und uns belehrend weiter begleiten, wenn auch der unerbittliche Tod ihn selbst, den geliebten Meister, uns entrissen hat. Ein zweites Denkmal hat er in den Herzen seiner Schüler hinterlassen, denen er ein ausgezeichneter Lehrer, ein gewissenhafter und wohlmeinender Führer und Berater war, und dankbar werden alle, die einst seinen begeisterten Worten gelauscht, ihm ein treues Andenken, voll der höchsten Verehrung bewahren. Wer aber des näheren persönlichen Verkehres mit ihm sich erfreute, der betrauert in ihm nicht nur den hervorragenden Gelehrten und den hochgeschätzten Lehrer, sondern vor allem den edlen, lieben Menschen.

---

Digitized by Google

# Über die zur dritten Stufe gehörigen hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde.

Von **Alfred Berger** in Wien.

(Schluß.)

## IV. Herstellung der Derivierten durch verwandte Formen.

### § 10. Allgemeine Gesichtspunkte.

Wie bei der gewöhnlichen hypergeometrischen Funktion, so gilt auch in unserem verallgemeinerten Falle, daß man die Derivierte einer Form durch zu dieser verwandte Formen ausdrücken kann, und daher bedeuten solche Relationen nichts anderes, als diejenigen, welche unter III. betrachtet wurden.

Vorerst sei hier der für das Folgende in Betracht kommende Gedankengang, wie er in der l. c. angeführten Arbeit von Wirtinger gegeben ist, unter näherer Berücksichtigung des Falles $n=3$ kurz angeführt.

Ausgegangen wird hiebei von der Tatsache, daß (15) eine doppelt-periodische Funktion ist. Hierauf wird gesetzt:

$$P(u)=\prod_{\lambda,\mu}\sigma_{\lambda,\mu}^{k_{\lambda,\mu}}(u)=-P_1(u)\frac{X_a(u)}{X_0(u)}\frac{y_0}{z_a}M_a\,. \tag{22}$$

Hier ist $P_1(u)$ ein ebensolches Produkt wie $P(u)$, nur unterscheiden sich die Exponenten um ganze Zahlen $a_{\lambda,\mu}$, welche den Bedingungen

$$\sum_{\lambda,\mu}a_{\lambda,\mu}=0\quad\sum_{\lambda,\mu}\lambda\,a_{\lambda,\mu}\equiv\sum_{\lambda,\mu}\mu\,a_{\lambda,\mu}\equiv 0\pmod n$$

genügen, und der zutretende Quotient hat die Eigenschaften, welche von den $Q(u)$ verlangt wurden.

Nun wird der Quotient rechts in (22) nach Formel

$$\sum_{\mu=0}^{n-1}\varepsilon^{-\mu a}\frac{d}{du}\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)=-\frac{X_a(u)}{X_0(u)}\frac{y_0}{z_a} \tag{23}$$



Digitized by Google

ersetzt, und man erhält die Darstellung von $P(u)$ in der Gestalt:

$$P(u) = P_1(u) \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{-\mu a} \frac{d}{du} l \frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)\, M_a . \tag{24}$$

Es gilt aber die Identität

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\Phi \frac{\partial}{\partial u} l\Psi\right) = \Phi\left(\frac{\partial}{\partial u} l\Psi \frac{\partial}{\partial \omega} l\Phi - \frac{\partial}{\partial u} l\Phi \frac{\partial}{\partial \omega} l\Psi\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\Phi \frac{\partial}{\partial \omega} l\Psi\right)$$

Auf (24) angewendet, ergibt dies:

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\left[P_1(u) \frac{\partial}{\partial u} l \frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)\right] =$$

$$= P_1(u)\left[\frac{\partial}{\partial \omega} l P_1(u) \frac{\partial}{\partial u} l \frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u) - \frac{\partial}{\partial u} l P_1(u) \frac{\partial}{\partial \omega} l \frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u}\left(P_1(u) \frac{\partial}{\partial \omega} l \frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)\right).$$

Hier läßt sich nun die rechts stehende Funktionaldeterminante selbst als doppelt periodische Funktion darstellen und daher auch als lineares Aggregat von Gliedern, welche abgesehen von Modulfunktionen der dritten Stufe als Faktoren die Eigenschaften der $Q(u)$ haben. Man erkennt so die Möglichkeit der Darstellung:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} P(u) = \sum_a N_a P(u)\, Q_a(u) + \frac{\partial}{\partial u}\big(R(u)\, P(u)\big).$$

Dabei ist $R(u)$ eine eindeutige doppeltperiodische Funktion.

Wird nun längs eines Doppelumlaufes um zwei Periodendrittel integriert, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\int P(u)\, du = \int\left(\sum_a N_a P(u)\, Q_a(u)\right) du$$

und daher auch

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\int P(u)\, du = \int\left(\sum_a N_a' P(u)\, Q_a(u)\right) du,$$

wobei $N_a$ und $N_a'$ Modulfunktionen der dritten Stufe sind.

Durch Wiederholung dieser Schlußweise kommt man zunächst zu dem Satz, daß sich sämtliche Ableitungen durch $n^2$, also in

Digitized by Google

unserem Falle neun, geeignet ausgewählte, zu $\int P(u)\,du$ verwandte Formen mit Modulfunktionen dritter Stufe als Koeffizienten darstellen lassen und daß daher $\int P(u)\,du$ als Funktion von $\xi$ einer linearen homogenen Differentialgleichung von der Ordnung $n^2$ genügt, deren Koeffizienten Modulfunktionen $n^{\text{ter}}$ Stufe sind.

Weiter sehen wir aber auch von hier aus die Möglichkeit, die Derivierten von $n^2$ geeignet gewählten zu $\int P(u)\,du$ verwandten Formen durch diese Verwandten selbst ausdrücken zu können, so daß sich ein bestimmtes System von $n^2$ linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung ergibt.

## § 11. Nähere Ausführung für $n = 3$.

Der eben dargelegte Gedankengang für $n = 3$ verfolgt, ergibt zunächst Folgendes: Für $\alpha = 1$ ist

$$\frac{X_1(u)}{X_0(u)} \cdot \frac{y_0}{z_1} = \frac{\sigma_{0,1}^2}{\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}} \frac{\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{1,2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}.$$

Demnach

$$M_1 = \frac{\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2}$$

und

$$P(u) = P_1(u) \frac{\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{1,2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)} \frac{\sigma_{0,1}^2}{\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}} M_1$$

$$(25)\quad P(u) = -P(u) \frac{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{1,2}(u)} M_1 \sum_0^2 \varepsilon^{-\mu} \frac{d}{du} l \frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u).$$

Wir erhalten also:

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \omega}\left(P_1(u) \frac{\partial}{\partial u} l \frac{\sigma_{0,1}}{\sigma}(u)\right) =$$

$$(26)\quad = \varepsilon^{-1} P_1(u) \sum_{\lambda,\mu} \left[k'_{\lambda,\mu} \frac{\partial}{\partial \omega} l \frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) \frac{\partial}{\partial u} l \frac{\sigma_{0,1}}{\sigma}(u) -\right.$$

$$\left. - k'_{\lambda,\mu} \frac{\partial}{\partial u} l \frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u) \frac{\partial}{\partial \omega} l \frac{\sigma_{0,1}}{\sigma}(u)\right] + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial u}\left(P_1(u) \frac{\partial}{\partial \omega} l \frac{\sigma_{0,1}}{\sigma}(u)\right)$$

Digitized by Google

$$\varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(P_1(u)\frac{\partial}{\partial u}l\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma}(u)\right)=$$

$$(27)\qquad =\varepsilon^{-2}P_1(u)\sum_{\lambda,\mu}\left[k'_{\lambda,\mu}\frac{\partial}{\partial\omega}l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u}l\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma}(u)-\right.$$

$$\left.-k'_{\lambda,\mu}\frac{\partial}{\partial u}l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial\omega}l\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma}(u)\right]+\varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial u}\left(P_1(u)\frac{\partial}{\partial\omega}l\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma}(u)\right).$$

Dabei sollen mit $k'_{\lambda,\mu}$ die Exponenten der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ in $P_1(u)$ bezeichnet werden. Die einzelnen Glieder unter dem Summenzeichen haben die Gestalt unserer erwähnten Funktionaldeterminanten.

## § 12. Darstellung der Funktionaldeterminanten $A^{0,\mu}_{\lambda,\mu}$. Einführung der Größen $\varphi_\lambda$.

Demnach wenden wir uns jetzt der Darstellung von

$$\frac{\partial}{\partial\omega}l\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u}l\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma}(u)-\frac{\partial}{\partial\omega}l\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u}l\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma}(u)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial\omega}l\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u}l\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma}(u)-\frac{\partial}{\partial\omega}l\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u}l\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma}(u)$$

zu. Alle anderen vorkommenden Funktionaldeterminanten ergeben sich aus der zweiten der eben angeschriebenen einfach durch Periodentransformation.

Bezeichnen wir jetzt mit

$$A^{0,\mu}_{\lambda,\mu}$$

die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial}{\partial\omega}l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u}l\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)-\frac{\partial}{\partial\omega}l\frac{\sigma_{0,\mu}}{\sigma}(u)\frac{\partial}{\partial u}l\frac{\sigma_{\lambda,\mu}}{\sigma}(u)$$

und beachten, daß:

$$\frac{d}{du}Q(u)=Q(u)\frac{d}{du}lQ(u),$$

so erhalten wir unter Anwendung von Gleichung (16) und (18)

$$A^{0,1}_{0,2}\frac{4\pi i}{\omega_2^2}=\frac{d}{du}\left(\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma^2_{0,1}}\frac{\sigma^2_{0,1}(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,2}(u)}\right)\left(a_1+\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma^2_{0,2}}\frac{\sigma^2_{0,2}(u)}{\sigma(u)\sigma_{0,1}(u)}\right)-$$

Digitized by Google

$$-\frac{d}{du}\left(\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\right)\left(-a_1+\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\right)+$$

$$+\left(-a_1+\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\right)\left(a_1+\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\right)\times$$

$$\times\left(-2a_1+\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}-\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\right).$$

Dabei haben $a_1$ und fernerhin $a_2, a_3, a_4$ die in § 6 erwähnte Bedeutung.

Wenn wir nun die Differentiation rechts ausführen und teilweise reduzieren, so ergibt sich:

$$A_{0,2}^{0,1}\frac{4\pi i}{\omega_2^2}=\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\left(a_1+\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\right)\times$$

$$\times\left(3a_1+2\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}-\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\right)-$$

$$-\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\left(-a_1+\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\right)\times$$

$$\times\left(-3a_1+2\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}-\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\right)+$$

$$+\left(-a_1^2+a_1\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}-a_1\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}\right)\times$$

$$\times\left(-2a_1+\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}-\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\right)$$

$$A_{0,2}^{0,1}\frac{4\pi i}{\omega_2^2}=2a_1^3+6a_1\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}+2\frac{1}{\sigma_{0,2}^3}\frac{\sigma_{0,2}^3}{\sigma^3}(u)-2\frac{1}{\sigma_{0,1}^3}\frac{\sigma_{0,1}^3}{\sigma^3}(u).$$

Digitized by Google

Wenn wir nun diesen Ausdruck auf Grund von (7) reduzieren, so erhalten wir:

$$A_{0,2}^{0,1}\frac{4\pi i}{\omega_2^2}=2\left(a_1^3-\frac{1}{\sigma_{0,1}^3}\right). \tag{28}$$

In ganz analoger Weise berechnet man nun:

$$A_{1,0}^{0,1}\frac{4\pi i}{\omega_2^2}=\frac{d}{du}\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{2,0}^2}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}\left(a_1+\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\right)-$$

$$-\frac{d}{du}\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\left(a_3+\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{2,0}^2}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}\right)+$$

$$+\left(a_3+\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{2,0}^2}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}\right)\left(a_1+\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\right)\times$$

$$\times\left(a_3-a_1+\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{2,0}^2}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}-\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\right)$$

$$A_{1,0}^{0,1}\frac{4\pi i}{\omega_2^2}=\left(a_3^2+a_1\,a_3\right)\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}-$$

$$-\left(a_1^2+a_1\,a_3\right)\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{2,0}^2}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}-2\,a_3\,\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}+$$

$$+2\,a_1\,\frac{1}{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}}\frac{\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{2,0}(u)}{\sigma^2(u)}+(a_1-a_3)\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{2,0}^2}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}+$$

$$+2\,\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\frac{1}{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}}\frac{\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{2,0}(u)}{\sigma^2(u)}-$$

$$-2\,\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{2,0}^2}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}+a_1\,a_3\,(a_3-a_1).$$

Dieser Ausdruck läßt sich nun vermöge der Relationen (6*b*), (10), (11) leicht vereinfachen. Wir erhaltan dann:

Digitized by Google

$$A^{0,1}_{1,0}\frac{4\pi i}{\omega_2^2}=$$

$$=\left[(a_3^2+a_1a_3)+(a_1-a_3)\frac{\varepsilon^{-2}\sigma_{1,1}^2}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,2}}+2\varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,0}^2}\right]\frac{1}{\sigma_{0,1}}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}-$$

$$-\left[(a_1^2+a_1a_3)+(a_1-a_3)\frac{\sigma_{1,1}^2}{\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,2}}-2\varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,0}^2}\right]\frac{1}{\sigma_{1,0}}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}+ \quad (29)$$

$$+(9a_1-3a_3)\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}+a_1a_3(a_3-a_1)+$$

$$+2a_1\varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{1,0}^2\sigma_{0,1}^2}-(a_1-a_3)\frac{\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}}{\sigma_{0,1}^2\sigma_{1,0}^2}-2\varepsilon^{-1}\frac{\sigma_{1,2}^3}{\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,0}^3}.$$

Wir wollen nun, nachdem sich die etwas kompliziert gebauten Koeffizienten unserer Relation (29) nicht wesentlich reduzieren lassen, dieselben zur Abkürzung der folgenden Rechnungen einfach mit

$$\varphi_\lambda(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}) \quad \lambda=1,2,3,4$$

bezeichnen. Alle anderen mit (29) völlig analog gebildeten Ausdrücke erhält man aus (29) einfach durch Periodentransformation, wobei sich ja in $A^{0,1}_{\lambda,\mu}\frac{4\pi i}{\omega_2^2}$ die zu $\frac{\partial}{\partial\omega}$ beziehungsweise $\frac{1}{\omega_2^2}$ hinzutretenden Faktoren allemal fortheben. Schreiben wir also

$$A^{0,1}_{1,0}\frac{4\pi i}{\omega_2^2}=\varphi_1(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2})\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}+$$

$$+(\varphi_2(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2})\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{2,0}^2}\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}+$$

$$+\varphi_3(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2})\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}+\varphi_4(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}),$$

so erhalten wir durch Transformation mit $S=\begin{matrix}\omega_1 & \omega_1+\omega_2\\ \omega_2 & \omega_1\end{matrix}$

Digitized by Google

$$A_{1,1}^{0,1}\frac{4\pi i}{\omega_2^2}=\varphi_1(\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0})\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}+$$

$$+\varphi_2(\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0})\frac{\sigma_{1,1}}{\sigma_{2,2}^2}\frac{\sigma_{2,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,1}(u)}+$$

$$+\varphi_3(\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0})\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}+\varphi_4(\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0}).$$

Auf diese drei Gleichungen wenden wir die Transformation

$$\begin{array}{c|c}\omega_1 & -\omega_1\\ \omega_2 & -\omega_2\end{array}$$

an und erhalten

$$A_{2,0}^{0,2}\frac{4\pi i}{\omega_2^2}=\varphi_1(-\sigma_{0,1}-\sigma_{1,0}-\sigma_{1,1}-\sigma_{1,2})\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}+$$

$$+\varphi_2(-\sigma_{0,1}-\sigma_{1,0}-\sigma_{1,1}-\sigma_{1,2})\frac{\sigma_{2,0}}{\sigma_{1,0}^2}\frac{\sigma_{1,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,0}(u)}+$$

$$+\varphi_3(-\sigma_{0,1}-\sigma_{1,0}-\sigma_{1,1}-\sigma_{1,2})\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}+$$

$$+\varphi_4(-\sigma_{0,1}-\sigma_{1,0}-\sigma_{1,1}-\sigma_{1,2}).$$

Nachdem aber $\varphi_1$ und $\varphi_2$ gerade, $\varphi_3$ und $\varphi_4$ jedoch ungerade Funktionen in den $\sigma_{\lambda,\mu}$ sind, erhalten wir:

$$(29)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{4\pi i}{\omega_2^2}A_{2,0}^{0,2}=\varphi_1(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2})\dfrac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\dfrac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}+\\ \qquad+\varphi_2(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2})\dfrac{\sigma_{2,0}}{\sigma_{1,0}^2}\dfrac{\sigma_{1,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,0}(u)}-\\ -\varphi_3(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2})\dfrac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\dfrac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}-\varphi_4(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2})\\ \dfrac{4\pi i}{\omega_2^2}A_{2,2}^{0,2}=\varphi_1(\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0})\dfrac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\dfrac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}+\\ \qquad+\varphi_2(\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0})\dfrac{\sigma_{2,2}}{\sigma_{1,1}^2}\dfrac{\sigma_{1,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,2}(u)}-\end{array}\right.$$

Digitized by Google

$$(29)\quad \begin{cases} -\varphi_3(\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0})\dfrac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\dfrac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} - \\ \qquad -\varphi_4(\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0}) \\ \dfrac{4\pi i}{\omega_2^2}A_{2,1}^{0,2} = \varphi_1(\sigma_{0,1}\sigma_{1,2}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1})\dfrac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\dfrac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)} + \\ \quad + \varphi_2(\sigma_{0,1}\sigma_{1,2}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1})\dfrac{\sigma_{2,1}}{\sigma_{1,2}^2}\dfrac{\sigma_{1,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,1}(u)} - \\ -\varphi_3(\sigma_{0,1}\sigma_{1,2}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1})\dfrac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\dfrac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} - \\ \qquad -\varphi_4(\sigma_{0,1}\sigma_{1,2}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,0}\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1}). \end{cases}$$

Auf die erste der sechs berechneten Funktionaldeterminanten üben wir nun die Transformation

$$T = \begin{matrix} \omega_1' & -\omega_2 \\ \omega_2' & \omega_1 \end{matrix}$$

aus und erhalten, wenn wir unter Rücksicht auf (6 *b*)

$$\varphi_4'(\sigma_{1,0}-\sigma_{0,1}\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1}) = \varphi_4(\sigma_{1,0}-\sigma_{0,1}\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1}) + \\ + \varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{1,1}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{1,0}^2}\varphi_3(\sigma_{1,0}-\sigma_{0,1}\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1})$$

setzen und beachten, daß auch $\varphi_4'$ eine in den $\sigma_{\lambda,\mu}$ ungerade Funktion ist:

$$(29)\quad \begin{cases} A_{1,0}^{0,2}\dfrac{4\pi i}{\omega_2^2} = \varphi_1(\sigma_{1,0}-\sigma_{0,1}\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1})\dfrac{\sigma_{1,0}}{\sigma_{2,0}^2}\dfrac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)} + \\ \quad + \varphi_2(\sigma_{1,0}-\sigma_{0,1}\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1})\dfrac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\dfrac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)} + \\ + \varphi_3(\sigma_{1,0}-\sigma_{0,1}\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1})\dfrac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\dfrac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} + \\ \qquad + \varphi_4'(\sigma_{1,0}-\sigma_{0,1}\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1}). \end{cases}$$

Digitized by Google

Durch dieselben Transformationen, wie vorher, erhalten wir:

$$
(29)\quad
\begin{cases}
A^{0,2}_{1,1}\dfrac{4\pi i}{\omega_2^2} = \varphi_1(\sigma_{1,1}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,2})\dfrac{\sigma_{1,1}}{\sigma_{2,2}^2}\dfrac{\sigma_{2,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,1}(u)} + \\
\quad + \varphi_2(\sigma_{1,1}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,2})\dfrac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\dfrac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)} + \\
+ \varphi_3(\sigma_{1,1}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,2})\dfrac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\dfrac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} + \\
\quad + \varphi_4'(\sigma_{1,1}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,2}) \\
A^{0,2}_{1,2}\dfrac{4\pi i}{\omega_2^2} = \varphi_1(\sigma_{1,2}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}-\varepsilon^{-2}\sigma_{1,0})\dfrac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,1}^2}\dfrac{\sigma_{2,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,2}(u)} + \\
\quad + \varphi_2(\sigma_{1,2}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}-\varepsilon^{-2}\sigma_{1,0})\dfrac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\dfrac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)} + \\
+ \varphi_3(\sigma_{1,2}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}-\varepsilon^{-2}\sigma_{1,0})\dfrac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\dfrac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} + \\
\quad + \varphi_4'(\sigma_{1,2}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}-\varepsilon^{-2}\sigma_{1,0}) \\
A^{0,1}_{2,0}\dfrac{4\pi i}{\omega_2^2} = \varphi_1(\sigma_{1,0}-\sigma_{0,1}\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1})\dfrac{\sigma_{2,0}}{\sigma_{1,0}^2}\dfrac{\sigma_{1,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,0}(u)} + \\
\quad + \varphi_2(\sigma_{1,0}-\sigma_{0,1}\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1})\dfrac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\dfrac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)} - \\
- \varphi_3(\sigma_{1,0}-\sigma_{0,1}\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1})\dfrac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\dfrac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} - \\
\quad - \varphi_4'(\sigma_{1,0}-\sigma_{0,1}\varepsilon^{-2}\sigma_{1,2}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,1}) \\
A^{0,1}_{2,2}\dfrac{4\pi i}{\omega_2^2} = \varphi_1(\sigma_{1,1}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,2})\dfrac{\sigma_{2,2}}{\sigma_{1,1}^2}\dfrac{\sigma_{1,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,2}(u)} + \\
\quad + \varphi_2(\sigma_{1,1}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,2})\dfrac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\dfrac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)} -
\end{cases}
$$

Digitized by Google

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} A^{0,1}_{2,1}\frac{4\pi i}{\omega_2^2} &= -\varphi_3(\sigma_{1,1}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,2})\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} - \\ &\quad -\varphi_4'(\sigma_{1,1}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}-\varepsilon^{-1}\sigma_{1,2}) \\ &= \varphi_1(\sigma_{1,2}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}-\varepsilon^{-2}\sigma_{1,0})\frac{\sigma_{2,1}}{\sigma_{1,2}^2}\frac{\sigma_{1,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,1}(u)} + \\ &\quad +\varphi_2(\sigma_{1,2}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}-\varepsilon^{-2}\sigma_{1,0})\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)} - \\ &\quad -\varphi_3(\sigma_{1,2}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}-\varepsilon^{-2}\sigma_{1,0})\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} - \\ &\quad -\varphi_4'(\sigma_{1,2}-\sigma_{0,1}\sigma_{1,1}-\varepsilon^{-2}\sigma_{1,0}) \end{aligned}\right.$$

Hiemit sind sämtliche für die Berechnung der ersten Derivierten von $\int P(u)\,du$ notwendigen Funktionaldeterminanten aufgestellt.

## § 13. Vorläufige Darstellung der Derivierten von $\int P(u)\,du$ nach der Tetraederirrationalität durch verwandte Formen.

Durch Zusammenfassung sämtlicher Glieder erhalten wir so die erste Ableitung von $\int P(u)\,du$ nach der Tetraederirrationalität durch unsere acht Verwandten aus Relation (20) und durch die neue verwandte Form

$$\frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}}\int P_1(u)\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}\,du$$

ausgedrückt, indem sich $\int P_1(u)\,du$ und $\int P(u)\,du$ auf die erwähnten Formen zurückführen lassen; und zwar $\int P(u)\,du$ auf Grund von Relation (20). Beachten wir weiter, daß

$$-\frac{y_0}{z_1}\frac{X_1(u)}{X_0(u)} =$$

$$= \frac{1}{(\varepsilon^{-1}-1)}\left[a_1(\varepsilon^{-1}-\varepsilon^{-2}) + \varepsilon^{-1}\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)} + \varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\right],$$

Digitized by Google

so erhalten wir auf Grund von Relation (20)

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{y_0}{z_1}\int P(u)\frac{X_1(u)}{X_0(u)}\,du = \\ &= \frac{1}{(\varepsilon^{-1}-1)}\,a_1(\varepsilon^{-1}-\varepsilon^{-2})\,\frac{1}{A}\left[k_{0,1}\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\int P(u)\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\,du+\cdots\right. \\ &\qquad\left.+\cdots k_{2,2}\frac{\sigma_{2,2}}{\sigma_{1,1}^2}\int P(u)\frac{\sigma_{1,1}^2}{\sigma(u)\,\sigma_{2,2}(u)}\,du\right]- \\ &-\varepsilon^{-1}\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\int P(u)\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\,du-\varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\int P(u)\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\,du. \end{aligned}\right.$$

Ändern wir in dieser Relation die $k_{\lambda,\mu}$ so, daß überall $P_1(u)$ unter den Integralen erscheint, also auf Grund des Schemas

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_{0,0}$ | $k_{0,1}$ | $k_{0,2}$ | $k_{1,0}$ | $k_{1,1}$ | $k_{1,2}$ | $k_{2,0}$ | $k_{2,1}$ | $k_{2,2}$ |
| $k_{0,0}+1$ | $k_{0,1}+1$ | $k_{0,2}+1$ | $k_{1,0}-1$ | $k_{1,1}-1$ | $k_{1,2}-1$ | $k_{2,0}$ | $k_{2,1}$ | $k_{2,2}$ |

so ist die gewünschte Darstellung von $\int P u\,du$ durch unsere neun verwandten Formen erreicht.

Aus Formel (25) sehen wir nun zunächst, daß

$$(31)\quad \frac{\partial}{\partial\xi}\int P(u)\,du = -M_1\frac{\sigma_{0,1}^6\sqrt{\Delta}}{6i}\left\{\qquad\right\}+\frac{\partial}{\partial\xi}\,l\,M_1\int P(u)\,du.$$

Dabei stehen in der geschlungenen Klammer unsere neun verwandten Formen und die Reduktion des letzten Gliedes auf diese wurde soeben durchgeführt. Es erweist sich jedoch als vorteilhaft, Gleichung (31) mit $\frac{1}{M_1}$ zu multiplizieren und demnach

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{M_1}\int P(u)\,du$$

zu betrachten.

## § 14. Nähere Betrachtung der Koeffizienten der verwandten Formen in $\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{M_1}\int P(u)\,du$.

Was nun die Koeffizienten unserer Ableitung betrifft, so können wir durch bloße Betrachtung der $\varphi_\lambda$ über dieselben folgendes aussagen.

Digitized by Google

Zunächst sieht man, daß die $\varphi_1$ im Zähler homogene Ausdrücke zweiten Grades in den $(\sigma_{\lambda,\mu})^3$ bilden. Der gemeinsame Nenner ist $(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2})^2$. Von den $\varphi_2$ gilt genau dasselbe. Die $\varphi_3$ sind linear und homogen in den $(\sigma_{\lambda,\mu})^3$ im Zähler. Der gemeinsame Nenner ist $(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2})$. Die $\varphi_4$ endlich und ebenso die $\varphi_4'$ sind im Zähler homogen vom dritten Grade in den $(\sigma_{\lambda,\mu})^3$; der Nenner ist $(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2})^3$. Bemerkt sei noch, daß $A$ im Zähler linear und homogen in den $(\sigma_{\lambda,\mu})^3$ ist, während der Nenner $(\sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2})$ ist.

Demnach ergibt sich, daß die Koeffizienten der ersten acht verwandten Formen sämtlich rationale, gebrochene Funktionen der Tetraederirrationalität sind, und zwar von der Gestalt

$$-\frac{k}{6i}\frac{\sigma_{0,1}^3}{A'}\frac{R_\alpha(\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,0}^3\sigma_{1,1}^3\sigma_{1,2}^3)}{\sigma_{1,0}^3\sigma_{1,1}^3\sigma_{1,2}^3},$$

wobei der Zähler linear und homogen vom dritten Grade in den $\sigma_{\lambda,\mu}^3$ ist, $A'$ gleich dem eckig eingeklammerten Ausdruck in $A$ ist und von den Relationen

$$\xi_3^3\xi_4 - \xi_4^4 = 3\sqrt[3]{\Delta}$$

$$\sigma_{1,0}^3 = \frac{\xi_3 - \xi_4}{-i\sqrt[3]{\Delta}},\quad \sigma_{1,1}^3\frac{\varepsilon^2\xi_3 - \xi_4}{-i\sqrt[3]{\Delta}},\quad \sigma_{1,2}^3\frac{\varepsilon\xi_3 - \xi_4}{-i\sqrt[3]{\Delta}},\quad \sigma_{0,1}^3 = \frac{\xi_4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\Delta}}$$

und den sich daraus ergebenden Relationen

$$\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2} = \frac{\sqrt[3]{\xi_3^3 - \xi_4^3}}{-i\sqrt[3]{\Delta}};\quad \sigma_{0,1}\sigma_{1,0}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2} = \frac{k}{\sqrt[3]{\Delta}}$$

Gebrauch gemacht ist. $k$ bedeutet hiebei eine numerische Konstante. In $R_\alpha$ kommen als Koeffizienten die $k_{\lambda,\mu}$ in Produkten von zweien vor.

Der Koeffizient der letzten der verwandten Formen dagegen hat die Gestalt

$$-\frac{1}{6i}\sigma_{0,1}^6\sqrt[3]{\Delta}\,S(\sigma_{0,1}^3\sigma_{1,0}^3\sigma_{1,1}^3\sigma_{1,2}^3)\sqrt[3]{\Delta},$$

wobei $S$ in den $\sigma_{\lambda,\mu}^3$ linear und homogen mit Koeffizienten $k_{\lambda,\mu}$ ist.

Mit Hilfe der angesetzten Formeln können wir unsere Koeffizienten noch weiter umformen und das Gesagte auch in folgender Weise aussprechen:

Digitized by Google

Unter Rücksicht auf

$$A' = \sigma_{0,1}^3 \xi [3\varepsilon^{-1}(k_{0,1} - k_{0,2}) +$$
$$+ (\varepsilon^{-2} - 1)(k_{1,0} - k_{2,0} + k_{1,1} - k_{2,2} + k_{1,2} - k_{2,1})]$$
$$A' = \sigma_{0,1}^3 \xi A''$$

stellen sich die Koeffizienten unserer ersten acht verwandten Formen dar in der Gestalt

$$\frac{k'}{A''} \frac{\xi_4}{\xi_3} \frac{R_\alpha(\xi_3, \xi_4)}{(\xi_3^3 - \xi_4^3)}, \tag{32}$$

wobei $R_\alpha$ in den $\xi_3$ und $\xi_4$ homogen vom dritten Grade ist; der Koeffizient von

$$\sigma_{0,1} \int P_1(u) \frac{\sigma_{0,1}(u)\, \sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)} du$$

dagegen lautet

$$k'' \xi_4 S(\xi_3, \xi_4), \tag{33}$$

wobei $S(\xi_2, \xi_4)$ in $\xi_3$ und $\xi_4$ linear und homogen mit $k_{\lambda,\mu}$ als Koeffizienten ist.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß noch keine Verwandten in unserer Relation stehen, die der von Wirtinger gestellten Forderung, daß in ihrer Reihenentwicklung das erste Glied den Koeffizienten 1 habe, genügen. Zu diesem Behufe brauchen wir jedoch nur die $k_{\lambda,\mu}$ in bestimmter Weise zu ändern, wie sich sofort ergeben wird.

Vorläufig ist also die Gestalt der einzelnen Koeffizienten in unserer Darstellung von

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{M_1} \int P(u)\, du$$

durch bestimmte, zu $\int P(u)\, du$ verwandte Formen festgelegt, und es erübrigt nur mehr in dieser Darstellung einige Umformungen vorzunehmen, um so das Material zu schaffen, aus dem sich das gesuchte System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mühelos ergibt.

Digitized by Google

## V. Die für die Herstellung des gesuchten Systems von Differentialgleichungen notwendigen Reduktionen.

### § 15. Zurückführung der gewählten verwandten Formen auf nächstverwandte Formen.

Für die Darstellung der Ableitungen von neun Formen durch diese Formen selbst ist zunächst die Wahl dieser Formen völlig gleichgültig. Man wird daher gleich von vornherein die Wahl dieser Formen so treffen, daß sich die notwendigen Reduktionen möglichst einfach gestalten und namentlich der Symmetrie derselben möglichst Rechnung zu tragen haben.

Indem wir es gleich als nächste Aufgabe hinstellen, unsere Verwandten so umzuformen, daß unter dem Integralzeichen überall $P(u)$ statt $P_1(u)$ erscheint, erweisen sich nun die gewählten nächstverwandten Formen in der Tat als die einfachsten. Denn eine einfachere Gestalt, als

$$\frac{\sigma^2_{\lambda,\mu}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{3-\lambda,3-\mu}(u)},$$

können die $Q(u)$ nicht haben, wenn sie die Bedingung $\sum a_{\lambda,\mu} = 0$, $\sum \lambda a_{\lambda,\mu} \equiv \sum \mu a_{\lambda,\mu} \equiv 0 \pmod 3$ erfüllen sollen, und die notwendigen Reduktionen ergeben sich auf Grund dieser Verwandten auch in verhältnismäßig einfacher Weise.

Wir schreiben nun, indem wir die Koeffizienten als Funktionen der besprochenen Art von $\xi_3$ und $\xi_4$ durch Hinzusetzen dieser Argumente kennzeichnen, unsere erste Ableitung in der Gestalt

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \xi}\dfrac{1}{M_1}\displaystyle\int P(u)\,du = d_1(\xi_3\,\xi_4)\dfrac{1}{\sigma_{0,1}}\int P_1(u)\,\dfrac{\sigma^2_{0,2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\,du + \\ \qquad + d_2(\xi_3,\,\xi_4)\dfrac{1}{\sigma_{0,1}}\displaystyle\int P_1(u)\,\dfrac{\sigma^2_{0,1}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\,du + \cdots \\ \qquad \cdots + d_9(\xi_3,\,\xi_4)\,\sigma_{0,1}\displaystyle\int P_1(u)\,\dfrac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}\,du. \end{cases}$$

Beachten wir nun, daß nach Modulfunktionen, Bd. II, p. 283

$$\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{1,0}}{\sigma}(u) + \varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{1,1}}{\sigma}(u) + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sigma_{1,2}}{\sigma}(u) = \frac{y_0}{z_2}\frac{X_0(u)}{X_1(u)},$$



Digitized by Google

so haben wir, nachdem

$$P_1(u) = P(u)\frac{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{1,2}(u)}$$

ist, in den Relationen (11), (12), (18) und (20) alle Hilfsmittel, um die geforderte Umformung von (34) in der Art, daß wir überall $P(u)$ statt $P_1(u)$ unter den Integralen erhalten, vornehmen zu können. Über die neuen Koeffizienten unserer Relation werden wir jedoch das für sie Wesentliche, ohne sie explizit berechnen zu müssen, aussagen können.

Es gilt nämlich die Gleichung

$$\frac{1}{M_1}\frac{\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{1,2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)} =$$

(35)

$$= \frac{1}{\varepsilon^{-1}-1}\left[a_1(\varepsilon^{-1}-\varepsilon^{-2}) + \varepsilon^{-1}\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)} + \varepsilon^{-2}\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\right].$$

Wenn wir nun beiderseits mit $P(u)$ multiplizieren, über einen Doppelumlauf integrieren und nach $\xi$ differentiieren, so gibt uns Relation (34) die Darstellung des links stehenden Ausdruckes durch die Verwandten:

$$\int P(u)\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\,du, \ldots \int P(u)\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}\,du.$$

Nun zeigt eine nähere Ausführung der vorerwähnten Reduktionen, daß in der Darstellung von

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\,a_1\int P(u)\,du$$

durch die obigen verwandten Formen die Koeffizienten dieser Formen in ihrem Bau genau mit den in (32) und (33) angesetzten Ausdrücken übereinstimmen.

Demnach werden sich auch

$$(36)\quad \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\varepsilon^{-1}\int P(u)\frac{1}{\sigma_{0,1}}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\,du + \varepsilon^{-2}\int P(u)\frac{1}{\sigma_{0,1}}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\,du\right]$$

vermöge Relation (35) durch dieselben verwandten Formen ausdrücken lassen, und zwar mit Koeffizienten, die in ihrem Bau wieder mit (32) resp. (33) übereinstimmen.

Digitized by Google

Haben wir nun

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{M_1}\int P(u)\frac{\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{1,2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\,du$$

durch unsere nächstverwandten Formen mit den bekannten Koeffizienten dargestellt, so sieht man leicht ein, daß eine beliebige Transformation die verwandten Formen ineinander überführen wird, wenn man dabei nur immer die letzte Form auf Grund von (6) auf $\int P(u)\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}\,du$ zurückführt und daß sich dabei an dem Bau der Koeffizienten (32) und (33) nichts ändert.

Demnach läßt sich auch

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{M_2}\int P(u)\frac{\sigma_{2,0}(u)\,\sigma_{2,1}(u)\,\sigma_{2,2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\,du$$

in der beschriebenen Weise darstellen und dasselbe gilt also auch, wenn wir die Relationen (17) und (18) berücksichtigen, von

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\sigma_{0,1}}\int P(u)\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\,du \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\sigma_{0,1}}\int P(u)\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\,du.$$

Direkt aus (36) hätte man das nicht erschließen dürfen, da sich möglicherweise in (36) gerade die Glieder mit von (32) und (33) abweichendem Bau fortheben könnten. Wir sehen also, daß wir es durch passende Wahl eines geeigneten Faktors erreichen konnten, daß sich die Ableitungen der betrachteten Formen durch unsere neun nächstverwandten Formen mit Koeffizienten darstellen lassen, deren Gestalt mit der unter (32) und (33) betrachteten genau übereinstimmt. Weiter aber sehen wir, daß sich diese Koeffizienten aus denen der Darstellung von

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{M_1}\int P(u)\frac{\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{1,2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\,du \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\,a_1\int P(u)\,du$$

in einfacher Weise berechnen lassen.

## § 16. Aufstellung des gesuchten Systems von neun linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Als Funktionen der homogenen Kongruenzmoduln dritter Stufe, $\xi_3$ und $\xi_4$, bezeichnen wir nun die Koeffizienten in der Darstellung der beiden eben angesetzten Ableitungen durch unsere verwandten Formen mit

$$\chi_1(\xi_3, \xi_4),\ \chi_2(\xi_3, \xi_4) \ldots \chi_9(\xi_3, \xi_4)$$
$$\psi_1(\xi_3, \xi_4),\ \psi_2(\xi_3, \xi_4) \ldots \psi_9(\xi_3, \xi_4).$$



Digitized by Google

Vermöge der Relation (35) erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\int P(u)\left[\frac{1-\varepsilon^{-1}}{1-\varepsilon^{-2}}a_1+\frac{\varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1}-1}\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,2}^2}\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^{-2}}{\varepsilon^{-1}-1}\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}^2}\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\right]du=$$

$$=\chi_1(\xi_3,\xi_4)\frac{1}{\sigma_{0,1}}\int P(u)\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}du+\cdots$$

$$+\cdots\chi_9(\xi_3,\xi_4)\,\sigma_{0,1}\int P(u)\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}du.$$

Bezeichnen wir $\frac{1-\varepsilon^{-1}}{1-\varepsilon^{-2}}$, $\frac{\varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1}-1}$, $\frac{\varepsilon^{-2}}{\varepsilon^{-1}-1}$ mit $\alpha$ resp. $\beta$ und $\gamma$, so erhalten wir weiter aus dieser Gleichung

$$(37)\quad\begin{cases}\beta\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{\sigma_{0,1}}\int P(u)\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}du+\gamma\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{\sigma_{0,1}}\int P(u)\frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}du=\\ =\frac{1}{\sigma_{0,1}}\left[\chi_1(\xi_3,\xi_4)-\alpha\psi_1(\xi_3,\xi_4)\right]\int P(u)\frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}du+\cdots\\ \cdots+\sigma_{0,1}\left[\chi_9(\xi_3,\xi_4)-\alpha\psi_9(\xi_3,\xi_4)\right]\int P(u)\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}du.\end{cases}$$

Die Gruppe der Transformationen von $\xi_3$ und $\xi_4$ ist nun die homogene Tetraedergruppe $G_{24}$ und nach Modulfunktionen, Bd. I, p. $630_{16}$ erfahren diese Formen gegenüber den homogenen Substitutionen $S$ und $T$ die Änderungen:

$$(38)\quad\begin{aligned}&S:\xi_3'=\xi_3,\quad \xi_4'=\varepsilon\xi_4\\ &T:i\sqrt{3}\,\xi_3'=\xi_3+2\xi_4,\quad i\sqrt{3}\,\xi_4'=\xi_3-\xi_4.\end{aligned}$$

Daher die Änderungen bei $T^2$

$$(38)\qquad T^2:\xi_3'=-\xi_3,\quad \xi_4'=-\xi_4.$$

Digitized by Google

Wenn wir nun diese Transformation auf (37) anwenden, so ergibt sich, wenn wir gleichzeitig die $k_{\lambda,\mu}$ auf Grund der Tabelle

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_{0,1}$ | $k_{0,2}$ | $k_{1,0}$ | $k_{1,1}$ | $k_{1,2}$ | $k_{2,0}$ | $k_{2,1}$ | $k_{2,2}$ |
| $k_{0,2}$ | $k_{0,1}$ | $k_{2,0}$ | $k_{2,2}$ | $k_{2,1}$ | $k_{1,0}$ | $k_{1,2}$ | $k_{1,1}$ |

ändern

$$(39)\quad \begin{cases} \beta \dfrac{\partial}{\partial \xi} \dfrac{1}{\sigma_{0,1}} \displaystyle\int P(u) \frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\,du + \gamma \dfrac{\partial}{\partial \xi} \dfrac{1}{\sigma_{0,1}} \displaystyle\int P(u) \frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\,du = \\ = \dfrac{1}{\sigma_{0,1}} \left[\chi_1'(-\xi_3,-\xi_4) - \alpha\psi_1'(-\xi_3,-\xi_4)\right] \displaystyle\int P(u) \frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\,du + \cdots \\ \cdots + \sigma_{0,1}\left[\chi_9'(-\xi_3,-\xi_4) - \alpha\psi_9'(-\xi_3,-\xi_4)\right] \displaystyle\int P(u) \frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}\,du. \end{cases}$$

Dabei soll der Akzent bei $\chi_\lambda'$ und $\psi_\lambda'$ anzeigen, daß die $k_{\lambda,\mu}$ im Sinne der Tabelle zu ändern sind.

Aus Relation (37) und (39) ergibt sich nun die Darstellung von

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\sigma_{0,1}} \int P(u) \frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\,du \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\sigma_{0,1}} \int P(u) \frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\,du$$

durch unsere neun nächstverwandten Formen, womit die ersten zwei unserer gesuchten Differentialgleichungen tatsächlich gefunden sind. Die Koeffizienten der Verwandten in den beiden Gleichungen sind der Reihe nach:

$$(40)\quad \begin{cases} \left[\chi_1(\xi_3,\xi_4) - \alpha\psi_1(\xi_3,\xi_4) - \varepsilon^{-1}\chi_2'(-\xi_3,-\xi_4) + \varepsilon^{-1}\alpha\psi_2'(-\xi_3,-\xi_4)\right] \text{ Koeff.} \\ \qquad \text{von } \dfrac{1}{\sigma_{0,1}} \displaystyle\int P(u) \frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)}\,du \\ \left[\chi_2(\xi_3,\xi_4) - \alpha\psi_2(\xi_3,\xi_4) - \varepsilon^{-1}\chi_1'(-\xi_3,-\xi_4) + \varepsilon^{-1}\alpha\psi_1'(-\xi_3,-\xi_4)\right] \text{ Koeff.} \\ \qquad \text{von } \dfrac{1}{\sigma_{0,1}} \displaystyle\int P(u) \frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,2}(u)}\,du \end{cases}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&\left[\chi_3(\xi_3,\xi_4)-\alpha\psi_3(\xi_3,\xi_4)-\varepsilon^{-1}\chi_6'(-\xi_3,-\xi_4)+\varepsilon^{-1}\alpha\psi_6'(-\xi_3,-\xi_4)\right]\text{ Koeff.}\\
&\qquad\text{von }\frac{1}{\sigma_{1,0}}\int P(u)\,\frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,0}(u)}\,du\\
&\left[\chi_4(\xi_3,\xi_4)-\alpha\psi_4(\xi_3,\xi_4)-\varepsilon^{-1}\chi_8'(-\xi_3,-\xi_4)+\varepsilon^{-1}\alpha\psi_8'(-\xi_3,-\xi_4)\right]\text{ Koeff.}\\
&\qquad\text{von }\frac{1}{\sigma_{1,1}}\int P(u)\,\frac{\sigma_{2,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,1}(u)}\,du\\
&\left[\chi_5(\xi_3,\xi_4)-\alpha\psi_5(\xi_3,\xi_4)-\varepsilon^{-1}\chi_7'(-\xi_3,-\xi_4)+\varepsilon^{-1}\alpha\psi_7'(-\xi_3,-\xi_4)\right]\text{ Koeff.}\\
&\qquad\text{von }\frac{1}{\sigma_{1,2}}\int P(u)\,\frac{\sigma_{2,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{1,2}(u)}\,du\\
&\left[\chi_6(\xi_3,\xi_4)-\alpha\psi_6(\xi_3,\xi_4)-\varepsilon^{-1}\chi_3'(-\xi_3,-\xi_4)+\varepsilon^{-1}\alpha\psi_3'(-\xi_3,-\xi_4)\right]\text{ Koeff.}\\
&\qquad\text{von }\frac{1}{\sigma_{1,0}}\int P(u)\,\frac{\sigma_{1,0}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,0}(u)}\,du\\
&\left[\chi_7(\xi_3,\xi_4)-\alpha\psi_7(\xi_3,\xi_4)-\varepsilon^{-1}\chi_5'(-\xi_3,-\xi_4)+\varepsilon^{-1}\alpha\psi_5'(-\xi_3,-\xi_4)\right]\text{ Koeff.}\\
&\qquad\text{von }\frac{1}{\sigma_{1,2}}\int P(u)\,\frac{\sigma_{1,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,1}(u)}\,du\\
&\left[\chi_8(\xi_3,\xi_4)-\alpha\psi_8(\xi_3,\xi_4)-\varepsilon^{-1}\chi_4'(-\xi_3,-\xi_4)+\varepsilon^{-1}\alpha\psi_4'(-\xi_3,-\xi_4)\right]\text{ Koeff.}\\
&\qquad\text{von }\frac{1}{\sigma_{1,1}}\int P(u)\,\frac{\sigma_{1,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,2}(u)}\,du\\
&\left[\chi_9(\xi_3,\xi_4)-\alpha\psi_9(\xi_3,\xi_4)-\varepsilon^{-1}\chi_9'(-\xi_3,-\xi_4)+\varepsilon^{-1}\alpha\psi_9'(-\xi_3,-\xi_4)\right]\text{ Koeff.}\\
&\qquad\text{von }\sigma_{0,1}\int P(u)\,\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}\,du.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Ganz Analoges gilt nun von der Ableitung der zweiten Form, welche sich ja durch Multiplikation von (37) mit $\varepsilon^{-1}$ und Subtraktion von (39) ergibt und genau analog gebaute Koeffizienten liefert wie (39).

Digitized by Google

Nun brauchen wir die beiden erhaltenen Differentialgleichungen nur mit $T$ und hierauf mit $S$ und $S^2$ zu transformieren, um die ersten acht der gesuchten Differentialgleichungen zu erhalten. An dem Bau der Koeffizienten wird sich dabei wesentliches nicht ändern. Die Änderungen von $\xi_3$ und $\xi_4$ durch diese Transformationen wurden bereits angegeben und die $k_{\lambda,\mu}$ ändern sich gemäß der Tabelle.

| | $k_{0,1}$ | $k_{0,2}$ | $k_{1,0}$ | $k_{1,1}$ | $k_{1,2}$ | $k_{2,0}$ | $k_{2,1}$ | $k_{2,2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $k_{1,0}$ | $k_{2,0}$ | $k_{0,2}$ | $k_{1,2}$ | $k_{2,2}$ | $k_{0,1}$ | $k_{1,1}$ | $k_{2,1}$ |
| $S$ | $k_{0,1}$ | $k_{0,2}$ | $k_{1,1}$ | $k_{1,2}$ | $k_{1,0}$ | $k_{2,2}$ | $k_{2,0}$ | $k_{2,1}$ |
| $S^2$ | $k_{0,1}$ | $k_{0,2}$ | $k_{1,2}$ | $k_{1,0}$ | $k_{1,1}$ | $k_{2,1}$ | $k_{2,2}$ | $k_{2,0}$ |

Es erübrigt noch die Darstellung der letzten der gesuchten Differentialgleichungen oder die Darstellung von

$$\frac{\partial}{\partial \xi} m \int P(u) \frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}\,du$$

durch unsere nächstverwandten Formen. Dabei bedeutet $m$ wieder eine passend gewählte Modulform. Zunächst wollen wir das für die explizite Berechnung dieser Ableitung Notwendige angeben, um dann die Frage zu behandeln, ob sich über die Koeffizienten der verwandten Formen nicht Ähnliches aussagen läßt, wie wir dies bisher tun konnten.

Wir wissen nun, wie sich $\frac{\partial}{\partial \xi} a_1 \int P(u)\,du$ durch unsere verwandten Formen darstellt. Unsere Frage erledigt sich demnach sofort aus der Gleichung (6). Denken wir uns nämlich

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\sigma_{0,1}\sigma_{0,2}} \int P(u) \frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}\,du$$

durch unsere nächstverwandten Formen dargestellt, so ergibt sich daraus

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}} \int P(u) \frac{\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{2,0}(u)}{\sigma^2(u)}\,du$$

einfach durch Transformation mit $T$. Demnach erhellt aus Gleichung (6$b$), daß der Bau der Koeffizienten in der Darstellung obiger Ableitung durch unsere Verwandten mit den Koeffizienten der Verwandten rechts in (6$b$) übereinstimmen muß, wenn wir (6$b$) mit $P(u)$ multiplizieren und nach $\xi$ differentiieren. Demnach stimmen die Koeffizienten in

Digitized by Google

$$(41) \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}\, \xi_3 (\xi_3 - \xi_4)\, \sigma_{0,1} \int P(u)\, \frac{\sigma_{0,1}(u)\, \sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}\, du$$

ihrer Gestalt nach wieder mit (32) und (33) überein.

Dabei ist zu bemerken, daß diese Form eine Verwandte in dem Sinne darstellt, wie sie von Wirtinger l. c. aufgestellt sind.

Hiemit sind nun die Koeffizienten in unserem System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung vollständig festgelegt und sämtliche Relationen entwickelt, die zu einer expliziten Berechnung dieser Koeffizienten notwendig sind. Dieselbe ist mit den entwickelten Hilfsmitteln zwar leicht durchführbar, für die Bestimmung der singulären Stellen der Differentialgleichung jedoch nicht wesentlich und dürfte der großen Kompliziertheit der Ausdrücke wegen kaum Vorteile gewähren.

## § 17. Zusammenfassung des Resultats und abschließende Bemerkungen.

Durch die Überlegungen im Vorhergehenden gelangen wir also zu folgendem Resultat:

Bezeichnen wir mit $J(\xi, k_{0,0}, k_{0,1}, \ldots k_{2,2})$ das Integral $\int P(u)\, du$ und entsprechend die nächstverwandten Formen

$$\frac{1}{\sigma_{0,1}} \int P(u)\, \frac{\sigma_{0,2}^2(u)}{\sigma(u)\, \sigma_{0,1}(u)}\, du \quad \text{mit} \quad J_1(\xi, k_{0,0} - 1, k_{0,1} - 1, k_{0,2} + 2)$$

$$\frac{1}{\sigma_{0,1}} \int P(u)\, \frac{\sigma_{0,1}^2(u)}{\sigma(u)\, \sigma_{0,2}(u)}\, du \quad \text{mit} \quad J_2(\xi, k_{0,0} - 1, k_{0,1} + 2, k_{0,2} - 1)$$

$$\frac{1}{\sigma_{1,0}} \int P(u)\, \frac{\sigma_{2,0}^2(u)}{\sigma(u)\, \sigma_{1,0}(u)}\, du \quad \text{mit} \quad J_3(\xi, k_{0,0} - 1, k_{1,0} - 1, k_{2,0} + 2)$$

$$\frac{1}{\sigma_{1,1}} \int P(u)\, \frac{\sigma_{2,2}^2(u)}{\sigma(u)\, \sigma_{1,1}(u)}\, du \quad \text{mit} \quad J_4(\xi, k_{0,0} - 1, k_{1,1} - 1, k_{2,2} + 2)$$

$$\frac{1}{\sigma_{1,2}} \int P(u)\, \frac{\sigma_{2,1}^2(u)}{\sigma(u)\, \sigma_{1,2}(u)}\, du \quad \text{mit} \quad J_5(\xi, k_{0,0} - 1, k_{1,2} - 1, k_{2,1} + 2)$$

$$\frac{1}{\sigma_{1,0}} \int P(u)\, \frac{\sigma_{1,0}^2(u)}{\sigma(u)\, \sigma_{2,0}(u)}\, du \quad \text{mit} \quad J_6(\xi, k_{0,0} - 1, k_{1,0} + 2, k_{2,0} - 1)$$

Digitized by Google

$$\frac{1}{\sigma_{1,2}}\int P(u)\,\frac{\sigma_{1,2}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,1}(u)}\,du \text{ mit } J_7(\xi, k_{0,0}-1, k_{1,2}+2, k_{2,1}-1)$$

$$\frac{1}{\sigma_{1,1}}\int P(u)\,\frac{\sigma_{1,1}^2(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{2,2}(u)}\,du \text{ mit } J_8(\xi, k_{0,0}-1, k_{1,1}+2, k_{2,2}-1)$$

$$\xi_3(\xi_3-\xi_4)\,\sigma_{0,1}\int P(u)\,\frac{\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}{\sigma^2(u)}\,du \text{ mit } J_9(\xi, k_{0,0}-2, k_{0,1}+1, k_{0,2}+1),$$

wobei in den $J_\lambda$ nur die $k_{\lambda,\mu}$ besonders angeführt sind, welche gegenüber den $k_{\lambda,\mu}$ von $P(u)$ geändert erscheinen, so lassen sich die Ableitungen der $J_\lambda$ nach der Tetraederirrationalität durch die $J_\lambda$ selbst linear ausdrücken, und die Koeffizienten der neun nächstverwandten Formen $J_\lambda$ in diesen Relationen erweisen sich als Modulfunktionen dritter Stufe und sind rational in der Tetraederirrationalität $\xi$ darstellbar.

Zur Bestimmung dieser Koeffizienten berechnet man zunächst vermittels der Ausdrücke von § 11 und § 12 die Darstellung von $\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{M_1}\int P(u)\,du$ durch bestimmte Formen und hieraus die Darstellung von $\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{M_1}\int P(u)\,\frac{\sigma_{1,0}(u)\,\sigma_{1,1}(u)\,\sigma_{1,2}(u)}{\sigma(u)\,\sigma_{0,1}(u)\,\sigma_{0,2}(u)}$ durch unsere nächstverwandten Formen $J_\lambda$. Diese haben ja sämtlich die Eigenschaften, welche l. c. von Wirtinger für verwandte Formen gefordert wurden. Die Relationen von (35) und (36) geben dann sofort die Darstellung von $\frac{\partial}{\partial\xi}J_1$ und $\frac{\partial}{\partial\xi}J_2$ durch die neun $J_\lambda$. Die Ableitungen der übrigen nächstverwandten Formen nach $\xi$ erhält man einfach durch Transformation und nur die Darstellung der Ableitung der Form $J_9$ erfordert eine besondere, auf Relation (6*b*) beruhende Behandlung, wie ja diese Form auch schon äußerlich von den anderen in ihrem Bau verschieden ist.

Was nun die Gestalt der Koeffizienten in den neun linearen Differentialgleichungen erster Ordnung betrifft, so wurde dieselbe in § 14 und § 16 näher festgelegt. Nachdem aber die Koeffizienten in den neun Differentialgleichungen eindeutige Modulfunktionen dritter Stufe sind, die sich daher rational in $\xi$ darstellen lassen müssen, sind die Singularitäten der Koeffizienten durch die bekannte Darstellung von $\xi$ als $s$-Funktion erster Art durch die $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, J\right)$ entspringende Dreiecksteilung der Ebene von vornherein festgelegt.

Digitized by Google

Von den $k_{\lambda,\mu}$ können nun die Singularitäten nicht abhängen. Aus dem Ausdruck (32) folgt aber sofort für die Koeffizienten der ersten acht $J_\lambda$ in $\frac{\partial}{\partial\xi}J_1$ und $\frac{\partial}{\partial\xi}J_2$ die Gestalt

$$\frac{k'}{A''}\frac{R_\alpha(\xi)}{\xi(\xi^3-1)} \quad (\alpha=1,2,\ldots 8) \tag{42}$$

wobei $k'$ eine Konstante

$$A''=3\varepsilon^{-1}(k_{0,1}-k_{0,2})+$$
$$+(\varepsilon^{-2}-1)(k_{1,0}-k_{2,0}+k_{1,1}-k_{2,2}+k_{1,2}-k_{2,1})$$

und $R_\alpha$ vom dritten Grad in $\xi$ ist mit Koeffizienten, die aus Produkten von je zweien der $k_{\lambda,\mu}$ bestehen. Demnach liegen also hier die singulären Stellen bei

$$\xi=0,\ \xi=1,\ \xi=\varepsilon,\ \xi=\varepsilon^2,$$

wie es in Übereinstimmung mit dem Gesagten sein muß. Der Koeffizient von $J_9$ in diesen beiden Entwicklungen dagegen ist, wie aus (33) nach einer kleinen Umformung erhellt,

$$k''\frac{S(\xi)}{\xi(\xi-1)}, \tag{43}$$

wobei $S$ in $\xi$ linear ist mit $k_{\lambda,\mu}$ als Koeffizienten. Hier liegen also die singulären Stellen bei

$$\xi=0,\ \xi=1.$$

Die Koeffizienten von $\frac{\partial}{\partial\xi}J_3$ und $\frac{\partial}{\partial\xi}J_6$ ergeben sich nun einfach durch Transformation mit $T$, und die singulären Stellen der Koeffizienten liegen dementsprechend bei

$$\xi=-2,\ \xi=1,\ \xi=\varepsilon,\ \xi=\varepsilon^2$$

für die ersten acht $J_\lambda$ und für den Koeffizienten von $J_9$ bei

$$\xi=-2,\ \xi=1.$$

Transformieren wir nun mit $S$, so erhalten wir die singulären Stellen der Koeffizienten in der Darstellung von $\frac{\partial}{\partial\xi}J_4$ und $\frac{\partial}{\partial\xi}J_8$ bei

$$\xi=-2\varepsilon^2,\ \xi=\varepsilon^2,\ \xi=1,\ \xi=\varepsilon$$

und für den Koeffizienten von $J_9$ bei

$$\xi=-2\varepsilon^2,\ \xi=\varepsilon^2.$$

Digitized by Google

Nochmals $S$ angewendet, ergibt die singulären Stellen der Koeffizienten von $J_1$ bis $J_8$ in $\frac{\partial}{\partial \xi} J_5$ und $\frac{\partial}{\partial \xi} J_7$ bei

$$\xi = -2\varepsilon, \quad \xi = \varepsilon, \quad \xi = \varepsilon^2, \quad \xi = 1$$

und von dem Koeffizienten von $J_9$ bei

$$\xi = -2\varepsilon, \quad \xi = \varepsilon.$$

Die singulären Stellen der Koeffizienten der nächstverwandten Formen in $\frac{\partial}{\partial \xi} J_9$ endlich liegen bezüglich bei

$$\xi = 0, \quad \xi = 1, \quad \xi = \varepsilon, \quad \xi = \varepsilon^2$$

und

$$\xi = 0, \quad \xi = 1.$$

Der besseren Übersicht halber seien diese Ergebnisse nochmals in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

| | Singuläre Stellen der Koeffizienten von | |
|---|---|---|
| | $J_1$ bis $J_8$ | $J_9$ |
| $\frac{\partial}{\partial \xi} J_1, \frac{\partial}{\partial \xi} J_2$ | $0, \quad 1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2$ | $0, \quad 1$ |
| $\frac{\partial}{\partial \xi} J_3, \frac{\partial}{\partial \xi} J_6$ | $-2, \quad 1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2$ | $-2, \quad 1$ |
| $\frac{\partial}{\partial \xi} J_4, \frac{\partial}{\partial \xi} J_8$ | $-2\varepsilon^2, \quad \varepsilon^2, \quad 1, \quad \varepsilon$ | $-2\varepsilon^2, \quad \varepsilon^2$ |
| $\frac{\partial}{\partial \xi} J_5, \frac{\partial}{\partial \xi} J_7$ | $-2\varepsilon, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2, \quad 1$ | $-2\varepsilon, \quad \varepsilon$ |
| $\frac{\partial}{\partial \xi} J_9$ | $0, \quad 1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2$ | $0, \quad 1$ |

Nachdem so die Gestalt der Koeffizienten in den neun linearen Differentialgleichungen erster Ordnung festgelegt ist, fragt es sich nur, welche von den gefundenen Singularitäten auch wesentlich singuläre Stellen der Differentialgleichung neunter Ordnung sein werden, die aus dem System der neun linearen Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten wird.

Lassen wir nun $\xi$ um einen singulären Punkt einen Umlauf machen, so ist ersichtlich, daß dieser Punkt für die Differentialgleichung nur dann we-

Digitized by Google

sentlich singulär ist, so daß also hier die Integrale Substitutionen erleiden, wenn $\omega$ bei diesem Umlauf des $\xi$ nicht in seinen ursprünglichen Wert zurückkehrt. Wir haben also alle jene singulären Stellen auszuscheiden, wo $\omega$ als Funktion von $\xi$ betrachtet von diesem in eindeutiger Weise abhängig ist.

Die Stellen nun, wo dies nicht der Fall ist, finden wir am einfachsten, wenn wir den Fundamentalbereich der in der Modulgruppe ausgezeichneten $\Gamma_{12}$ durch die in Modulfunktionen, Bd. I, p. 354, angegebene Zerschneidung auf die Ebene übertragen, die mit der Modulteilung versehen ist.

Wenn man nun $\xi$ von einer beliebigen Stelle auf einer Begrenzungslinie des Fundamentalpolygons der $\Gamma_{12}$ einen Weg zu der zugehörigen Stelle auf einer anderen Begrenzungslinie machen läßt, wo $\xi$ dieselben Werte hat, so entspricht ein solcher Weg Umläufen um die Punkte

$$\xi = 1,\ \xi = \varepsilon,\ \xi = \varepsilon^2,\ \xi = \infty,$$

welchen beziehungsweise die Punkte

$$\omega = 0,\ \omega = -1,\ \omega = 1,\ \omega = \infty$$

entsprechen.

Nur bei Umlaufung dieser Punkte wird $\omega$ seinen Wert ändern, während $\xi$ ungeändert bleibt. Demnach werden die Integrale auch nur Substitutionen erleiden, wenn $\xi$ Umläufe um diese vier Punkte macht, so daß sich nur die Stellen

$$\xi = 1,\ \xi = \varepsilon,\ \xi = \varepsilon^2,\ \xi = \infty$$

als singulär für die Differentialgleichung erweisen, während die Stellen

$$\xi = 0,\ \xi = -2,\ \xi = -2\varepsilon,\ \xi = -2\varepsilon^2$$

als uneigentlich singuläre Stellen zu gelten haben.

Beim gewöhnlichen Fall der hypergeometrischen Funktion liegen nun die singulären Stellen der Differentialgleichung zweiter Ordnung bei

$$x = 0,\ x = 1,\ x = \infty,\ \text{wobei } x = k^2(\omega).$$

Zufolge der bekannten Formeln

$$\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4 = \vartheta_3^4$$

$$k^2 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}$$

sehen wir also, daß diese Stellen gerade die Nullstellen von $\vartheta_2, \vartheta_0$ und $\vartheta_3$ sind.

Digitized by Google

Ganz analog liegen auch in unserem Falle die singulären Stellen der Differentialgleichung bei den Nullstellen der vier verschiedenen σ-Teilwerte, indem ja für

$$\xi = 1,\ \xi = \varepsilon,\ \xi = \varepsilon^2,\ \xi = \infty$$

beziehungsweise

$$\sigma_{1,0} = 0,\ \sigma_{1,1} = 0,\ \sigma_{1,2} = 0,\ \sigma_{0,1} = 0$$

sich ergibt.

---

Digitized by Google

# INHALT.

## IV. Herstellung der Derivierten durch verwandte Formen.

Seite

§ 10. Allgemeine Gesichtspunkte . . . . . 161

§ 11. Nähere Ausführung für $n = 3$ . . . . . 163

§ 12. Darstellung der Funktionaldeterminanten $A_{\lambda,\mu}^{\nu,\mu}$. Einführung der Größen $\varphi_\lambda$ 164

§ 13. Vorläufige Darstellung der Derivierten von $\int P(u)\,du$ nach der Tetraederirrationalität durch verwandte Formen . . . . . 171

§ 14. Nähere Betrachtung der Koeffizienten der verwandten Formen in $\frac{\partial}{\partial \xi} M_1 \int P(u)\,du$ . . . . . 172

## V. Die für die Herstellung des gesuchten Systems von Differentialgleichungen notwendigen Reduktionen.

§ 15. Zurückführung der gewählten verwandten Formen auf nächstverwandte Formen . . . . . 175

§ 16. Aufstellung des gesuchten Systems von neun linearen Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . . 177

§ 17. Zusammenfassung des Resultats und abschließende Bemerkungen . . 182

Digitized by Google

# Über die unvollständigen Gammafunktionen.

Von **Alfred Tauber.**

Für die Entwicklung der unvollständigen Gammafunktion

$$\Gamma(z,k)=\int_z^\infty t^{k-1}e^{-t}\,dt=\frac{e^{-z}z^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty\frac{t^{\lambda-1}e^{-t}}{z+t}\,dt \tag{1}$$

($z$ und $1-k=\lambda$ positiv vorausgesetzt) hat man in erster Linie die Formel von Legendre

$$e^z z^{-k}\Gamma(z,k)=\cfrac{1}{z+\cfrac{\lambda}{1+\cfrac{1}{z+\cfrac{\lambda+1}{1+\cfrac{2}{z+\cfrac{\lambda+2}{1+\cdots}}}}}} \tag{2}$$

und dann die Formel von Schlömilch

$$\begin{cases} e^z z^{-k}\Gamma(z,k)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{a_1}{z(z+1)}+\dfrac{a_2}{z(z+1)(z+2)}- \\ \qquad -\dfrac{a_3}{z(z+1)(z+2)(z+3)}+\cdots \\ a_\nu=\dfrac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty t^\lambda(t-1)(t-2)\cdots(t-\nu+1)e^{-t}\,dt. \end{cases} \tag{3}$$

Die Gültigkeit der ersten Formel ergibt sich aus den allgemeinen Stieltjesschen Theoremen, für die zweite hat Schlömilch selbst einen Beweis gegeben, der aber nicht ganz korrekt ist.

Ich möchte darauf hinweisen, daß man erstens die Darstellung durch die Näherungsbrüche obigen Kettenbruches direkt durch Aufstellung von linearen Beziehungen zwischen gewissen Integralen ableiten und zweitens diese Näherungsbrüche explizite angeben kann. Dadurch ist also eine explizite rationale Funktion von $z$ und $\lambda$ gefunden, deren Grenzwert $e^z z^{-k}\Gamma(z,k)$ ist, es ist nämlich

Digitized by Google

$$(4)\quad e^z z^{-k}\Gamma(z,k)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}e^{-t}}{z+t}\,dt=\frac{B_n}{A_n}+\frac{1}{A_n}\,\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty \frac{t^{\lambda+n-1}e^{-}}{(z+t)^{n+1}}\,dt=$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{B_n}{A_n}$$

wo $B_n$ und $A_n$ die folgenden Polynome von $z, \lambda$ vorstellen.

$$(5)\quad A_n=\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{n\nu}\,z^\nu;\quad \alpha_{n\nu}=\frac{1}{\nu!}\binom{\lambda+n-1}{n-\nu}$$

$$(6)\quad \begin{cases} B_n=\sum_{\nu=0}^{n-1}\beta_{n\nu}\,z^\nu \\ \beta_{n\nu}=\frac{1}{n}\,\frac{1}{\nu!}\left[1+\frac{\nu+1}{n-1}\binom{\lambda+n-1}{1}+\right. \\ \left.+\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(n-1)(n-2)}\binom{\lambda+n-1}{2}+\cdots+\binom{\lambda+n-1}{n-\nu-1}\right]. \end{cases}$$ *)

Dabei stimmt $B_n/A_n$ mit dem $(2n)^{\text{ten}}$ Näherungsbruche obigen Kettenbruches überein. Für die numerische Berechnung eignet sich die Formel

$$(7)\quad e^z z^{-k}\,\Gamma(z,k)=\frac{1}{A_1}+\frac{\lambda}{2!\,A_1\,A_2}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{3!\,A_2\,A_3}+\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{4!\,A_3\,A_4}$$

Um diese Formeln nachzuweisen, hat man von den Integralen

$$(8)\quad \varphi_n(z,\lambda)=\int_0^\infty \frac{t^{\lambda+n-2}e^{-t}}{(z+t)^n}\,dt\quad \begin{matrix} n>0, \lambda>0 \\ n=0, \lambda>1 \end{matrix}$$

auszugehen, zwischen denen die Beziehungen

$$(9)\quad \begin{aligned} \varphi_{n-1}(z,\lambda+1)&=z\,\varphi_n(z,\lambda)+\varphi_n(z,\lambda+1) \\ n\,\varphi_{n+1}(z,\lambda)&=(\lambda+n-1)\,\varphi_n(z,\lambda)-\varphi_n(z,\lambda+1) \end{aligned}$$

bestehen. Schreibt man $n-1$ für $n$ in der letzten Gleichung

$$(\lambda+n-2)\,\varphi_{n-1}(z,\lambda)-\varphi_{n-1}(z,\lambda+1)=(n-1)\,\varphi_n(z,\lambda)$$

---

*) Zu bemerken wäre, daß $e^z z^{-k}\Gamma(z,k)$ nicht bloß der Grenzwert von $B_n/A_n$ für $n=\infty$ ist, sondern auch derjenige von

$$\frac{B_n-B_{n-1}}{A_n-A_{n-1}},\ \frac{B_n-2B_{n-1}+B_{n-2}}{A_n-2A_{n-1}+A_{n-2}},\ \cdots$$

Digitized by Google

und addiert diese drei Gleichungen, so erhält man die Rekursionsformel für $n \geq 2$.

$$n\,\varphi_{n+1}(z,\lambda) = (z+\lambda+2n-2)\,\varphi_n(z,\lambda) - \\ -(\lambda+n-2)\,\varphi_{n-1}(z,\lambda). \tag{10}$$

Da sich für $n=1$ direkt aus (9)

$$\varphi_2(z,\lambda) = (z+\lambda)\,\varphi_1(z,\lambda) - \varphi_0(z,\lambda+1) \tag{11}$$

ergibt, so ist ersichtlich, daß $\varphi_{n+1}(z,\lambda)$ eine lineare homogene Funktion von $\varphi_1(z,\lambda)$ und $\varphi_0(z,\lambda+1) = \Gamma(\lambda)$

$$\varphi_{n+1}(z,\lambda) = A_n\,\varphi_1(z,\lambda) - B_n\,\varphi_0(z,\lambda+1) \tag{12}$$

ist, und zwar besteht diese Formel (12) auch noch für $n=0, 1$, wenn man

$$A_0 = 1,\ A_1 = (z+\lambda) \\ B_0 = 0,\ B_1 = \quad 1 \tag{13}$$

einführt. Umgekehrt folgt für $\varphi_1(z,\lambda)$ aus (12)

$$\frac{\varphi_1(z,\lambda)}{\Gamma(\lambda)} = \frac{B_n}{A_n} + \frac{1}{A_n}\frac{\varphi_{n+1}(z,\lambda)}{\Gamma(\lambda)}. \tag{14}$$

Zwischen den Größen $A_n$ und zwischen den Größen $B_n$ bestehen die (Rekursionsformeln für $n \geq 2$)

$$n\,A_n = (z+\lambda+2n-2)\,A_{n-1} - (\lambda+n-2)\,A_{n-2} \\ n\,B_n = (z+\lambda+2n-2)\,B_{n-1} - (\lambda+n-2)\,B_{n-2}, \tag{15}$$

die man erhält, wenn in (10)

$$\varphi_{n-1}(z,\lambda) = A_{n-2}\,\varphi_1(z,\lambda) - B_{n-2}\,\varphi_0(z,\lambda+1)$$

$$\varphi_n(z,\lambda) = A_{n-1}\,\varphi_1(z,\lambda) - B_{n-1}\,\varphi_0(z,\lambda+1)$$

$$\varphi_{n+1}(z,\lambda) = A_n\,\varphi_1(z,\lambda) - B_n\,\varphi_0(z,\lambda+1)$$

eingesetzt wird.

Multipliziert man die Gleichungen (15) mit $(-B_{n-1})$ und $A_{n-1}$ und addiert, so resultiert

$$n(A_{n-1}B_n - B_{n-1}A_n) = (\lambda+n-2)(A_{n-2}B_{n-1} - \\ - A_{n-1}B_{n-2}) \tag{16}$$



Digitized by Google

und daraus für $n = 2, 3, \ldots$

$$(17)\quad \begin{cases} A_1 B_2 - B_1 A_2 = \dfrac{\lambda}{2} \\ A_2 B_3 - B_2 A_3 = \dfrac{\lambda+1}{3}\dfrac{\lambda}{2} \\ A_{n-1} B_n - B_{n-1} A_n = \dfrac{(\lambda+n-2)(\lambda+n-1)\ldots\lambda}{n!}. \end{cases}$$

Für die Darstellung von $\dfrac{B_n}{A_n}$ gibt dies

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{B_n}{A_n} = \dfrac{B_1}{A_1} + \left(\dfrac{B_2}{A_2} - \dfrac{B_1}{A_1}\right) + \left(\dfrac{B_3}{A_3} - \dfrac{B_2}{A_2}\right) + \cdots \\ \qquad + \left(\dfrac{B_n}{A_n} - \dfrac{B_{n-1}}{A_{n-1}}\right) \\ = \dfrac{1}{A_1} + \dfrac{\lambda}{2 A_1 A_2} + \dfrac{\lambda(\lambda+1)}{3!\, A_2 A_3} + \cdots \\ \qquad + \dfrac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-2)}{n!\, A_{n-1} A_n}. \end{cases}$$

Wenn die Polynome $A_n$ und $B_n$ von $z$ und $\lambda$ in der Form

$$A_n = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{n\nu} z^\nu$$

$$B_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{n,\nu} z^\nu$$

geschrieben werden, so genügen die Koeffizienten $\alpha$, $\beta$ nach (15) den Bedingungen

$$(19)\quad \begin{cases} n\,\alpha_{n\nu} = \alpha_{n-1,\nu-1} + (\lambda + 2n - 2)\,\alpha_{n-1,\nu} - \\ \qquad - (\lambda + n - 2)\,\alpha_{n-2,\nu} \\ n\,\beta_{n\nu} = \beta_{n-1,\nu-1} + (\lambda + 2n - 2)\,\beta_{n-1,\nu} - \\ \qquad - (\lambda + n - 2)\,\beta_{n-2,\nu} \end{cases}$$

Man verifiziert sofort, daß

$$(20)\qquad \alpha_{n\nu} = \frac{1}{\nu!}\binom{\lambda+n-1}{n-\nu}$$

die oberen Gleichungen befriedigt. Denn für $\nu = n$ folgt aus (19) $n\,\alpha_{nn} = \alpha_{n-1,n-1}$, daher ist

Digitized by Google

$$\alpha_{oo} = 1,\ \alpha_{11} = 1,\ \ldots\ \alpha_{nn} = \frac{1}{n!},$$

und für $\nu = n-1$ ist nach (19) zu erfüllen

$$n\,\alpha_{n,n-1} = \alpha_{n-1,n-2} + (\lambda + 2n - 2)\ \alpha_{n-1,n-1}$$

$$\alpha_{1,o} = \lambda\,\alpha_{o,o}$$

was durch

$$\alpha_{n,n-1} = \frac{\lambda + n - 1}{(n-1)!}$$

geschieht. Für $\nu \leq n-2$ ist aber nach der Annahme (20)

$$(\lambda + 2n - 2)\,\alpha_{n-1,\nu} - (\lambda + n - 2)\,\alpha_{n-2,\nu} =$$

$$= (\lambda + 2n - 2)\frac{(\lambda+\nu)\ldots(\lambda+n-2)}{(n-1-\nu)!\,\nu!} - \frac{(\lambda+\nu)\ldots(\lambda+n-2)}{(n-2-\nu)!\,\nu!}$$

$$= \frac{(\lambda+\nu)\ldots(\lambda+n-2)}{(n-1-\nu)!\,\nu!}(\lambda + n + \nu - 1)$$

und daher bei $\nu = o$

$$(\lambda + 2n + 2)\,\alpha_{n-1,o} - (\lambda + n - 2)\,\alpha_{n-2,o} =$$

$$= \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1)}{(n-1)!} = n\,\alpha_{n,o}$$

während bei $\nu > 0$

$$\alpha_{n-1,\nu-1} + (\lambda + 2n - 2)\,\alpha_{n-1,\nu} - (\lambda + n - 2)\,\alpha_{n-2,\nu} =$$

$$= \frac{(\lambda+\nu-1)\cdots(\lambda+n-2)}{(n-\nu)!\quad(\nu-1)!} + \frac{(\lambda+\nu)\cdots(\lambda+n-2}{(n-1-\nu)!\quad\nu!}\lambda + n + \nu - 1)$$

$$= \frac{(\lambda+\nu)\ldots(\lambda+n-2)}{(n-\nu)!\ \nu!}\left[\nu(\lambda+\nu-1) + (n-\nu)(\lambda+n+\nu-1)\right]$$

$$= \frac{(\lambda+\nu)\cdots(\lambda+n-2)}{(n-\nu)!\,\nu!}\,n(\lambda+n-1) = n\,\alpha_{n\nu}$$

ist, womit die Gleichungen (19) erfüllt erscheinen.

Die Größen $\beta_{n\nu}$ sind zunächst durch die Formeln

$$\beta_{n\nu} = \sum_{r=0}^{n-\nu-1} \alpha_{n,\nu+r+1}\,(-1)^r(\lambda^{|r}) \tag{21}$$

definierbar, wo für das Symbol $(\lambda^{|r})$



Digitized by Google

$$(\lambda^{|0}) = 1$$

$$(\lambda^{|1}) = \lambda \tag{22}$$

$$(\lambda^{|r}) = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+r-1) \text{ für } r > 1$$

gelten soll. Dann ist für $\nu > o$ nach (19) zu erfüllen

$$n \sum_{r=o}^{n-\nu-1} \alpha_{n,\nu+r+1}(-1)^r(\lambda^{|r}) =$$

$$= \sum_{r=o}^{n-\nu-1} \alpha_{n-1,\nu+r}(-1)^r(\lambda^{|r})$$

$$+(\lambda+2n-2)\sum_{r=o}^{n-\nu-2} \alpha_{n-1,\nu+r+1}(-1)^r(\lambda^{|r})$$

$$-(\lambda+n-2)\sum_{r=o}^{n-\nu-3} \alpha_{n-2,\nu+r+1}(-1)^r(\lambda^{|r}).$$

Vergleicht man die Koeffizienten von $(-1)^r(\lambda^r)$ links und rechts bei $r < n-\nu-1$, $r = n-\nu-1$, $r = n-\nu$

$$n\,\alpha_{n,\nu+r+1} \text{ und } \alpha_{n-1,\nu+r}+(\lambda+2n-2)\,\alpha_{n-1,\nu+r+1}-$$

$$-(\lambda+n-2)\,\alpha_{n-2,\nu+r+1}$$

$$n\,\alpha_{n,n-1} \text{ und } \alpha_{n-1,n-2}+(\lambda+2n-2)\,\alpha_{n-1,n-1}$$

$$n\,\alpha_{n,n} \text{ und } \alpha_{n-1,n-1}$$

so sieht man, daß dieselben nach (19) übereinstimmen.

Ferner liefert die zweite Gleichung (19) für $\nu = 0$ die Bedingung

$$n\,\beta_{n\,o}-(\lambda+2n-2)\,\beta_{n-1,0}+(\lambda+n-2)\,\beta_{n-2,0}=0$$

oder es muß

$$0 = n\sum_{r=0}^{n-1}\alpha_{n,r+1}(-1)^r(\lambda)^{|r}-$$

$$-(\lambda+2n-2)\sum_{r-0}^{n-2}\alpha_{n-1,r+1}(-1)^r(\lambda)^{|r}+$$

$$+(\lambda+n-2)\sum_{r=0}^{n-3}\alpha_{n-2,r+1}(-1)^r(\lambda)^{|r}$$

Digitized by Google

statthaben. Hier sind die Koeffizienten von $(\lambda^{|r})$ zwar nicht einzeln Null, die Gleichung ist aber dennoch erfüllt wegen

$$\sum_{r=0}^{n-1}\Big[n\,\alpha_{n,r+1}-(\lambda+2n-2)\,\alpha_{n-1,r+1}+$$

$$+(\lambda+n-2)\,\alpha_{n-2,r+1}\Big](-1)^r(\lambda^{|r})=$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}\alpha_{n-1,r}(-1)^r(\lambda^{|r})=\sum_{r=0}^{n-1}\binom{\lambda+n-2}{n-r-1}\frac{(-1)^r}{r!}(\lambda^r)=$$

$$=(\lambda^{|n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r}{(n-r-1)!\;r!}=0$$

Nun kann $\beta_{10}=1$, $\beta_{20}=\frac{\lambda}{2}+1$ direkt aus (13) und (15) bestimmt werden, während die Annahme (21) liefert

$$\beta_{10}=\alpha_{11}=1$$

$$\beta_{20}=\alpha_{21}-\lambda\,\alpha_{22}=\lambda+1-\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2}+1,$$

was übereinstimmt. Daher ist auch die Richtigkeit der Formeln (21) für die Größen $\beta$ gezeigt.

Die Koeffizienten der höchsten Potenzen von $z$ in $A_n$ und $B_n$ sind demnach

$$\alpha_{n,n}=\frac{1}{n!},\quad \alpha_{n,n-1}=\frac{\lambda+n-1}{1!\,(n-1)!}\,\alpha_{n,n-2}=\frac{(\lambda+n-1)(\lambda+n-2)}{2!\;(n-2)!}$$

$$\beta_{n,n-1}=\frac{1}{n!}$$

$$\beta_{n,n-2}=\frac{(n-1)(\lambda+n)}{n!}$$

$$\beta_{n,n-3}=\frac{n-2}{2}\frac{1}{n!}[(n-1)(\lambda+n)(\lambda+n-1)-2\lambda]$$

$$\beta_{n,n-4}=\frac{(n-2)(n-3)}{6}\frac{1}{n!}[(n-1)(\lambda+n-1)(\lambda+n-2)-$$

$$-6\lambda][\lambda+n].$$

Digitized by Google

Für die analytische Definition von $\Gamma(z, k)$ erhalten wir

$$e^z z^{-k} \Gamma(z, k) = \frac{\varphi_1(z, \lambda)}{\Gamma(\lambda)} = \lim_{n=\infty} \frac{B_n}{A_n}, \quad (23)$$

*)

und es stimmen $n!\, B_n$ und $n!\, A_n$ mit Zähler und Nenner des $(2n^{\text{ten}}$ Näherungsbruches des Kettenbruches (1) überein, worauf aber hier nicht weiter eingegangen werden soll.**)

Für die Abschätzung und den Vergleich der Größen $\beta_{n\nu}$ bei großem $n$ ist es von Vorteil $\beta_{n\nu}$ als Summe positiver Größen anzugeben und man kann hiezu eine Umformung anwenden, wonach die Größen $\beta_{n\nu}$ dargestellt werden durch

$$\beta_{n\nu} = \sum_{s=0}^{n-\nu-1} u^{s}_{n,\nu} (\lambda + n - s), \quad (24)$$

mit Koeffizienten $n^s{}_{n\nu}$ die nicht von $\lambda$ abhängen.

Um diese Darstellung zu finden, mache ich von der Bemerkung Gebrauch, daß die Entwicklung einer Funktion $F(t)$

$$F(t) = f_0(t) + t f_1(t) + t(t-1) f_2(t) + t(t-1)(t-2) f_3(t) + \quad (25)$$

in eine Reihe von der Form

$$u_0 + u_1 t + u_2 t(t-1) + u_3 t(t-1)(t-2) + \cdots$$

---

*) Da, wie leicht zu zeigen, $\varphi_n$ und $A_n$ für $n = \infty$ die Grenzwerte 0 und $\infty$ haben.

**) Ferner hat man gemäß (12) und (9)

$$z\varphi_{n+1}(z, \lambda - 1) = [A_{n-1}(z, \lambda) - A_n(z, \lambda)]\varphi_1(z, \lambda) - [B_{n-1}(z, \lambda) - B_n(z, \lambda)]\varphi_0(z, \lambda + 1)$$

und es kann also $\dfrac{\varphi_1(z, \lambda)}{\varphi_0(z, \lambda + 1)}$ auch durch

$$\lim_{n=\infty} \frac{B_{n-1}(z, \lambda) - B_n(z, \lambda)}{A_{n-1}(z, \lambda) - A_n(z, \lambda)}$$

dargestellt werden. Der Kettenbruch, dessen $2n^{\text{ter}}$ Näherungsbruch $B_n/A_n$ und dessen $2n-1^{\text{ter}}$ Näherungsbruch $B_{n-1} - B_n/A_{n-1} - A_n$ ist, lautet

$$\cfrac{1}{z + \lambda - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\lambda}{z + \cfrac{2}{1 + \cfrac{\lambda + 1}{z + \cfrac{3}{\cdots\cdots}}}}}}$$

Digitized by Google

bei der folgenden Bestimmung der Koeffizienten $u$ besteht

$$(26)\quad u_s = \frac{\Delta^s f_0(0)}{s!} + \frac{\Delta^{s-1} f_1(1)}{(s-1)!} + \cdots + \frac{\Delta f_{s-1}(s-1)}{1!} + f_s(s)$$

Nun ist nach (21)

$$\beta_{n\nu} = \sum_{r=0}^{n-\nu-1} \alpha_{n,\nu+r+1} (-1)^r (\lambda^{|r})$$

und wenn rechts $r = (n-\nu-1) - \rho$ gesetzt wird

$$\beta_{n\nu} = \sum_{\varrho=0}^{n-\nu-1} \alpha_{n,n-\varrho} (-1)^{n-\nu-1-\varrho} (\lambda^{|})^{n-\nu-1-\varrho}$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{n-\nu-1} \binom{\lambda+n-1}{\rho} \frac{1}{(n-\rho)} (-1)^{n-\nu-1-\varrho} (\lambda^{|})^{n-\nu-1-\varrho}$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{n-\nu-1} \frac{(\lambda^{\varrho}+n-\rho)}{\rho!\,(n-\rho)}! \; (-1)^{(n-\nu-1)-\varrho} (\lambda^{|})^{n-\nu-1-\varrho}$$

so ist die obige Umformung bei

$$t = \lambda + n - 1$$

$$f_\varrho(t) = \frac{1}{\rho!\,(n-\rho)}! \, (-1)^{n-\nu-1-\varrho} (\lambda^{|})^{n-\nu-1-\varrho}$$

durchzuführen. Daher liefert die Formel (26)

$$u'_{n,\nu} = \sum_{\sigma=0}^{s} \left[ \frac{\Delta^{s-\sigma} f_\sigma(t)}{(s-\sigma)!} \right]_{t=\sigma}$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{s} \frac{(-1)^{n-\nu-1-\sigma}}{\sigma!\,(n-\sigma)!} \left[ \frac{\Delta^{s-\sigma} (\lambda)^{|n-\nu-1-\sigma}}{(s-\sigma)!} \right]_{\lambda+n-1=\sigma}$$

und weil

$$\frac{\Delta^k (\lambda^r)}{k!} = \binom{r}{k} r-k \, (\lambda+k)$$

ist, folgt

$$u'_{n\nu} = \sum_{\sigma=0}^{s} \frac{(-1)^{n-\nu-1-\sigma}}{\sigma!\,(n-\sigma)!} \binom{n-\nu-1-\sigma}{s-\sigma} \left[ {}^{|n-\nu-1-s}_{(\lambda+s-\sigma)} \right]_{\lambda+n-1=\sigma}$$

Digitized by Google

$$= (1-n+s)^{\underline{n-\nu-1-s}} \sum_{\sigma=0}^{s} \frac{(-1)^{n-\nu-1-\sigma}}{\sigma!\,(n-\sigma)!} \binom{n-\nu-1-\sigma}{s-\sigma}$$

für $s \leq n-\nu-1$, während für $s > n-\nu-1$ der Koeffizient $u^{s}_{n\nu}$ gleich Null ist.

Nun ist für $s \leq n-\nu-1$

$$(1-n+s)^{\underline{n-\nu-1-s}} = (-1)^{n-\nu-1-s}\,(\nu+1)^{\underline{n-\nu-1-s}}$$

und somit

$$n!\,u^{s}_{n,\nu} = (\nu+1)^{\underline{n-\nu-1-s}}\,(-1)^{s} \sum_{\sigma=0}^{s} (-1)^{\sigma} \binom{n}{\sigma} \binom{n-\nu-1-\sigma}{s-\sigma}.$$

Weiters ist leicht nachzuweisen, daß

$$(-1)^{s} \sum_{\sigma=0}^{s} (-1)^{\sigma} \binom{n}{\sigma} \binom{n-\nu-1-\sigma}{s-\sigma} = \binom{\nu+s}{s} \tag{28}$$

ist, woraus die einfachen Beziehungen

$$n!\,u^{s}_{n\nu} = (\nu+1)^{\underline{n-\nu-1-s}} \binom{\nu+s}{s} \tag{29}$$

$$n!\,\beta_{n\nu} = \sum_{s=0}^{n-\nu-1} (\nu+1)^{\underline{n-\nu-1-s}} \binom{\nu+s}{s} (\lambda+n)^{\underline{s}} - s) \tag{30}$$

folgen. Statt derselben kann man auch, da

$$(\nu+1)^{\underline{n-\nu-1-s}} = \frac{(n-s-1)!}{\nu!}$$

$$\frac{(\nu+1)^{\underline{n-\nu-1-s}}}{n!} = \frac{(n-s-1)!}{\nu!\,n!} = \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{(n-s)^{\underline{s+1}}}$$

Die Formel für $\beta_{n\nu}$ in der eingangs erwähnten Form geben

$$\beta_{n\nu} = \frac{1}{\nu} \sum_{s=0}^{n-\nu-1} \binom{\nu+s}{s} \frac{(\lambda+n)^{\underline{s}} - s)}{(n-s)^{\underline{s+1}}} \tag{31}$$

Es möge noch bemerkt werden, daß $A_n$ und $B_n$ den linearen Differentialgleichungen in bezug auf $z$

$$z\,\frac{\partial^2 A_n}{\partial z^2} + (z+\lambda)\,\frac{\partial A_n}{\partial z} - n\,A_n = 0$$

Digitized by Google

$$z\frac{\partial^2 B_n}{\partial z^2}-(z+\lambda-2)\frac{\partial B_n}{\partial z}-(n+1)B_n+2\frac{\partial A_n}{\partial z}=0$$

genügen.

Die Schlömilchsche Entwicklung von $\int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}e^{-t}dt}{z+t}$ in eine Fakultätenreihe resultiert aus der Anwendung der Formel

$$\frac{1}{z+t}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^\nu}{\underset{(z)}{|\nu+1}}(t^{\underline{\nu}}-\nu+1)+\frac{(-1)^n}{\underset{(z)}{|n}}\frac{(t-n+1)^{\underline{n}}}{z+t} \tag{33}$$

wodurch die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}e^{-t}dt}{z+t}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^\nu}{\underset{(z)}{|\nu+1}}\int_0^\infty (t-\nu+1)^{\underline{\nu}}\,t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt+$$

$$+\frac{(-1)^n}{\underset{(z)}{|n}}\int_0^\infty \frac{(t-n+1)^{\underline{n}}}{z+t}t^{\lambda-1}e^{-t}dt$$

entsteht, die durch Einführung von

$$a_\nu=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty (t-\nu+1)^{\underline{\nu}}\,t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty\Big[(t-\nu+1)(t-\nu+2)\cdots t\Big]t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt \tag{34}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty (t-1)(t-2)\cdots(t-\nu+1)\,t^\lambda e^{-t}\,dt$$

in der Form

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty\frac{t^{\lambda-1}e^{-t}dt}{z+t}=\frac{1}{z}-\frac{a_1}{z(z+1)}+\frac{a_2}{z(z+1)(z+2)}-$$

$$-\cdots\frac{a_n}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}+ \tag{35}$$

$$+\frac{(-1)^n}{\underset{(z)}{n}}\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty (t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)\,t^\lambda e^{-t}\,dt$$

Digitized by Google

geschrieben werden kann. Es wird also die Schlömilchsche Entwicklung gültig sein, wenn

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\infty \frac{(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} \frac{t^\lambda e^{-t}}{z+t} dt = 0 \tag{36}$$

ist. Dieses Restintegral werde zerlegt in $\int_0^n$ und $\int_n^\infty$, von denen das erste wegen

$$|(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)| < (n-1)! \text{ bei } t \leq n$$

an Betrag kleiner ist als

$$\frac{(n-1)!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} \int_0^n \frac{t^\lambda e^{-t}}{z+t} dt,$$

was mit wachsendem $n$ beliebig klein wird. Es muß nun auch gezeigt werden, daß der zweite Teil des Restintegrales

$$\int_n^\infty \frac{(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} \frac{t^\lambda e^{-t}}{z+t} dt \tag{37}$$

für $n = \infty$ Null wird, und dieser Beweis fehlt bei Schlömilch.

Der Ausdruck (37) ist gleich $\frac{(n-1)!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}$ mal

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_n^\infty (t-1)(t-2)\cdots(t-n+1) \frac{t^\lambda e^{-t}}{z+t} dt \tag{38}$$

und es genügt zu zeigen, daß dieser Ausdruck für $\lim n = \infty$ Null wird. Wenn zur Abkürzung

$$\omega(t) = (t-1)(t-2)\cdots(t-n+1) \tag{39}$$

gesetzt wird und zunächst $\lambda < 1$ angenommen wird, in welchem Falle

$$\frac{t^\lambda}{z+t} < \frac{t}{z+t} < 1$$

ist, wird

$$\left| \frac{1}{(n-1)!} \int_n^\infty \omega(t)\, t^\lambda e^{-t} \frac{dt}{z+t} \right| < \frac{1}{(n-1)!} \int_n^\infty \omega(t)\, e^{-t} dt$$

Digitized by Google

und das letzte Integral kann durch partielle Integration berechnet werden.

$$\int_n^\infty \omega(t)\, e^{-t}\, dt = e^{-n}\left[\omega(n) + \omega'(n) + \cdots + \omega^{(n-1)}(n)\right].$$

Die Wurzeln von $\omega'(t) = 0$ mögen mit $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-2}$, die von $\omega''(t) = 0$ mit $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n-3}$ u. s. f. bezeichnet werden, dann ist

$$\omega'(t) = (n-1)(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_{n-2})$$
$$\omega''(t) = (n-1)(n-2)(t-\beta_1)(t-\beta_2)\cdots(t-\beta_{n-3})$$
$$\omega'''(t) = (n-1)(n-2)(n-3)(t-\gamma_1)(t-\gamma_2)\cdots(t-\gamma_{n-4})$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

und weil nach bekannten Sätzen der Algebra

$$\begin{array}{l|l} \alpha_1 > 1, \alpha_2 > 2, \cdots \alpha_{n-2} > n-2 & \alpha_{n-2} < n-1 \\ \beta_1 > 1, \beta_2 > 2, \cdots \beta_{n-3} > n-3 & \beta_{n-3} < \alpha_{n-2} \\ \gamma_1 > 1, \gamma_2 > 2, \cdots \gamma_{n-3} > n-4 & \gamma_{n-4} < \beta_{n-3} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

sein muß, sind $\omega'(n), \omega''(n), \cdots$ positiv und

$$\omega(n) = (n-1)!$$

$$\omega'(n) < (n-1)\left[(n-1)(n-2)\cdots\right] = \frac{n-1}{1}(n-1)!$$

$$\omega''(n) < (n-1)(n-2)\left[(n-1)(n-2)\cdots 3\right] =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}(n-1)!$$

$$\omega'''(n) < (n-1)(n-2)(n-3)\left[(n-1)(n-2)\cdots 4\right] =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}(n-1)!$$

$$\vdots$$

Somit ist

$$e^{-n}\left[\omega(n) + \omega'(n) + \cdots + \omega^{n-1}(n)\right] < e^{-n}(n-1)!\left[1 + \binom{n-1}{1} + \right.$$

$$\left. + \binom{n-1}{2} + \cdots \binom{n-1}{n-1}\right] \qquad < e^{-n}(n-1)!\, 2^{n-1}$$

Digitized by Google

und der Ausdruck (38) ist kleiner als

$$e^{-n}2^{n-1} < \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

was mit zunehmendem $n$ wieder klein wird.

Nun sei vorausgesetzt, daß für irgend einen Wert von $\lambda$ die Ungleichung

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_n^\infty t^{\lambda-1}\omega(t)\,e^{-t}\,dt < \left(\frac{2}{e}\right)^n n^{2\lambda} \tag{41}$$

bereits bewiesen sei, was für alle $\lambda < 1$ eben geschehen ist, dann braucht nur noch gezeigt zu werden, daß dann

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_n^\infty t^{\lambda}\omega(t)\,e^{-t}\,dt < \left(\frac{2}{e}\right)^n n^{2\lambda+2}$$

erfüllt ist. Es ist aber

$$\int_n^\infty t^{\lambda}\omega(t)\,e^{-t}\,dt = \Big[e^{-t}t^{\lambda}\,\omega(t)\Big]_{t=n}^{t=\infty} +$$

$$+\int_n^\infty e^{-t}\Big[t^{\lambda}\omega'(t) + \lambda\, t^{\lambda-1}\omega(t)\Big]dt$$

$$t\,\omega'(t) = t(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_{n-2})(n-1)$$

$$< t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+2)(n-1)$$

$$< \frac{t}{t-n+1}\,\omega(t)(n-1)$$

und weil für $t \geq n$

$$\frac{t}{t-n+1} < n$$

folgen die Relationen

$$t\,\omega'(t) < n(n-1)\,\omega(t) \text{ für } t \geq n$$

$$\int_n^\infty e^{-t}\,\omega'(t)\,t^{\lambda}\,dt < \int_n^\infty n(n-1)\,\omega(t)\,t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt$$

Digitized by Google

und weiter nach (41)

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_n^\infty t^\lambda \omega(t)\, e^{-t}\, dt < e^{-n} n^\lambda + \left[n(n-1)+\lambda\right]\left(\frac{2}{e}\right)^n n^{2\lambda}$$

$$< \left(\frac{2}{e}\right)^n n^{2\lambda+2}\left[\frac{1}{2^n n^{\lambda+2}} + \frac{n(n-1)+\lambda}{n^2}\right]$$

$$< \left(\frac{2}{e}\right)^n n^{2\lambda+2}$$

Ein Nachteil der Schlömilchschen Entwicklung ist übrigens, daß das Vorzeichen des Restintegrales nicht immer sofort angebbar ist, sondern von dem Werte des $\lambda$ abhängt.

Anmerkung: Dieser Aufsatz wurde der Redaktion im November 1905 vor dem Erscheinen des Buches von Nielsen über die Gammafunktion eingereicht.

Digitized by Google

# Notiz über die Kugelfunktionen.

Von **Niels Nielsen** in Kopenhagen.

Für die höheren Differentialquotienten der Funktion

$$y = (1 - x^2)^{-\nu} \tag{1}$$

wo $\nu$ eine von Null verschiedene, endliche Konstante bedeutet, ergibt die vollständige Induktion ohne Mühe einen Ausdruck von der Form

$$y^{(n)} = \frac{\Gamma(2\nu + n) \cdot f_n(x)}{\Gamma(2\nu) \cdot (1 - x^2)^{\nu + n}}, \tag{2}$$

wo $f_n(x)$ eine in $x$ ganze rationale Funktion von genau $n^{\text{tem}}$ Grade bedeutet, und zwar so, daß $x^n \cdot f_n(x)$ eine gerade Funktion sein muß, d. h.

$$f_n(x) = a_0^n x^n + a_1^n x^{n-2} + a_2^n x^{n-4} + \cdots \tag{3}$$

Eine weitere Differentiation der Identität (2) ergibt dann zur Bestimmung der Funktion $f_n(x)$ die gemischte Differential- und Differenzengleichung

$$(2\nu + n) f_{n+1}(x) = (2\nu + 2n) x f_n(x) + (1 - x^2) f_n^{(1)}(x), \tag{4}$$

woraus, indem man die Entwicklung (3) einführt, für die Koeffizienten $a$ die partielle Differenzengleichung

$$(2\nu + n) a_p^{n+1} = (2\nu + n + 2p) a_p^n + (n - 2p + 2) a_{p-1}^n. \tag{5}$$

Die allgemeine Auflösung dieser Gleichung ist nicht ganz leicht; für unseren Zweck brauchen wir aber nur den speziellen Fall, wo

$$a_0^0 = 1, a_p^0 = 0, a_{-p}^n = 0,$$

indem $p$ eine positive ganze Zahl bedeutet. Für kleinere Werte von $p$ findet man dadurch den Ausdruck

Digitized by Google

$$(6) \qquad a_p^n = \frac{1.3.5\cdots(2p-1)}{(2\nu+1)(2\nu+3)\cdots(2\nu+2p-1)} \cdot \binom{n}{2p}$$

und die vollständige Induktion ergibt dann, wegen der leicht zu verifizierenden Identität

$$(2\nu+n)(2p-1)\cdot\binom{n+1}{2p} = (2p-1)(2\nu+n+2p)\cdot\binom{n}{2p} +$$

$$+(n-2p+2)(2\nu+2p-1)\cdot\binom{n}{2p-2},$$

daß der Ausdruck (6) allgemein gültig ist, und somit ergibt sich für die Funktion $f_n(x)$ die Darstellung

$$(7) f_n(x) = x^n + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \binom{n}{2s} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{(2\nu+1)(2\nu+3)\ldots(2\nu+2s-1)} \cdot x^{n-2s}$$

oder, was offenbar dasselbe ist

$$8) \qquad f_n(x) = x^n \cdot F\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{n}{2}, \nu+\frac{1}{2}, \frac{1}{x^2}\right),$$

wo $F$ die gewöhnliche hypergeometrische Reihe bedeutet.

Nach dieser Erörterung ergibt sich also die Differentialformel

$$9) \quad D_x^n\left[(1-x^2)^{-\nu}\right] = \frac{\Gamma(2\nu+n)\cdot x^n}{\Gamma(2\nu)\cdot(1-x^2)^{\nu+n}} \cdot F\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{n}{2}, \nu+\frac{1}{2}, \frac{1}{x^2}\right),$$

von welcher der Spezialfall $\nu = \frac{1}{2}$ schon von Euler[1]) gefunden worden ist.

Aus (9) findet man nun weiter die etwas allgemeinere Formel

$$(10) D_x^n\left[(1-\alpha^2x^2)^{-\nu}\right] = \frac{\Gamma(2\nu+n)\cdot x^n\alpha^{2n}}{\Gamma(2\nu)\cdot(1-\alpha^2x^2)^{\nu+n}} \cdot F\left(\frac{1-n}{x}, -\frac{n}{2}, \nu+\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha^2x^2}\right),$$

von welcher Grunert[2]) und Luchterhand[3]) den Spezialfall $\nu = \frac{1}{2}$ entwickelt haben, offenbar ohne die Eulersche Formel zu kennen.

Wir gehen nunmehr von der bekannten Entwicklung

$$(11) \quad (1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty} P^{\nu,s}(x)\cdot\alpha^s, \; |\alpha| < |x \pm \sqrt{x^2-1}|$$

[1]) Institutiones calculi differentialis, p. 150; 1755.
[2]) Grunert, Archiv, Bd. 3, p. 236—248; 1843.
[3]) Grunert, Archiv, Bd. 4, p. 87—99; 1844.

Digitized by Google

aus, in der die $P$ die verallgemeinerten Kugelfunktionen bezeichnen, d. h.

$$(12) \qquad P^{\nu,n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+n-s)}{s!\,(n-2s)!} \cdot (2x)^{n-2s}.$$

Da nun die Formel (11) nach einer leichten Änderung auch folgendermaßen dargestellt werden kann

$$(1-x^2)^{-\nu}\left(1-\left(\frac{\alpha-x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2\right)^{-\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty} P^{\nu,s}(x)\cdot\alpha^s,$$

so ergibt eine $n$-malige Differentiation nach $\alpha$, wenn man dann $\alpha = 0$ setzt, wegen (10), die Reihenentwicklung

$$(13) \quad P^{\nu,n}(x) = \frac{\Gamma(2\nu+n)\cdot(1-x^2)^n}{\Gamma(2\nu)\,n!\,(ix)^n} \cdot F\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{n}{2}, \nu+\frac{1}{2}, \frac{x^2-1}{x^2}\right).$$

Die Annahme

$$\frac{x^2}{1-x^2} = -y^2,\ x^2 = -\frac{y^2}{1-y^2}$$

ergibt dann, wegen (13) und (8), nachdem man hinwiederum $x$ statt $y$ einführt, die Identität

$$(14) \qquad f_n(x) = \frac{\Gamma(2\nu)\,n!\,(1-x^2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(2\nu+n)\,i^n} \cdot P^{\nu,n}\left(\frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

so daß unsere Funktion $f_n(x)$, von einem einfachen Faktor abgesehen, nichts anderes ist, als eine verallgemeinerte Kugelfunktion; in dem einfacheren von Euler betrachteten Fall $\nu = \frac{1}{2}$ drücken sich die entsprechenden Funktionen demnach durch Legendresche Kugelfunktionen aus.

Wir erwähnen endlich, daß eine Kombination der beiden Formeln (14) und (2) die merkwürdige Differentialidentität

$$(15) \qquad P^{\nu,n}\left(\frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{i^n D_x^n\left[(1-x^2)^{-\nu}\right]}{n!\,(1-x^2)^{-\frac{n}{2}-\nu}}$$

liefert.

Diese letzte Formel ist vielleicht neu.

Digitized by Google

# Über eine Schar dreigliedriger algebraischer Gruppen der Ebene.

Von **Karl Carda** in Wien.

Wir stellen uns die folgende Aufgabe:

Es sind alle dreigliedrigen algebraischen Gruppen der Ebene zu bestimmen, welche mit der projektiven Gruppe

$$p \quad 2xp + yq \quad x^2 p + xyq$$

ähnlich sind.

Da die gesuchten Gruppen algebraisch sind, so sind in ihren endlichen Gleichungen

$$x_1 = f_1(x, y, a_1, a_2, a_3),$$
$$y_1 = f_2(x, y, a_1, a_2, a_3)$$

die Ausdrücke $f_1$ und $f_2$ bei beliebigen Werten der Parameter $a_1, a_2, a_3$ algebraische Funktionen von $x, y$. Hieraus folgt, daß auch alle infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppen algebraisch sind.

Um die Lösung der gestellten Aufgabe in Angriff zu nehmen, werden wir prüfen, ob jede mit der gegebenen projektiven Gruppe

$$(1) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_1 f &\equiv \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \mathfrak{X}_2 f &\equiv 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \mathfrak{X}_3 f &\equiv \xi^2 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{aligned}$$

ähnliche algebraische Gruppe

$$(2) \qquad \begin{aligned} X_1 f &\equiv \xi_1 p + \eta_1 q \\ X_2 f &\equiv \xi_2 p + \eta_2 q \\ X_3 f &\equiv \xi_3 p + \eta_3 q \end{aligned}$$

in die gegebene kanonische Gruppe vermöge einer algebraischen Transformation übergeführt werden kann oder nicht. In letzterem Falle ergeben sich gewisse Klassen von Gruppen von der Art, daß



Digitized by Google

zwei Gruppen, welche verschiedenen Klassen angehören, nur vermöge einer transzendenten Transformation in einander übergeführt werden können.

## 1.

Wir wollen voraussetzen, daß die infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppen bereits in allgemeinster Weise so gewählt sind, daß vermöge einer gewissen Punkttransformation jedes $X_i f$ gerade in $\mathfrak{X}_i f$ übergeht. Dann bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_1 f &= \mathfrak{X}_1 f \\ X_2 f &= \mathfrak{X}_2 f \\ X_3 f &= \mathfrak{X}_3 f. \end{aligned} \tag{3}$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf (1)

$$\mathfrak{x}^2 . X_1 f - \mathfrak{x} . X_2 f + X_3 f = 0. \tag{4}$$

Da diese Gleichung für jedes $f$ gilt, so zerfällt sie in

$$\begin{aligned} \xi_1 . \mathfrak{x}^2 - \xi_2 . \mathfrak{x} + \xi_3 &= 0 \\ \eta_1 . \mathfrak{x}^2 - \eta_2 . \mathfrak{x} + \eta_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Diese beiden Gleichungen können nicht äquivalent sein, denn sonst wären alle Determinanten

$$\begin{vmatrix} \xi_i & \xi_k \\ \eta_i & \eta_k \end{vmatrix} \equiv 0,$$

also wäre die gesuchte Gruppe intransitiv, während die gegebene kanonische Gruppe transitiv ist. Die gemeinsame Lösung der Gleichungen (5) kann sich offenbar auch nicht auf eine Konstante reduzieren.

Wir bestimmen die gemeinsame Lösung der Gleichungen (5)

$$\mathfrak{x} = \vartheta (x, y).$$

$\vartheta (x, y)$ hängt von $x$ und von $y$ algebraisch ab. Die Kurvenschar $\mathfrak{x} = C$ bleibt bei allen Transformationen der kanonischen Gruppe invariant. Also bleibt die Kurvenschar $\vartheta (x, y) = C$ bei der gesuchten Gruppe invariant. Wir wenden auf die Gleichung

$$\vartheta (x, y) = \mathfrak{x}$$

die Prozesse

$$X_i f = \mathfrak{X}_i f$$

an. Es ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_1 \vartheta &= \mathfrak{X}_1 \mathfrak{x} = 1 \\ X_2 \vartheta &= \mathfrak{X}_2 \mathfrak{x} = 2\mathfrak{x} = 2\vartheta \\ X_3 \vartheta &= \mathfrak{X}_3 \mathfrak{x} = \mathfrak{x}^2 = \vartheta^2. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Führen wir $\xi = \vartheta(x, y)$ als neue Variable an Stelle von $x$ in die Gruppe der $X_i f$ ein, so folgt vermöge einer algebraischen Transformation

$$
\begin{aligned}
X_1 f &\equiv \frac{\partial f}{\partial \xi} + \alpha(\xi, y)\frac{\partial f}{\partial y} \\
X_2 f &\equiv 2\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + \beta(\xi, y)\frac{\partial f}{\partial y} \\
X_3 f &\equiv \xi^2\frac{\partial f}{\partial \xi} + \gamma(\xi, y)\frac{\partial f}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

2.

Auf Grund der vorangehenden Betrachtungen können wir stets voraussetzen, daß in der gesuchten Gruppe

$$\xi_1 \equiv 1, \quad \xi_2 \equiv 2x, \quad \xi_3 \equiv x^2$$

ist. Es ist demnach das System zu untersuchen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \\
2x\frac{\partial f}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} &= 2\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial f}{\partial \eta} \\
x^2\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} &= \xi^2\frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Die Gleichungen (5) geben

$$
\begin{aligned}
\xi &= x, \\
\xi^2 . \alpha - \xi . \beta + \gamma &= 0.
\end{aligned}
$$

Für $\eta$ erhält man das System von Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha\frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0 \\
2x\frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta\frac{\partial \eta}{\partial y} &= \eta \\
x^2\frac{\partial \eta}{\partial x} + \gamma\frac{\partial \eta}{\partial y} &= \xi\eta.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Diese Gleichungen sind mit einander verträglich. Demnach genügt es, die beiden ersten Gleichungen allein zu betrachten. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\alpha\eta}{2x\alpha - \beta} \\
\frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{-\eta}{2x\alpha - \beta}.
\end{aligned}
$$



Digitized by Google

hieraus ergibt sich $\mathfrak{y}$ durch eine Quadratur

$$\log \mathfrak{y} = \int \frac{\alpha\, dx - dy}{2x\alpha - \beta}.$$

$\log \mathfrak{y}$ ist also ein Abelsches Integral in $x$, $y$. Der Integrand ist ein exaktes Differential auf Grund der aus der Relation

$$(X_1 X_2) \equiv 2 X_1 f$$

fließenden Gleichung

$$X_1 \beta - X_2 \alpha \equiv 2\alpha.$$

Die übrigen Klammerrelationen

$$(X_1 X_3) \equiv X_2 f$$
$$(X_2 X_3) \equiv 2 X_3 f$$

liefern nichts Neues.

Demnach hat jede Transformation, welche die beiden Systeme (7) in einander überführt, Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x, \int (P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy) \\ \mathfrak{y} &= e \end{aligned} \qquad (9)$$

3.

Wir wollen nunmehr die endlichen Transformationen der gesuchten Gruppen betrachten. Zu diesem Zwecke werden wir die endlichen Transformationen der kanonischen Gruppe bestimmen und so dann vermittels der Formeln (9) zu den endlichen Transformationen der gesuchten Gruppe übergehen.

Wir finden nach bekannten Regeln die endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppen

$$p: \begin{cases} x_1 = x + a \\ y_1 = y \end{cases}$$

$$2xp + yq: \begin{cases} x_1 = b^2 x \\ y_1 = b y \end{cases}$$

$$x^2 p + xyq: \begin{cases} x_1 = \dfrac{x}{1 - cx} \\ y_1 = \dfrac{y}{1 - cx}. \end{cases}$$

Somit lauten die endlichen Transformationen der gegebenen kanonischen Gruppe (1)

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{a + (b^2 - ac)\mathfrak{x}}{1 - c\mathfrak{x}},$$

$$\mathfrak{y}_1 = \frac{b\mathfrak{y}}{1 - c\mathfrak{x}}.$$

Digitized by Google

Also lauten die endlichen Transformationen der gesuchten Gruppe

$$(10)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a + (b^2 - a\,c)\,x}{1 - c\,x}, \\ \int_{x_1,y_1}(P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = \int_{x,y}(P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) + \\ \qquad + \log\dfrac{b}{1 - c\,x}. \end{cases}$$

Auf diese Form lassen sich die endlichen Transformationen der gesuchten Gruppen stets vermöge einer algebraischen Transformation bringen.

## 4.

Wir werfen nun die Frage auf, wann die dreigliedrige Gruppe (10) algebraisch ist. Die dreigliedrige Gruppe läßt die Kurvenschar $x = C$ invariant. Wir wollen alle Transformationen der Gruppe betrachten, welche die willkürlich gewählte Gerade $x = k$ der Schar in Ruhe lassen. Dieselben bilden eine zweigliedrige Untergruppe der dreigliedrigen Gruppe (10). Die einzelnen Punkte der Geraden $x = k$ werden höchstens zweigliedrig unter einander vertauscht.

Zur Bestimmung der Untergruppe setzen wir

$$k = \frac{a + (b^2 - a\,c)\,k}{1 - c\,k} \equiv a + \frac{b^2 k}{1 - c\,k}.$$

Ferner setzen wir

$$(11)\qquad \int_{x,y}(P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) \equiv u(x,y).$$

Die Gruppe, vermöge welcher die Punkte der Geraden $x = k$ unter einander vertauscht werden, ist die folgende

$$u(k, y_1) = u(k, y) + \log\frac{b}{1 - c\,k}.$$

Diese Gruppe ist nur eingliedrig. Wir können sie daher kurz schreiben

$$(12)\qquad u(k, y_1) = u(k, y) + t.$$

Diese Gruppe muß für jedes $k$ algebraisch sein. Es ist infolge Gleichung (11)

$$\frac{\partial\,u(k,y)}{\partial\,y} \equiv Q(k,y).$$

Digitized by Google

Also

$$u(k, y) \equiv \int_{y_0}^{y} Q(k, y)\, d\, y + C,$$

$$u(k, y_1) \equiv \int_{y_0}^{y_1} Q(k, y)\, d\, y + C.$$

Demnach wird die Gleichung (12)

$$\int_{y_0}^{y_1} Q(k, y)\, d\, y = \int_{y_0}^{y} Q(k, y)\, d\, y + t. \tag{13}$$

Diese Gleichung soll nun für jedes $k$ eine algebraische Gruppe darstellen. Dann muß bekanntlich $Q(k, y)$ in bezug auf $y$ vom Geschlechte Null oder Eins sein. Man kann stets vermöge einer algebraischen Transformation erreichen, daß $Q$ eine der drei Formen gewinnt

$$\text{I.} \quad Q \equiv 1$$

$$\text{II.} \quad Q \equiv \frac{1}{y}$$

$$\text{III.} \quad Q \equiv \frac{1}{\sqrt{y(1-y)(1-\vartheta(k)\, y)}}.$$

In dem letzten Ausdrucke bezeichnet $\vartheta(k)$ eine algebraische Funktion von $k$.

## 5.

Wir setzen zunächst voraus, daß man durch eine passende algebraische Transformation erreicht habe, daß

$$Q(x, y) \equiv 1.$$

Dann ist

$$u(x, y) \equiv y + X(x),$$

$$u(x_1, y_1) \equiv y_1 + X(x_1).$$

Hierin bezeichnet $X(x)$ ein Abelsches Integral,

$$X(x) \equiv \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\, d\, z.$$

Die Gleichungen (10) gehen über in

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a + (b^2 - a\, c)\, x}{1 - c\, x}, \\ y_1 + X(x_1) = y + X(x) + \log \dfrac{b}{1 - c\, x}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Es soll $y_1$ von $x$ und von $y$ algebraisch abhängen. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß eine Identität von der Form besteht

$$(14) \qquad \int_{x_0}^{\frac{a+(b^2-ac)x}{1-cx}} \alpha(z)\,dz \equiv \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\,dz - \log(1-cx) + A(x; a, b, c).$$

Hierin bezeichnet $A$ eine algebraische Funktion von $x$.

In dieser Gleichung lassen wir nun $b$ und $c$ in willkürlicher Weise nach Null konvergieren. Es kommt

$$\int_{x_0}^{a} \alpha(z)\,dz \equiv \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\,dz + A(x; a, 0, 0).$$

Hieraus ergibt sich, daß das Abelsche Integral $X(x)$ eine algebraische Funktion von $x$ darstellen muß. Mithin besitzt die Funktionalgleichung (14) bei willkürlichem Werte von $c$ keine Lösung der verlangten Art.

6.

Wir betrachten nunmehr den Fall

$$Q(x, y) \equiv \frac{1}{y}.$$

Die endlichen Gleichungen der Gruppe lauten

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a+(b^2-ac)x}{1-cx}, \\ \log y_1 + X(x_1) = \log y + X(x) + \log \dfrac{b}{1-cx}. \end{cases}$$

Damit die Gruppe algebraisch wird, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\int_{x_0}^{\frac{a+(b^2-ac)x}{1-cx}} \alpha(z)\,dz \equiv \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\,dz + \log A(x; a, b, c).$$

Lassen wir wieder $b$ und $c$ in willkürlicher Weise nach Null konvergieren, so folgt

$$\int_{x_0}^{a} \alpha(z)\,dz \equiv \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\,dz + \log A(x; a, 0, 0).$$

Das Abelsche Integral $X(x)$ ist also der Logarithmus einer algebraischen Funktion,

$$X(x) \equiv \log \mathfrak{A}(x).$$

Digitized by Google

Es kommt

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a + (b^2 - a\,c)\,x}{1 - c\,x} \\ y_1\,\mathfrak{A}(x_1) = y\,\mathfrak{A}(x) \cdot \dfrac{b}{1 - c\,x}. \end{cases}$$

Durch die algebraische Transformation

$$\begin{aligned} x &= \xi \quad , \quad x_1 = \xi_1 \\ y\,\mathfrak{A}(x) &= \eta \quad , \quad y_1\,\mathfrak{A}(x_1) = \eta_1 \end{aligned}$$

erhalten wir die kanonische Gruppe (1)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{a + (b^2 - a\,c)\,\xi}{1 - c\,\xi} \\ \eta_1 &= \frac{b\,\eta}{1 - c\,\xi}. \end{aligned}$$

7.

Es erübrigt noch die Betrachtung des Falles

$$Q(x, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{y\,(1 - y)\,(1 - \vartheta(x)\,y)}}.$$

Es wird

$$u(x, y) \equiv \int \frac{d\,y}{\sqrt{y\,(1 - y)\,(1 - \vartheta(x)\,y)}} + X(x).$$

Da $u(x, y)$ ein Abelsches Integral in $x, y$ sein soll, so muß der Ausdruck

$$\vartheta'(x) \cdot \int \frac{d\,y}{(1 - \vartheta(x)\,y)\,\sqrt{y\,(1 - y)\,(1 - \vartheta(x)\,y)}}$$

von $x$ und von $y$ algebraisch abhängen. Das Integral ist aber bei willkürlicher Wahl von $\vartheta(x)$ keine algebraische Funktion von $y$. Hieraus schließt man

$$\vartheta'(x) \equiv 0,$$

also ist $\vartheta(x)$ eine Konstante. Setzen wir

$$y\,(1 - y)\,(1 - C\,y) \equiv f(y),$$

so lauten die endlichen Gleichungen der Gruppe

$$(15)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a + (b^2 - a\,c)\,x}{1 - c\,x} \\ \displaystyle\int_{y_0}^{y_1} \frac{d\,z}{\sqrt{f(z)}} + \int_{x_0}^{x_1} \alpha(z)\,d\,z = \int_{y_0}^{y} \frac{d\,z}{\sqrt{f(x)}} + \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\,d\,z + \log\frac{b}{1 - c\,x}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Wir setzen zunächst

$$\log b = \int_{y_0}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$$

und wollen dann die drei in der Gleichung (15) auftretenden elliptischen Integrale erster Gattung auf Grund des Additionstheorems derselben zu einem einzigen Integral zusammenfassen. Es folgt die Identität

$$\int_{y_0}^{\varphi(x;a,b,c,y_0)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \equiv \int_{x_0}^{x} \alpha(z)\,dz - \int_{x_0}^{\frac{a+(b^2-ac)x}{1-cx}} \alpha(z)\,dz - \log(1-cx). \tag{16}$$

Wir lassen nun $b$ und $c$ nach Null konvergieren. Es ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x} \alpha(z)\,dz \equiv \int_{y_0}^{\varphi(x;a,0,0,y_0)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} + \int_{x_0}^{a} \alpha(z)\,dz.$$

Demnach erhalten wir aus (16) die folgende Identität

$$\int_{y_0}^{\varphi(x;a,b,c,y_0)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \equiv \int_{y_0}^{\varphi(x;a,0,0,y_0)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} - \int_{y_0}^{\varphi\left(\frac{a+(b^2-ac)x}{1-cx};a,0,0,y_0\right)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} - \log(1-cx).$$

Vermöge des Additionstheorems vereinfacht sich die Identität zu der folgenden

$$\int_{y_0}^{\psi(x;c,y_0)} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \equiv \log(1-cx),$$

wo $\psi$ in $x$ algebraisch ist. Diese Identität ist aber für willkürliche Werte von $c$ unmöglich, so lange das algebraische Gebilde $\sqrt{f(z)}$ nicht ausartet. Die Funktionalgleichung (15) besitzt also keine Lösung der verlangten Art.

Hiemit ist die gestellte Aufgabe erledigt. Wir gelangen zu folgendem Theorem:

Jede algebraische mit der projektiven Gruppe

$$\left|\begin{array}{ccc} p & 2xp+yq & x^2p+xyq \end{array}\right|$$

ähnliche Gruppe läßt sich in diese vermöge einer algebraischen Transformation überführen.[1])

[1]) Man vergl. Monatshefte für Mathematik und Physik Bd. 11, p. 54—55.

Digitized by Google

# Über gewisse lineare Transformationen.

Von **Otto Biermann** in **Brünn.**

Im Folgenden soll die analytische Form gewisser linearer Transformationen abgeleitet werden, durch die ein ebener kreisförmiger Bereich in einen seiner Ebene angehörigen, gleich großen, von außen berührenden Bereich von gleicher Form transformiert wird, wozu die in der Zeitschrift für Mathematik und Physik (1906) behandelte Aufgabe die Veranlassung gegeben hat, nämlich auf eine Kreisfläche eine vorgegebene Anzahl gleicher, einander nur berührender Kreisflächen so zu legen, daß ein möglichst kleiner Teil der ersten Fläche unbedeckt bleibe.

Dabei werden allerdings auch wohlbekannte Dinge mit zur Sprache kommen müssen.

In einer Ebene, wo rechtwinklige Koordinatenachsen, eine $x$- und eine $y$-Achse, vorliegen, deute man die komplexe Variable

$$z = x + iy,$$

bezeichne den zu $z$ konjugierten Wert mit $z_0$ und schreibe die Gleichung des Kreises $(r)$ um die Stelle $(p, q)$ in der Form:

$$z z_0 + (-p + q i) z + (-p - q i) z_0 + p^2 + q^2 - r^2 = 0.$$

Dann stellt eine Gleichung

$$A z z_0 + B z + B_0 z_0 + C = 0,$$

wenn $A$ und $C$ reell, $B$ und $B_0$ konjugiert komplexe Größen sind, den Kreis dar, dessen Mittelpunkt die rechtwinkligen Koordinaten hat,

$$p = -\frac{B + B_0}{2A}, \quad q = \frac{B - B_0}{2iA},$$

und für dessen Radius $r$ gilt

$$p^2 + q^2 - r^2 = \frac{B B_0}{A^2} - r^2 = \frac{C}{A},$$

so daß folgt

$$r = \frac{1}{A}\sqrt{B B_0 - A C}.$$

Digitized by Google

Die Gleichung des Kreises geht durch eine lineare Transformation

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

in der die reellen oder komplexen Koeffizienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit so gewählt seien, daß

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist, denn anderenfalls lieferte die Division aller Koeffizienten durch $\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}$ neue Koeffizienten $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ in der Beziehung

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

wieder in einen Kreis über.

In der Tat, die transformierte Gleichung heißt nach Entfernung der Nenner

$$\begin{aligned}
&A(\alpha z + \beta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0) + B(\alpha z + \beta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) + \\
&+ B_0(\alpha_0 z_0 + \beta_0)(\gamma z + \delta) + C(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) \equiv \\
&\equiv (A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0) z z_0 + \\
&+ (A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0) z + \\
&+ (A\alpha_0\beta + B\beta\gamma_0 + B_0\alpha_0\delta + C\gamma_0\delta) z_0 + \\
&+ (A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0) = 0,
\end{aligned}$$

und die hier vorkommenden Koeffizienten sind von der Beschaffenheit derer in der Gleichung des Kreises; der erste und letzte Koeffizient, die mit $A'$ und $C'$ bezeichnet seien, sind reell, und der zweite und dritte Koeffizient sind konjugiert imaginäre Größen und seien mit $B'$ und $B_0'$ bezeichnet.

Danach wird also tatsächlich, wie bekannt, ein Kreis in einen Kreis transformiert.

Bei der linearen Transformation bleiben nur zwei Stellen invariant, indem die Beziehung

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = z$$

oder die äquivalente

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0$$

außer dann, wenn in dieser Gleichung alle Koeffizienten verschwinden und die allgemeine Transformation in die identische Substitution $(z, z)$ übergeht, nur für zwei $z$-Werte erfüllt wird. Durch die identische Substitution geht natürlich jeder Kreis in sich über.

Digitized by Google

Will man jedoch nur einen bestimmten Kreis in sich übergehen sehen, so daß den Punkten seiner Peripherie wieder solche entsprechen, so hat man die Beziehungen

$$A' : B' : B'_0 : C' = A : B : B_0 : C$$

zu erfüllen, womit drei Gleichungen für die Verhältnisse der vier Transformationskoeffizienten angegeben sind. Indessen nun anderwärts diejenigen Transformationen den Gegenstand eingehender Untersuchungen bildeten, die die zu einer Geraden oder die zu einem Kreise orthogonalen Kreise in einander überführen, sollen uns hier solche Transformationen beschäftigen, die eine Kreisfläche in eine gleich große, von außen berührende, überführen.

Will man die Transformationen der verlangten Eigenschaft allgemein bilden, so hat man erstens auszudrücken, daß ein Kreis $(r)$ in einen gleich großen übergehe, d. h. es muß

$$r' = \frac{1}{A'}\sqrt{B'B'_0 - A'C'} = \frac{1}{A}\sqrt{BB_0 - AC} = r$$

werden. Doch weil

$$B'B'_0 - A'C' = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0)(BB_0 - AC) = BB_0 - AC$$

ist, soll

$$A' = A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0 = A$$

gelten, wo nur das positive Zeichen eingeführt wurde, weil die Verkehrung der Zeichen aller Koeffizienten in der vorgegebenen Gleichung des Kreises eine Veränderung des Zeichens von $A'$ zur Folge hat.

Ferner soll aber eine gegebene Kreisfläche auch in eine außen berührende übergehen. Wenn nun die rechtwinkligen Koordinaten des Mittelpunktes des transformierten Kreises

$$p' = -\frac{B' + B'_0}{2A'},\ q' = \frac{B' - B'_0}{2iA}$$

lauten, so soll für die Koeffizienten der verlangten Transformation die folgende Relation bestehen:

$$(2p'A' - 2pA)^2 + (2q'A' - 2qA)^2 = 16(BB_0 - AC)$$

oder

$$BB_0 + B'B'_0 - BB'_0 - B_0B' = 4(BB_0 - AC).$$

Man sieht, daß man außer den bisherigen zwei Bedingungen an die Koeffizienten der Transformation noch eine Forderung knüpfen kann, etwa die, daß die invarianten Punkte zusammenfallen, also daß

Digitized by Google

$$(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = (\delta + \alpha)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) =$$
$$= (\delta + \alpha)^2 - 4$$

gleich null wird.

Umgekehrt beachte man erstens, daß ein Kreis, der durch die zwei invarianten Punkte einer linearen Transformation hindurchgeht, in einen Kreis derselben Eigenschaft transformiert wird, aber ein anderer Kreis in einen Kreis übergeht, dessen Schnittpunkte mit dem ersten nicht in besonderer Beziehung zu den invarianten Punkten der Transformation stehen; und beachte zweitens, daß man einen Kreis mit der Gleichung

$$A z z_0 + B z + B_0 z_0 + C = 0$$

in einen vorgelegten anderen schneidenden Kreis mit der Gleichung

$$\overline{A} z z_0 + \overline{B} z + \overline{B}_0 z_0 + \overline{C} = 0$$

durch Substitutionen überführen wird, von denen jede die Gestalt annimmt:

$$\frac{t - b}{t - c} = K \frac{z - b}{z - c},$$

deren invariante Punkte $b$ und $c$ mit den Schnittpunkten der ineinander zu transformierenden Kreise zusammenfallen können und sollen.

Danach wird man auch im Falle, daß die Schnittpunkte der beiden Kreise zusammenfallen, diejenigen Transformationen bevorzugen, deren invariante Punkte beide in den Berührungspunkt der ineinander zu transformierenden Kreisflächen fallen.

Wenn man danach die Substitutionen ermittelt, bei denen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist, und die den zweifachen invarianten Punkt

$$a = a' + i a'' = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma}$$

auf dem Kreise $(r)$ um die Stelle $(p, q)$ besitzen, so daß

$$(\alpha + \delta)^2 - 4 = 0, \quad \alpha - \delta = 2\gamma a$$

ist, so erhält man

$$\gamma = K = K' + i K''$$

setzend die Substitutionen, die den Kreis $(r)$ um die Stelle $(p, q)$ in einen in dem Punkte $a$ innen oder außen berührenden gleichgroßen Kreis überführen, in der Gestalt:

$$t = \frac{z(\pm 1 + aK) - a^2 K}{zK + (\pm 1 - aK)},$$

Digitized by Google

oder in der Form

$$\frac{1}{t-a} = \frac{1}{z-a} \pm K.$$

Diese zwei Substitutionen kommen aber auf eine hinaus, indem $K$ entgegengesetzter Werte fähig ist. Wir wollen das positive Zeichen beibehalten.

Nunmehr aber ergibt sich die Bedingung

$$A' = A,$$

unter der der Kreis $(r)$ um die Stelle $(p, q)$ in einen in $a$ berührenden gleichgroßen Kreis übergeht, in der Gestalt:

$$(a' - p)\, K' = (a'' - q)\, K''.$$

Wenn man somit die Träger von $p + iq$ und $a' + ia'' = a$ verbindet, durch den Punkt $O(o, o)$ eine Parallele legt und auf diese in $O$ eine Senkrechte fällt, dann aber auch noch deren Spiegelbild gegenüber der $y$-Achse bildet, so enthält diese Gerade den Träger von $K$.

Nunmehr hat man aber noch zu verlangen, daß der Kreis $(r)$ um die Stelle $(p, q)$ nicht in sich selbst, sondern in den Kreis $(r)$ um $(2a' - p,\ 2a'' - q)$ transformiert werde. Man hat also in letzterem Falle

$$\frac{B'}{A'} = \frac{1}{A}(A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0) =$$

$$= -2a' + p + i(2a'' - q),$$

$$\frac{C'}{A'} = \frac{1}{A}(A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0) =$$

$$= (2a' - p)^2 + (2a'' - q)^2 - r^2$$

zu setzen, wobei

$$A = 1,\ B = -p + iq,\ C = p^2 + q^2 - r^2$$

$$\alpha = 1 + aK,\ \beta = -a^2 K,\ \gamma = K,\ \delta = 1 - aK$$

ist.

Anstatt aber hier die noch bestehende Relation zwischen $K$ und $K''$ zu ermitteln, wollen wir die Bestimmung der unserer Forderung entsprechenden Größen $K$ darauf gründen, daß durch die Transformation der verlangten Art jeder Punkt der ersten Kreisfläche, insbesondere also der bei jedem Werte von $r$ im Kreise befindliche Mittelpunkt $p + iq$ in einen Punkt

$$\overline{t} = \overline{t}' + i\overline{t}''$$

Digitized by Google

übergehen soll, für den

$$| p + i q - \bar{t} | - r > 0$$

ist. Hier bedeutet:

$$\bar{t} = \frac{(p+iq)[1+(K'+iK'')(a'+ia'')] - (a'+ia'')^2(K'+iK'')}{(p+iq)(K'+iK'') + [1-(K'+iK'')(a'-ia'')]}$$

und danach führt die Forderung

$$(\bar{t}' - p)^2 + (\bar{t}'' - q)^2 - r^2 > 0,$$

wenn noch

$$p - a' = m,\ q - a'' = n$$

genannt wird, auf die Ungleichung

$$[(m^2 - n^2)K' - 2mnK'']^2 + [(m^2 - n^2)K'' + 2mnK']^2 - \\ - r^2(1 + mK' + nK')^2 > 0,$$

wo aber $m^2 + n^2 = r^2$ einzuführen ist.

Die Gesamtheit der Punkte $(K', K'')$, für die diese Ungleichung besteht, ist also von der Gesamtheit von Punkten, wo $(\bar{t}' - p)^2 + (\bar{t}'' - q)^2 - r^2 < 0$ ist, durch die Punkte der Kurve getrennt, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten $K'$, $K''$ folgendermaßen zu schreiben ist:

$$K'^2 m^2 - 2mnK'K'' + K''^2 n^2 - 2nK' - 2mK'' - 1 = 0.$$

Diese Kurve zerfällt nicht, denn die Determinante ihrer Gleichung ist $-r^4$. Sie stellt eine Parabel dar, deren Brennpunkt in den Punkt $O(o, o)$ fällt, wo das Gleichungspolynom kleiner als null ist, und der Scheitel besitzt Koordinaten:

$$-\frac{n}{2r^2},\ -\frac{m}{2r^2}.$$

Die Hauptachse hat die Gleichung

$$K'n = K'm.$$

Danach ergibt sich, daß unsere Kreisfläche $r$ um die Stelle $(p, q)$ dann durch die Substitution

$$\frac{1}{t-a} = \frac{1}{z-a} + K$$

in eine gleich große in der Stelle $a$ von außen berührende Kreisfläche übergeht, wenn $K$ seinen Träger in einem solchen Punkte der Geraden $nK'' = mK'$

Digitized by Google

hat, der in dem den Brennpunkt nicht einschließenden Intervalle zwischen dem Scheitel der früheren Parabel und dem Punkte Unendlich liegt, denn der Betrag von $K$ muß jetzt die Größe $\frac{1}{2r}$ überschreiten; aber der frühere Kreis geht in einen gleich großen an der Stelle $a$ innen berührenden, also in sich selbst über, wenn $K$ in einem solchen Punkte derselben Geraden seinen Träger hat, der in dem den Brennpunkt enthaltenden Intervalle zwischen dem Scheitel und dem Punkte Unendlich liegt.

Damit sind die zuletzt verlangten Transformationen gekennzeichnet.

Digitized by Google

# Bedeutende Preisermäßigung!

Im Besitze der gesamten Vorräte, bieten wir folgende in Fachkreisen bestens bekannte und berühmte Zeitschrift zu sehr ermäßigten Preisen an:

# Archiv der Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von **A. Grunert,** fortgesetzt von **R. Hoppe.**

I. Reihe: Band 1—2, 9—19, 21—25, 27—48 und 51—70 (1841—1883).

II. Reihe: Band 1—17 (1884—1899).

Registerhefte: I zu Band 1—25; II zu Band 26—40; III zu Band 41—54; IV zu Band 55—70.

(Die Bände 3—8, 20, 26 und 49—50 sind vergriffen und nicht mehr zu haben).

Wir offerieren bis auf Wiederruf, da spätere Preiserhöhung vorbehalten sobald ein bestimmter Vorrat verkauft ist:

**1 Exemplar aller vorrätigen 77 Bände mit den 4 Registerheften** statt des Ladenpreises von **950 Kronen** für **250 Kronen.**

Einzelne Bände der I. Reihe für **4 Kronen.**

Einzelne Bände der II. Reihe für **6 Kronen.**

Die bedeutendsten Mathematiker und Physiker unserer Zeit zählen zu den Mitarbeitern dieses seit 65 Jahren erscheinenden Archivs, das hauptsächlich den Bedürfnissen der Mittelschulprofessoren entgegenkommt.

Wir empfehlen deshalb ganz speziell den Gymnasial- und Realschulbibliotheken die Gelegenheit zu benützen, etwa fehlende Bände zu ergänzen oder wo das Archiv in der betreffenden Bibliothek noch fehlt, alle 77 Bände anzuschaffen.

Bestellungen beliebe man an uns selbst oder an jede beliebige Buchhandlung zu richten.

**J. Eisenstein & Co.**

Buchhandlung u. Antiquariat,

**Wien, IX/3, Währingerstr. 2.**


Digitized by Google

TESCHEN.
K. u. K. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska.

Digitized by Google

*XVII. Jahrgang 1906.* *4. Vierteljahr.*

Stanford Univer
N
22
19

# MONATSHEFTE

FÜR

# MATHEMATIK UND PHYSIK.

---

MIT UNTERSTÜTZUNG DES

HOHEN K. K. MINISTERIUMS FÜR KULTUS UND UNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN VON

G. v. ESCHERICH, F. MERTENS und W. WIRTINGER

IN WIEN.

WIEN, 1906.

VERLAG DES MATH. SEMINARS DER UNIVERSITÄT WIEN.

IM BUCHHANDEL DURCH J. EISENSTEIN & CO. IN WIEN.

*Bezugspreis: Jährlich 14 K.*

Digitized by Google

# Inhaltsverzeichnis.


Seite

*Waelsch, Emil,* Über mehrfache Vektoren und ihre Produkte sowie deren Anwendung in der Elastizitätstheorie . . . . . 241

*Nielsen, Niels,* Notiz über eine allgemeine Integralformel . . . . . 281

*Zindler, Konrad,* Zur Differentialgeometrie der Linienkomplexe . . . . . 287

*Hahn, Hans,* Über das allgemeine Problem der Variationsrechnung . . . 295

*Eberhard, V.,* Ein Beitrag zur Tetraederlehre . . . . . 305

*Ernst, Paul,* Über das Küppersche Konoid . . . . . 309

*Mack, Karl,* Das Berührungsproblem für die allgemeine Regelschraubenfläche 314


## Literaturberichte.


*Zetzsche, K. Ed., Prof. Dr.* Ebene und räumliche Geometrie . . . . . 49

*Couturat, Louis,* L'Algèbre de la logique . . . . . 49

*Weber, Heinrich, Wellstein, Josef,* und *Jacobsthal, Walther,* Enzyklopädie der Elementarmathematik . . . . . 50

*Haußner, Robert,* Darstellende Geometrie . . . . . 52

*Schütte, Fritz,* Anfangsgründe der darstellenden Geometrie . . . . . 52

*Amodeo, Federigo, Prof.,* Lezioni di Geometria proiettiva . . . . . 53

*Brunn, Hermann,* Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie . . . . . 54

*Jahnke, E., Dr.,* Vorlesungen über die Vektorenrechnung . . . . . 56

*Liebmann, Heinrich,* Nichteuklidische Geometrie . . . . . 57

*Vonderlinn, J., Prof.,* Parallelperspektive . . . . . 59

*Tapla, Theodor,* Grundzüge der niederen Geodäsie . . . . . 60

*Arnaudeau, A.,* Tables des intérêts composés, annuités et amortissements pour des taux variant de dixièmes en dixièmes et des époques variant de 100 à 400 suivant les taux . . . . . 60

*Classen, J.,* Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes . . . . . 60

*Abraham, Henri,* et *Langevin, Paul,* Les quantités élémentaires d'Électricité; Jons, Électrons, Corpuscules . . . . . 61

*Linders, Olof,* Zur Klarstellung der Begriffe Masse, Gewicht, Schwere und Kraft . . . . . 61

*Börnstein, R., Dr.,* Leitfaden der Wetterkunde . . . . . 62

*Pfaundler, Leop.,* Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie . 62

*Lodge, Oliver,* Sur les Électrons . . . . . 62

*Lindelöf, Ernst,* Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions . . . . . 63

*Dedekind, Richard,* Stetigkeit und irrationale Zahlen. 3. Aufl. . . . . 64


Digitized by Google

# Über mehrfache Vektoren und ihre Produkte sowie deren Anwendung in der Elastizitätstheorie. [1]

Von **Emil Waelsch** in Brünn.

Man kann einer binären quadratischen Form einen Vektor zuordnen und einer Form $2\nu^{ter}$ Ordnung entsprechend ihren Zerlegungen in quadratische Faktoren ein System von assoziierten $\nu$-fachen Vektoren, Polyvektoren oder Vielbeinen $\nu^{ter}$ Ordnung, die aus $\nu$ gleichlangen, von einem Punkte $O$ ausgehenden Vektoren bestehen. [2] Unter gewissen Bedingungen ist eines dieser assoziierten Vielbeine der Form reell, d. h. seine sämtlichen Teilvektoren sind reell. Werden reelle Vielbeine, die sich nur in einer geraden Anzahl ihrer Richtungen unterscheiden, als gleich angesehen, so bestimmen sich Form und Vielbein gegenseitig und eindeutig. Es kann, von der Addition ihrer Formen ausgehend, eine Addition reeller Vielbeine definiert werden, welche die formalen Gesetze der algebraischen Addition befolgt.

Die Überschiebungen der Formen zweier reellen Vielbeine liefern neue reelle Vielbeine, die als Produkte der gegebenen Vielbeine bezeichnet werden können. Alle für die Gruppe der Drehstreckungen invarianten reellen Vielbeine mehrerer reellen Vielbeine, die ganz und rational in den gegebenen Vielbeinen sind, lassen sich durch alleinige Anwendung von solchen Produktbildungen aus den gegebenen Vielbeinen ableiten. Werden die gegebenen Vielbeine in ihre Teilvektoren zerlegt, so läßt sich auch jedes dieser invarianten Vielbeine durch die gewöhnlichen skalaren, vektorischen und Tripelprodukte der Teilvektoren ganz und rational ausdrücken. Unter Verwendung solcher Vielbeine und ihrer Produkte kann gezeigt werden, daß jede in den Koordinaten von $\nu$ Vektoren lineare Form, jedes polyadische Produkt $\nu^{ter}$ Ordnung, die Summe ist von skalaren Produkten gewisser, das polyadische Produkt bestimmender Vielbeine und anderer invarianter Vielbeine der $\nu$ Vektoren, die $\nu^{ten}$ Grades in diesen Vektoren sind. [3]

[1] Vgl. die vorläufige Mitteilung unter dem Titel „Über Binäranalyse und elastische Potentiale", Wien. Anz. v. 26. April 1906.

[2] Vgl. „Über Binäranalyse", Sitzgsber. d. Wien. Ak., Bd. 112, Abt. IIa (im folgenden mit „B" zitiert), und „Über die höheren Vektorgrößen der Kristallphysik als binäre Formen", ebda., Bd. 113, Abt. IIa, p. 1107.

[3] Dieser allgemeine Satz ergibt sich durch Spezialisierung für mehrfachquadratische Formen einer allgemeinen Reihenentwicklung, s. „Über die Reihenentwicklung mehrfachbinärer Formen", Wien. Ber., Bd. CXIII, Abt. IIa, p. 1209. Für spezielle Fälle wird er im folgenden von neuem bewiesen.



Digitized by Google

In § 2 der vorliegenden Arbeit wird das Zweibein und das aus ihm abgeleitete volle System seiner invarianten Vielbeine betrachtet, sowie die Beziehungen seiner Konstanten zu den Wurzeln der kubischen Resolvente

$$4e^3 - g_2 e - g_3 = 0$$

seiner biquadratischen Form. [1])

Hierauf werden in § 3 die vektorischen Produkte eines Vektors $\mathfrak{a}$ behandelt, das sind 1. das Produkt von $\mathfrak{a}$ mit einem Skalar, 2. das vektorische Produkt von $\mathfrak{a}$ mit einem anderen Vektor, 3. das Produkt von $\mathfrak{a}$ mit einem Zweibein, welches der zweiten Überschiebung der Formen des Vektors $\mathfrak{a}$ und des Zweibeines entspricht. Es zeigt sich, daß jeder Affinität des Vektorraumes, die dem Vektor $\mathfrak{a}$ den Vektor $\mathfrak{a}'$ zuweist (also jeder Dyadik [2]) oder linearen Vektorfunktion), ein System von Vielbeinen zugeordnet werden kann, welches aus einem Skalar, einem Vektor und einem Zweibein besteht, und daß der Vektor $\mathfrak{a}'$ die Summe ist der drei genannten vektorischen Produkte des Vektors $\mathfrak{a}$ mit diesen Vielbeinen.

Einem Strain (einer unendlich kleinen Deformation) ist dementsprechend auch ein System von solchen Vielbeinen zugeordnet, ein Skalar $u^0$ und ein Vektor $\mathfrak{u}$, die, wie bekannt, die Dilatation resp. die Rotation des Volumelements bestimmen. Nicht bekannt scheint zu sein, daß dem Strain weiters ein Zweibein zugeordnet werden kann, das allein die durch den Strain bewirkten Gestaltsveränderungen oder Scherungen des Volumelements bestimmt. Es folgt demnach, daß die binären Operationen der 0-, 1-, $2^{\text{ten}}$ Überschiebung einer quadratischen Form mit einer Form 0-, 2-, $4^{\text{ter}}$ Ordnung resp. die reinen Dilatationen, Rotationen, Gestaltsveränderungen des Volumelements vollständig charakterisieren.

Ein mit gewissen Symmetrien behaftetes tetradisches Produkt tritt in der Theorie der Elastizität eines anisotropen Mediums auf. Es ergibt sich, daß jedem Punkte $O$ dieses Mediums ein System von 5 elastischen Vielbeinen zugeordnet werden kann, bestehend aus einem Vierbein $\mathfrak{e}^4$, zwei Zweibeinen $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ und zwei Skalaren $\mathfrak{e}^0$, $\mathfrak{e}'^0$. Diese dem Medium immanenten Vielbeine ersetzen die elastischen Koeffizienten der auf die Volumeinheit bezogenen elastischen Energie $\varphi$ des Volumelements. Diese Energie ist die Summe der skalaren Produkte der elastischen Vielbeine mit den invarianten quadratischen Vielbeinen des Strains:

$$\varphi = \mathfrak{e}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2} + \mathfrak{e}^2 \cdot \mathfrak{h}^2 + \mathfrak{e}'^2 \cdot \mathfrak{u}^2 u^0 + \mathfrak{e}^0 g_2 + \mathfrak{e}'^0 u^{0^2},$$

[1]) Diese einfachen Beziehungen lassen den Versuch vielleicht als wünschenswert erscheinen, die einfache Figur des Zweibeines und der beiden ihm assoziierten Zweibeine geometrischen Betrachtungen in der Theorie der elliptischen Funktionen zu Grunde zu legen.

[2]) S. Gibbs-Wilson, Vektoranalysis, p. 265.

Digitized by Google

wo $\mathfrak{h}'$ das Zweibein ist, welches der Hesseschen Form der biquadratischen Form von $\mathfrak{u}^2$ entspricht.

Fallen die Teilbeine sämtlicher elastischer Vielbeine in eine Gerade, so ist diese die elastische Isotropieachse und die fünf Teile des letzten Ausdruckes des elastischen Potentials sind linear abgeleitet aus den skalaren Produkten von Potenzen eines Einheitsvektors $\mathfrak{k}$, der auf der Isotropieachse liegt, mit den quadratischen Vielbeinen des Strains, so daß sich die potentielle Energie für diesen Fall ergibt als:

$$c_1 \mathfrak{k}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2'} + c_2 \mathfrak{k}^2 \cdot \mathfrak{h}^2 + c_3 \mathfrak{k}^2 \cdot \mathfrak{u}^2 \mathfrak{u}^0 + c_4 g_2 + c_5 \mathfrak{u}^{0'}.$$

Diese fünf skalaren Produkte sind linear ableitbar aus den fünf Beltramischen Invarianten [1]) der elastischen Isotropieachse. Umgekehrt ist ersichtlich, wie sich aus dem soeben angeschriebenen Potential der Isotropieachse durch Verallgemeinerung der speziellen elastischen Vielbeine $\mathfrak{k}^4$, $\mathfrak{k}^2$ das allgemeine Potential $\varphi$ ergibt.

Verschwinden die elastischen Vier- und Zweibeine identisch, so ist das Medium komplett isotrop und man erhält für seine potentielle Energie:

$$\mathfrak{e}^0 g_2 + \mathfrak{e}'^0 \mathfrak{u}^{0'} = 2K g_2 + {}^1/_2 H \mathfrak{u}^{0'},$$

welcher Ausdruck genau der Helmholtzschen Normalform [2]) dieser Energie entspricht.

Es ergibt sich auch, daß unter Voraussetzung der Poisson-Cauchyschen Hypothese, die besagt, daß die elastischen Kräfte nur von den Entfernungen der Moleküle abhängen, die elastischen Zweibeine $\mathfrak{e}^2$ und $\mathfrak{e}'^2$ eine sehr spezielle Lage gegeneinander annehmen, daß sie sich nämlich nur in ihrer Größe unterscheiden, indem die Relation

$$\mathfrak{e}'^2 \equiv {}^{12}/_7 \mathfrak{e}^2$$

gilt, und daß ferner zwischen den elastischen Skalaren die Gleichung

$$\mathfrak{e}'^0 = {}^5/_6 \mathfrak{e}^0$$

besteht, die zu der bekannten Cauchyschen Relation $\lambda = \mu$ führt.

Von den Herren Voigt [3]) und Aron [4]) wurden, ausgehend von den Symmetrieebenen, und von Herrn Minnigerode [5]), aus-

[1]) S. Beltrami, „Note fisicomatematiche", Rend. mat. di Palermo, t. 3, p. 74, und Somigliana, „Sul potenziale elastico", Ann. di. mat. (3), t. VII p. 129.

[2]) S. Helmholtz, Vorlesungen, II, p. 120.

[3]) S. Voigt, „Allgem. Formeln für die Bestimmung der Elastizitätskonstanten etc.", Wied. Ann., Bd. 16, p. 273.

[4]) S. Aron, „Über die Herleitung der Kristallsysteme aus der Theorie der Elastizität", Wied. Ann., Bd. 20, p. 272.

[5]) S. Minnigerode, „Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse und die Elastizität der Kristalle", Gött. Nachr. 1884, p. 195, 374, 488.



Digitized by Google

gehend von den Symmetrieachsen, die verschiedenen speziellen Systeme elastischer Konstanten für die verschiedenen Kristallgruppen mit Symmetriezentrum, welch letztere bei elastischer Symmetrie allein in Betracht kommen, aufgestellt. Es wurden da zunächst die Systeme elastischer Koeffizienten für die vermöge des postulierten Gesetzes der rationalen Indizes allein möglichen 2-, 3-, 4-, 6zähligen Rotationen spezialisiert und dann durch Kombination acht differente elastische Systeme gefunden, zu welchen noch das System mit einer elastischen Isotropieachse und das der kompletten Isotropie hinzutreten.

Umgekehrt hat Herr Somigliana [1]) gezeigt, daß ein in den Strainkoordinaten quadratisches elastisches Potential vorausgesetzt, dieses nur bei 2-, 3-, 4zähligen Rotationen invariant bleiben kann, wenn anders die Rotationsachse nicht elastisch isotrop ist oder komplette Isotropie herrscht. Er findet durch Betrachtung von in den Strainkoordinaten quadratischen, bei den entsprechenden Rotationen invarianten Ausdrücken die angeführten acht Systeme, ferner die Invarianten, aus welchen sich in jedem einzelnen Falle das Potential linear ableiten läßt.

Werden nun die elastischen Vielbeine des Punktes $O$ der Betrachtung zu Grunde gelegt, so ergibt sich, daß man zu diesen verschiedenen elastischen Systemen gelangt, wenn man allein das Vierbein klassifiziert hinsichtlich der Gruppe von kristallographischen Deckoperationen, die es in sich oder die ihm gleichen Vierbeine überführen, die sich von ihm nur in einer geraden Anzahl der Richtungen der Teilvektoren unterscheiden. Man kann demnach auch auf diese vom elastischen Potential ausgehende Weise, aber auf Grund einfacher geometrischer Betrachtungen, die diversen zehn Potentiale erhalten. Ferner können die jedem Falle entsprechenden Systeme elastischer Vielbeine bestimmt werden. Hiebei ergeben sich auch die invarianten skalaren Produkte, aus welchen sich das Potential im betreffenden Falle linear ableiten läßt.

Jede der Gruppen von Deckoperationen, welche die acht elastischen Systeme, die keine Isotropien besitzen, in sich überführen, ist isomorph zu einer der Gruppen linearer Transformationen, die das System von vier verschiedenen binären Quadriken mit gleicher nicht verschwindender Diskriminante in sich oder in ein durch eine gerade Anzahl von Vorzeichen der Quadriken verschiedenes System transformieren.

Herr Somigliana hat ferner l. c. gezeigt, daß es bei Voraussetzung eines in den Strainkoordinaten kubischen Potentials Fälle geben kann, die dem Gesetze der Rationalität der Indizes widersprechen. Im folgenden wird zum Schlusse auch dem kubischen Teile $\Phi$ des elastischen Potentials, der im allgemeinen

[1]) S. Somigliana, l. c., und „Sulla legge di razionalità rispetto alle proprietà elastici dei cristalli", Rend. delle R. Acc. dei Lincei. (5), t. III, p. 238, und „Sopra gli invarianti ortogonali di deformazioni", ib. (5), t. IV, p. 25.

Digitized by Google

56 Konstante besitzt, ein System von zehn elastischen kubischen Vielbeinen zugeordnet, und $\Phi$ abgeleitet aus den skalaren Produkten dieser Vielbeine und der Vielbeine dritten Grades des Strains. Es folgt dann, daß es ein $\Phi$ mit 14 Konstanten gibt, das dem Rationalitätsgesetze widerspricht, wenn nämlich das auftretende kubische Sechsbein zerfällt in ein reguläres Fünfbein und in einen Vektor, der auf der Achse dieses Fünfbeines liegt, in welche dann auch die anderen kubischen und quadratischen Vielbeine fallen. Alle anderen Potentiale, welchen ein nicht in dieser Weise zerfallendes kubisches Sechsbein entspricht, liefern die schon oben angeführten elastischen Symmetrien und eine weitere mit sechszähliger Achse. Sie widersprechen demnach dem Rationalitätsgesetze nicht, nur würde in dem letztangeführten Falle eine sechszählige elastische Symmetrieachse auftreten.

## § 1. Binäre Formen und Vielbeine, Produkte von Vielbeinen.

1. Vektoren und Quadriken. Zunächst soll dem Vektor $\mathfrak{a}$ mit den Cartesischen Koordinaten $x, y, z$ die Quadrik (binäre quadratische Form):

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{a} \equiv a^2 \equiv (a\,\xi)^2 \equiv (a_1\xi_2 - a_2\xi_1)^2 \equiv A_0\xi_1^2 + 2A_1\xi_1\xi_2 + A_2\xi_2^2 \equiv \\ \equiv (x+iy)\,\xi_1^2 - 2iz\,\xi_1\xi_2 + (x-iy)\,\xi_2^2 \end{aligned}\right.$$

zugeordnet werden. Es ist dann

$$(2)\qquad x = {}^1\!/_2\,(A_0 + A_2),\ y = {}^1\!/_2\,i\,(A_2 - A_0),\ z = iA_1,$$

weshalb die Quadrik umgekehrt den Vektor bestimmt.

Die Einheitsvektoren i, j, f der Koordinatenachsen haben die Quadriken:

$$(3)\qquad \xi_1^2 + \xi_2^2,\ i\,(\xi_1^2 - \xi_2^2),\ -2i\,\xi_1\xi_2.$$

Ist der Vektor $\mathfrak{a}$ reell, sind also die Zahlen $x, y, z$ reell, so hat seine Quadrik (1) konjugierte äußere und einen reinimaginären mittleren Koeffizienten. Eine Quadrik mit dieser Eigenschaft soll, da sie umgekehrt einen reellen Vektor bestimmt, „realisierend" heißen.

Eine realisierende Quadrik $a^2$ hat (vgl. „B.", p. 1543) die Eigenschaft, sich in der folgenden Weise zerlegen zu lassen:

$$(4)\qquad a^2 = i\alpha\alpha',$$

wobei $\alpha$, $\alpha'$ Linearformen sind, die in der Beziehung stehen:

$$(5)\quad \alpha = (\lambda + i\mu)\,\xi_1 + (\sigma + i\tau)\,\xi_2,\ \alpha' = (\sigma - i\tau)\,\xi_1 - (\lambda - i\mu)\,\xi_2,$$

worin $\lambda, \mu$; $\sigma, \tau$ reelle Zahlen sind.

Digitized by Google

Es gilt der Satz: Sind $\varepsilon$, $\varepsilon'$ zwei Linearformen, die in der Beziehung (5) stehen, und ist $a^2$ eine realisierende Quadrik, so sind $(a\varepsilon)^2$ und $(a\varepsilon')^2$ konjugierte Zahlen.

Verschwindet die Diskriminante

$$A_0 A_2 - A_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

der Quadrik $\mathfrak{a}$, so ist diese Quadrik das Quadrat einer Linearform $\alpha \equiv (\alpha\xi)$. Der Vektor $\alpha^2$ mit der Quadrik $\alpha^2$ ist dann ein „Nullvektor", der auf dem Minimalkegel mit der Gleichung $x^2+y^2+z^2=0$ liegt (s. „B.", p. 649).

2. Polyvektoren oder Vielbeine. Ein $n$-facher Vektor, ein Polyvektor oder ein Vielbein $n^{\text{ten}}$ Grades oder kurz ein $n$-bein $\mathfrak{v}^n$ besteht aus $n$ gleich langen Vektoren $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots \mathfrak{v}_n$, seinen Teilvektoren, Teilbeinen oder kurz Beinen, die man von dem Punkte $O$ ausgehen lassen kann. Es kann gesetzt werden:

$$\mathfrak{v}^n = \mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2 \ldots \mathfrak{v}_n.$$

Zwei $n$-beine, die sich nur in einer geraden Anzahl der Richtungen ihrer Teilbeine unterscheiden, sind als gleich anzusehen.

Das $n$-bein kann bestimmt werden durch $n$ Richtungen und einen Skalar, der positiv oder negativ sein kann. Der absolute Wert dieses Skalars, die Größe des $n$-beins, ist gleich dem Produkt der Längen $\overline{\mathfrak{v}_i}$ der Vektoren $\mathfrak{v}_i$. Ist er positiv, so stimmen die Richtungen aller Vektoren $\mathfrak{v}_i$ mit den gegebenen Richtungen überein, oder es kann auch eine gerade Anzahl der $\mathfrak{v}_i$ entgegengesetzt zu diesen Richtungen sein. Ist der Skalar negativ, so ist ein Teilbein oder eine ungerade Anzahl von Teilbeinen des $n$-beins entgegengesetzt gerichtet zu den gegebenen Richtungen.

Das $n$-bein kann nach dem Vorstehenden auch bestimmt werden durch ein Einheits-$n$-bein, dessen sämtliche Teilvektoren die Länge 1 haben, und durch die Größe des $n$-beins.

Auch $n$ beliebige Vektoren bestimmen ein $n$-bein, dessen Größe gleich ist dem Produkt der Längen der gegebenen Vektoren.

Fallen die Träger der Teilbeine $\mathfrak{v}_i$ des $n$-beins $\mathfrak{v}^n$ zusammen, so soll es „speziell" heißen. Sind alle Teilbeine $\mathfrak{v}_i$ von $\mathfrak{v}^n$ reelle Vektoren, so möge das $n$-bein „reell" genannt werden. Ein reelles und spezielles $n$-bein besteht aus einem $k$-mal zu zählenden Vektor und aus dem $(n-k)$-mal zu zählenden engegengesetzt gerichteten Vektor.

Die Vielbeine $\mathfrak{v}^2$, $\mathfrak{v}^3$, $\mathfrak{v}^4$ können als Di-, Tri- und Quadrivektoren oder als 2-, 3-, und 4-beine bezeichnet werden; $\mathfrak{v}^0$ ist ein Skalar oder ein Avektor und $\mathfrak{v}^1$ ein Vektor $\mathfrak{v}$.

Digitized by Google

Es sei eine Form $2n^{\text{ter}}$ Ordnung $v^{2n}$ in das Produkt von $n$ Quadriken $v_\lambda'^2$ zerlegt. Der Quadrik $v_\lambda'^2$ entspricht der Vektor $\mathfrak{v}_\lambda'$. Man kann dann setzen:

$$v^{2n} = \varkappa_1 v_1'^2 \varkappa_2 v_2'^2 \ldots \varkappa_n v_n'^2,$$

wobei das Produkt aller $\varkappa_\lambda$ gleich 1 ist. Ist nun $K$ das Produkt der Längen $\overline{\mathfrak{v}}_\lambda'$ aller Vektoren $\mathfrak{v}_\lambda'$, und wird $\varkappa_\lambda = K^{1/n}/\overline{\mathfrak{v}}_\lambda'$ gesetzt, so hat der Vektor $\mathfrak{v}_\lambda$ mit der Quadrik

$$v_\lambda^2 = \varkappa_\lambda v_\lambda'^2$$

die Länge $K^{1/n}$, und es ist demnach:

$$v^{2n} = v_1^2 v_2^2 \ldots v_n^2$$

eine Zerlegung von $v^{2n}$ in Quadriken, welchen lauter gleich lange Vektoren von der Länge $K^{1/n}$ entsprechen. Folglich entspricht jeder Zerlegung der Form $v^{2n}$ in quadratische Faktoren ein $n$-bein, dessen Teilbeine in der angegebenen Weise gefunden werden können. Es ist reell, wenn die Quadriken $v_\lambda^2$ realisieren.

Ein allgemeines $n$-bein hat $2n+1$ Konstante, d. i. so viele, als eine Form $v^{2n}$ der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung hat, oder so viel, als seine $n$ Teilbeine, die von gleicher Länge sind, besitzen.

3. Addition von Vielbeinen. „Sind $u^{2n}$ und $v^{2n}$ die Formen zweier reellen $n$-beine $\mathfrak{u}^n$ und $\mathfrak{v}^n$, so ist:

$$w^{2n} \equiv u^{2n} + v^{2n}$$

die Form eines reellen $n$-beins $\mathfrak{w}^n$, das als Summe der $\mathfrak{u}^n$ und $\mathfrak{v}^n$ bezeichnet werden soll, so daß gesetzt wird:

$$\mathfrak{w}^n = \mathfrak{u}^n + \mathfrak{v}^n{}^{\text{u}}.$$

Denn werden die Formen $u^{2n}$, $v^{2n}$ in realisierende Quadriken zerlegt, als:

$$u^{2n} = u_1^2 \ldots u_n^2, \quad v^{2n} = v_1^2 \ldots v_n^2,$$

so ist:

$$w^{2n} = u_1^2 \ldots u_n^2 + v_1^2 \ldots v_n^2. \tag{6}$$

Ist nun $\varepsilon = (\varepsilon\,\xi)$ ein Linearfaktor dieser Form, ist also:

$$(w\varepsilon)^{2n} = (u_1\varepsilon)^2 \ldots (u_n\varepsilon)^2 + (v_1\varepsilon)^2 \ldots (v_n\varepsilon)^2 = 0,$$

so ist (s. Art. 1) $(u_\lambda\varepsilon)^2$ konjugiert zu $(u_\lambda\varepsilon')^2$ und $(v_\lambda\varepsilon)^2$ konjugiert zu $(v_\lambda\varepsilon')^2$ also auch $(w\varepsilon')^{2n}$ konjugiert zu $(w\varepsilon)^{2n}$, daher $(w\varepsilon')^{2n} = 0$.

Digitized by Google

Folglich kann gesetzt werden:

$$w^{2n} = c\, i\varepsilon_1 \varepsilon_1' i\varepsilon_2 \varepsilon_2' \ldots i\varepsilon_n \varepsilon_n'.$$

Hierin muß nun noch $c$ reell sein, denn nur dann sind hier die Koeffizienten von $\xi_1^{2n}$ und $\xi_2^{2n}$ konjugiert, wie dies in (6) der Fall ist.

„Zu einer Anzahl von reellen $n$-beinen ist ein bestimmtes reelles $n$-bein als deren Summe definiert. Diese Addition von $n$-beinen genügt den formalen Gesetzen der algebraischen Addition".

Z. B. Zwischen den reellen speziellen Zweibeinen[1]) $\mathfrak{i}^2, \mathfrak{j}^2, \mathfrak{k}^2$ besteht nach (3) die Identität

$$\mathfrak{i}^2 + \mathfrak{j}^2 + \mathfrak{k}^2 = 0. \tag{7}$$

Das Zweibein $\mathfrak{i}^2 + \mathfrak{j}^2$ ist demnach das spezielle Zweibein $-\mathfrak{k}^2$, das aus dem Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ und den ihm entgegengesetzten Vektor $-\mathfrak{k}$ besteht.

Multipliziert man ein reelles $n$-bein mit einem reellen Skalar $s$, so erhält man wieder ein reelles $n$-bein, das $s$-mal so groß ist als das gegebene. Daher kann aus einer Anzahl reeller $n$-beine mit Hilfe reeller Zahlen wieder ein reelles $n$-bein linear abgeleitet werden.

4. Ternäre Darstellung von Vielbeinen. Eine in den Vektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ lineare Form

$$\alpha\mathfrak{i} + \beta\mathfrak{j} + \gamma\mathfrak{k}$$

ist ein Vektor, der reell ist, wenn $\alpha, \beta, \gamma$ reelle Zahlen sind. Eine quadratische Form in $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ ist ein Zweibein, das demnach aus den sechs Zweibeinen $\mathfrak{i}^2, \mathfrak{j}^2, \mathfrak{k}^2, \mathfrak{j}\mathfrak{k}, \mathfrak{k}\mathfrak{i}, \mathfrak{i}\mathfrak{j}$ linear abgeleitet werden kann. Vermöge der Identität (7) läßt sich dieses Zweibein in die Gestalt setzen:

$$\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{k}\mathfrak{F}^1, \tag{8}$$

wo $\mathfrak{F}^x$ eine Form $x^{\text{ter}}$ Ordnung in $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ ist. Die Formen $\mathfrak{F}^1, \mathfrak{F}^2$ besitzen zusammen die fünf Konstanten des Zweibeins.

Analog ist ein $n$-bein dargestellt durch eine Form $n^{\text{ter}}$ Ordnung in $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$, aber auch darstellbar in der Gestalt $\mathfrak{F}^n + \mathfrak{k}\mathfrak{F}^{n-1}$. Die Formen $\mathfrak{F}^n$ und $\mathfrak{F}^{n-1}$ haben zusammen $2n+1$ Koeffizienten, welche zusammen die Konstanten des $n$-beins geben und als Koordinaten desselben bezeichnet werden können.

Die binäre quadratische Form in $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$:

$$a\mathfrak{i}^2 + b\mathfrak{i}\mathfrak{j} + c\mathfrak{j}^2 \tag{9}$$

[1]) Mit $\mathfrak{i}^n, \mathfrak{j}^n, \mathfrak{k}^n$ soll das spezielle $n$-bein bezeichnet werden, welches resp. aus dem $n$-mal gezählten Vektor $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ besteht.

Digitized by Google

stellt ein reelles Zweibein dar, wenn ihre Koeffizienten reelle Zahlen sind. Dieses liegt in der $xy$-Ebene, wenn die Wurzeln der Form reell sind, aber in einer durch die $z$-Achse gehenden Ebene, wenn sie konjugiert sind, wo dann ein zu ihm assoziiertes imaginäres Zweibein in der $xy$-Ebene liegt.

Ist $b = 0$, so sind die Koordinatenachsen Symmetrielinien des Zweibeins $a\,\mathfrak{i}^2 + c\,\mathfrak{j}^2$, und es liegt in der $xy$-Ebene, wenn $a, c$ entgegengesetzt bezeichnet sind. Es kann auch wegen der Identität (7) ersetzt werden durch

$$(a - c)\,\mathfrak{i}^2 - c\,\mathfrak{k}^2 \text{ oder } (c - a)\,\mathfrak{j}^2 - a\,\mathfrak{k}^2,$$

woraus sich ergibt, daß dieses Zweibein, wenn $a, c$ beide positiv sind und $|a| \gtrless |c|$ ist, in der $xz$- resp. $yz$-Ebene liegt, und umgekehrt, wenn $a, c$ beide negativ sind.

Allgemein stellt eine Form $n^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{F}^n$ in $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ mit reellen Koeffizienten ein reelles $n$-bein dar, von welchem soviele Teilbeine in der $xy$-Ebene liegen, als die Form reelle Wurzeln hat und welches soviele weitere Teilzweibeine hat, deren Ebenen durch die $z$-Achse gehen, als die Form Paare konjugierter Wurzeln besitzt.

5. Produkte von Vielbeinen. Ist $F(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$ eine doppeltbinäre Form $\mu^{\text{ter}}$ Ordnung in $\xi$ und $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung in $\eta$, so liefert der $\Omega$-prozeß:

$$\Omega = \frac{1}{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\,\partial\eta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi_2\,\partial\eta_1}\right)$$

auf $F$ angewendet eine Form von der Ordnung $\mu - 1$ resp. $\nu - 1$ in $\xi$ resp. $\eta$. Durch weitere im ganzen $k$-malige Anwendung dieses Prozesses erhält man eine Form der Ordnungen $\mu - k$, $\nu - k$. Sind nun die beiden binären Formen

$$a^\mu \equiv (a\,\xi)^\mu,\ b^\nu \equiv (b\,\xi)^\nu$$

gegeben und wird der $\Omega$-prozeß auf das Produkt

$$(a\,\xi)^\mu (b\,\eta)^\nu$$

$k$-mal angewendet und dann $\eta = \xi$ gesetzt, so erhält man eine Form $(\mu + \nu - 2k)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $k^{\text{te}}$ Überschiebung der Formen $a^\mu$ und $b^\nu$ heißt und mit

$$(a^\mu, b^\nu)^k$$

bezeichnet wird. Die $0^{\text{te}}$ Überschiebung der Formen $a^\mu, b^\nu$ ist das Produkt dieser Formen.

Ist $\mathfrak{a}$ ein Vektor mit den Koordinaten $x, y, z$ und der Quadrik $\mathfrak{a}$ [s. Formel (1), Art. 1] und $\mathfrak{b}$ ein Vektor mit den Koordinaten $x', y', z'$ und der entsprechenden Quadrik $\mathfrak{b}$, so ergibt sich durch eine einfache Rechnung: Die erste Überschiebung $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})^1$ der Quadriken $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ist die

Digitized by Google

Quadrik des vektorischen Produktes $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$; diese Quadrik realisiert, wenn die beiden gegebenen Vektoren reell sind, also ihre Quadriken realisieren. Die zweite Überschiebung $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})^2$ ist das doppelte skalare Produkt $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Die zweite Überschiebung des Vektors $\mathfrak{a}$ mit sich selbst ist also das doppelte Quadrat seiner Länge:

$$2\,(A_0 A_2 - A_1^2) = 2\,\mathfrak{a} . \mathfrak{a}; \tag{10}$$

demnach ist die Diskriminante $A_0 A_2 - A_1^2$ der Quadrik $\mathfrak{a}$ gleich dem Quadrat der Länge des Vektors $\mathfrak{a}$. Die schiefe Invariante $[(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})^1 \mathfrak{c}]^2$ ist das doppelte Tripelprodukt $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) . \mathfrak{c}$ der drei Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.

Die $k^{\text{te}}$ Überschiebung der Formen $v^{2\mu}$ und $v^{2\nu}$ der Vielbeine $\mathfrak{v}^\mu$ und $\mathfrak{v}^\nu$ ist eine simultane Komitante der Quadriken der Teilvektoren dieser Vielbeine und läßt sich als solche durch die Komitanten des vollen Systems dieser Quadriken ausdrücken. Dieses System besteht (s. „B." p. 1093) aus den skalaren und Tripelprodukten, sowie aus den Quadriken der Teilvektoren und den Quadriken der vektorischen Produkte der Teilvektoren. Sind die Vielbeine reell, so sind die Skalare und Tripelprodukte reelle Zahlen und die Quadriken realisieren. Das $k^{\text{te}}$ Produkt der Formen $v^{2\mu}$ und $v^{2\nu}$ ist demnach linear und reell ableitbar aus mehreren Formen, welche $\mu + \nu - k$ der letzteren Quadriken zu Faktoren haben und die daher (s. Art. 3) zu reellen $(\mu + \nu - k)$-beinen gehören. Demnach folgt: „Die $k^{\text{te}}$ Überschiebung eines reellen $\mu$-beins $\mathfrak{v}^\mu$ und eines reellen $\nu$-beins $\mathfrak{v}^\nu$ definiert ein reelles $(\mu + \nu - k)$-bein, das „$k^{\text{tes}}$ Produkt des $\mu$- und $\nu$-beins" genannt und mit

$$\mathfrak{v}^\mu \,i\, \mathfrak{v}^\nu$$

bezeichnet werden soll." Kürzer soll das skalare Produkt der beiden $\nu$-beine $\mathfrak{v}^\nu$ und $\mathfrak{v}'^\nu$

$$\mathfrak{v}^\nu \,;\, \mathfrak{v}'^\nu = \mathfrak{v}^\nu \cdot \mathfrak{v}'^\nu$$

gesetzt werden. Das $0^{\text{te}}$ Produkt $\mathfrak{v}^\mu \,\dot{0}\, \mathfrak{v}^\nu = \mathfrak{v}^\mu \mathfrak{v}^\nu$ der Vielbeine $\mathfrak{v}^\mu, \mathfrak{v}^\nu$ ist das Vielbein $(\mu + \nu)^{\text{ter}}$ Ordnung, das die Vielbeine $\mathfrak{v}^\mu, \mathfrak{v}^\nu$ als Teile enthält. Das $0^{\text{te}}$ Produkt $s \,\dot{0}\, \mathfrak{v}^\nu = s\,\mathfrak{v}^\nu$ eines Skalars $s$ und eines Vielbeins $\mathfrak{v}^\nu$ ist ein $\nu$-bein, das $s$-mal so groß ist als $\mathfrak{v}^\nu$ (vgl. Art. 3).

Nach obigem folgt: „Das erste Produkt zweier Vektoren ist gleich ihrem vektorischen Produkt: $\mathfrak{a} \,i\, \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, und ihr zweites Produkt ist identisch mit dem doppelten skalaren Produkte der Vektoren: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 2\,\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$. Ihr $0^{\text{tes}}$ Produkt ist das Zweibein $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ mit diesen Vektoren als Teilbeinen."

„Sind mehrere reelle Vielbeine gegeben, so können durch Bildung ihrer Produkte mit einander und mit sich selbst neue reelle Vielbeine erhalten werden, aus diesen neuen und den frü-

Digitized by Google

heren durch Produktbildung weitere Vielbeine u. s. w. Alle diese abgeleiteten Vielbeine sind invariant zu den gegebenen für die Gruppe der Drehstreckungen um $O$.“ Denn die Formen dieser Vielbeine werden durch Überschiebung aus den Formen der gegebenen Vielbeine erhalten, die invariant zu den Formen für die Gruppe der binären linearen Transformationen sind; ferner entsprechen diesen linearen Transformationen im Gebiete der Vektoren die obigen Drehstreckungen (s. „B.“ p. 653).

„Umgekehrt kann jedes invariante Vielbein der gegebenen Vielbeine, dessen Koordinaten (s. Art. 4) ganze rationale Funktionen der Koordinaten der gegebenen Vielbeine sind, durch solche Produktbildungen aus den gegebenen Vielbeinen gefunden werden.“ Dies folgt aus dem Gordanschen Fundamentalsatze der binären Invariantentheorie, daß jede Komitante binärer Formen aus ihnen durch den Prozeß der Überschiebung allein gefunden werden kann und daraus, daß den binären linearen Transformationen die Drehstreckungen von $O$ entsprechen.

Demnach folgt auch, daß man durch den $\Omega$-prozeß (oder dem ihm entsprechenden symbolischen Faltungsprozeß) zu allen Produktbildungen der Vektorrechnung gelangen kann.

„Entsprechend dem endlichen System ihrer binären Formen haben auch mehrere Vielbeine ein volles System, durch dessen Vielbeine sich jedes invariante in den gegebenen Vielbeinen rational und ganze Vielbein rational und ganz ausdrücken läßt.“ Z. B. lassen sich (vgl. oben) alle rationalen und ganzen invarianten Skalare und Vektoren mehrerer Vektoren rational und ganz ausdrücken durch diese Vektoren selbst, ihre skalaren, vektorischen und Tripelprodukte; [1]) hier folgt noch, daß dasselbe für die invarianten Vielbeine der gegebenen Vektoren der Fall ist.

Das volle System eines Zweibeins wird im nächsten Paragraphen behandelt werden. Ein Dreibein $\mathfrak{d}$ besitzt das aus dem System einer Form 6ter Ordnung folgende endliche System von Vielbeinen, u. a. das Zweibein $\mathfrak{d} \dot{,} \mathfrak{d}$ und fünf invariante Vektoren, darunter den niedrigsten Grades: $(\mathfrak{d} \dot{,} \mathfrak{d}) \dot{,} \mathfrak{d}$.

## § 2. Das Zweibein und sein System.

6. Die Biquadrik $u^4$ mit getrennten Linearfaktoren:

$$u^4 = (\alpha\xi)(\beta\xi)(\gamma\xi)(\delta\xi) \tag{11}$$

bestimmt ein Tripel von Zweibeinen: $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{u}'^2$, $\mathfrak{u}''^2$, welche auch als assoziierte Zweibeine bezeichnet werden mögen. Denn $u^4$ läßt sich in drei Weisen in das Produkt zweier Quadriken zerlegen, welchen die Teilvektoren: $u_1, u_2$; $u_1', u_2'$; $u_1'', u_2''$ der Zweibeine des Tripels entsprechen.

[1]) Vgl. H. Burkhardt, Über Funktionen von Vektorgrößen, welche selbst wieder Vektorgrößen sind. Math. Ann., Bd. 43, S. 197, und „B.“, p. 1093.

Digitized by Google

Da der Vektor mit der Quadrik $u_1 = \alpha\beta$ senkrecht steht auf den Vektoren mit den Quadriken $\alpha^2$, $\beta^2$, weil $u_1 \cdot \alpha^2 = \alpha\beta \cdot \alpha^2 = 0$ und ebenso $u_1 \cdot \beta^2 = 0$ ist, so gilt: „Die Teilbeine der drei assoziierten Zweibeine stehen senkrecht auf zwei gegenüberliegenden Seitenebenen des Vierkants, das durch die vier Nullvektoren $\alpha^2$, $\beta^2$, $\gamma^2$, $\delta^2$ gebildet wird." Durch eine einfache geometrische Betrachtung folgt weiter: „Die Ebenen der assoziierten Zweibeine $u^2$, $u'^2$, $u''^2$ sind die Seitenebenen des orthogonalen Diagonaldreikants dieses Vierkants; die Kanten dieses Dreikants sind die Symmetrielinien der Zweibeine."

„Ist das Zweibein $u^2$ reell, so ist das Teilbein $u_1'$ des assoziierten Zweibeins $u'^2$ konjugiert zum Vektor $-u_2'$, ebenso ist $u_1''$ konjugiert zu $-u_2''$." Denn nach Art. 1 und 3 muß die Form (11) des reellen Zweibeins $u^2$ die Zerlegung

$$i\alpha\alpha' \quad i\beta\beta'$$

gestatten, daher auch die Zerlegung in die Quadriken $\alpha\beta$, $-\alpha'\beta'$, die zu konjugierten Vektoren gehören. Dasselbe gilt für die weitere Zerlegung in die Faktoren $\alpha\beta'$, $-\alpha'\beta$.

Einer Biquadrik mit doppeltem Linearfaktor entspricht ein Zweibein, das aus einem Vektor und einem Nullvektor besteht und ein anderes Zweibein, dessen Ebene den Minimalkegel mit dem Scheitel $O$ berührt. Einer solchen Biquadrik kann demnach kein reelles Zweibein entsprechen, ebenso nicht einer Biquadrik mit dreifachem Linearfaktor.

Hat aber die Biquadrik zwei doppelte Linearfaktoren, so entspricht ihr ein spezielles Zweibein; ist sie $= \pm (a^2)^2$, wo die Quadrik $a^2$ realisiert, so entspricht ihr ein spezielles Zweibein, das je nach dem Zeichen entweder ein doppelt zu zählender Vektor ist oder aus zwei gleichlangen entgegengesetzt gerichteten Vektoren besteht (vgl. Art. 2).

7. Das volle System des reellen Zweibeins $u^2$. Es sei $u = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$ ein reelles Zweibein mit den gleichlangen Beinen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$. Es ist dann

$$(12) \qquad \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q} = 2\bar{\mathfrak{p}}^2 = 2P, \quad \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} = 2\bar{\mathfrak{p}}^2 \cos\varphi = 2Q,$$

wo $P$ die Größe, $\varphi$ der Winkel, $Q$ das skalare Produkt des Zweibeins $u^2$ und ferner $R = \bar{\mathfrak{p}}^2 \sin\varphi = P\sin\varphi$ das äußere Produkt des Zweibeins $u^2$ heißen möge.

Die Komitanten des vollen Systems der Biquadratik $u^4$ des Zweibeins ergeben reelle Vielbeine (s. Art. 5), welche das volle System des Zweibeins bilden. Durch diese Vielbeine lassen sich alle rationalen für die Gruppe der Drehstreckungen invarianten Vielbeine von $u^2$ rational ausdrücken. Es sind die folgenden Vielbeine, die nach Art. 5 auch durch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $P$, $Q$ dargestellt werden können:

*a*) Das Zweibein $u^2 = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$ selbst.

Digitized by Google

*b*) Das zweite Produkt desselben mit sich selbst oder das Hessesche Zweibein $\mathfrak{h}^2$ von $\mathfrak{u}^2$:

$$\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{u}^2 = \mathfrak{p}\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}\mathfrak{q} = {}^1/_2 P(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2) - {}^1/_3 Q\mathfrak{p}\mathfrak{q} \equiv 2\mathfrak{h}^2.$$

Es ist dies das durch die Hessesche Form $h = {}^1/_2 (u^4, u^4)^2$ der Biquadrik $u^4$ gegebene reelle Zweibein. Man kann zeigen, daß es dieselben Symmetrielinien wie $\mathfrak{u}^2$ hat und daß sein Lot die halbierende Gerade des Winkels $\varphi$ oder eines Nebenwinkels ist, je nachdem $\varphi \gtrless 90^0$. Ist $\varphi = 90^0$, so ist das Hessesche Zweibein speziell und besteht aus zwei gleichlangen entgegengesetzt gerichteten Vektoren, die auf der Ebene des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ senkrecht stehen und die Länge $P/2$ haben.

*c*) Das vierte Produkt des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ mit sich selbst oder der Skalar $g_2$ zweiten Grades in $\mathfrak{u}^2$:

$$\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{u}^2 = \mathfrak{p}\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}\mathfrak{q} = 2P^2 + {}^2/_3 Q^2 = 2g_2.$$

Dieser Skalar kann für das reelle Zweibein $\mathfrak{u}^2$ nicht verschwinden.

*d*) Das erste Produkt der Zweibeine $\mathfrak{u}^2$ und $\mathfrak{h}^2$ oder das Dreibein $\mathfrak{t}^3$:

$$\mathfrak{u}^2 \,i\, \mathfrak{h}^2 = {}^1/_2 P(\mathfrak{p}\mathfrak{q})\, i\, (\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2) = P(\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{q}^2)(\mathfrak{p}\, i\, \mathfrak{q}) = 2\mathfrak{t}^3.$$

Die Teilbeine $\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q}$ von $\mathfrak{t}^3$ liegen auf den winkelhalbierenden Geraden und der Vektor $\mathfrak{p}\, i\, \mathfrak{q}$ auf dem Lote von $\mathfrak{u}^2$.

Setzt man

$${}^2/_3 Q = -2e_1, \quad {}^1/_3 Q \pm P = 2e_{2,3},$$

so ist

$$\Sigma e_1 = 0, \ \Sigma e_2 e_3 = -g_2/4, \ e_1 e_2 e_3 = g_3/4;$$

Folglich sind die $e_1, e_2, e_3$ Wurzeln der kubischen Resolvente

$$4e^3 - g_2 e - g_3 = 0 \tag{13}$$

der Biquadrik $u^4$, und es folgt als Ausdruck des skalaren Produktes und der Größe des Zweibeins

$$Q = -3e_1, \ P = e_1 - e_2.$$

8. Unter Anwendung der Bezeichnungen und einiger Resultate einer Abhandlung des Herrn Study[1]) mögen noch einige weitere Folgerungen für das Tripel assoziierter Zweibeine, das durch eine Biquadrik bestimmt ist, abgeleitet werden.

Es werde mit Herrn Study die Biquadrik

$$f = 4(r_0\,\xi)(r_\lambda\,\xi)(r_\mu\,\xi)(r_\nu\,\xi)$$

[1]) S. Study, „On irrational covariants of certain binary forms", Am. Journ. t. 17, p. 184 und ferner: „On the connection between binary quartics and elliptic functions, ib. p. 216.

Digitized by Google

gesetzt. Sie hat die drei irrationalen Kovarianten:

$$\mathfrak{l} = (l\,\xi)^2,\ \mathfrak{m} = (m\,\xi)^2,\ \mathfrak{n} = (n\,\xi)^2,$$

die Faktoren der Kovariante $t$ sind. Es gelten folgende und die aus ihnen durch zyklische Vertauschungen der $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sich ergebenden Beziehungen:

$$^1/_2\,(\mathfrak{l},\mathfrak{l})^2 = 1,\ (\mathfrak{l},\mathfrak{m})^2 = 0,\ (\mathfrak{m},\mathfrak{n})^1 = -\mathfrak{l}.$$

Ferner ist, wenn $(r_0\,\xi) = r_0$, $(r_\lambda\,\xi) = r_\lambda$ gesetzt wird:

$$2\,r_0\,r_\lambda = \sqrt{e_\lambda - e_\mu}\,\mathfrak{m} - \sqrt{e_\nu - e_\lambda}\,\mathfrak{n},$$

$$2\,r_\mu\,r_\nu = -\sqrt{e_\lambda - e_\mu}\,\mathfrak{m} - \sqrt{e_\nu - e_\lambda}\,\mathfrak{n},$$

$$2\,(r_0\,r_\lambda,\ r_\mu\,r_\nu)^2 = -3\,e_\lambda,$$

$$2\,(r_0\,r_\lambda,\ r_0\,r_\lambda)^2 = -(r_0\,r_\lambda)^2 = -(r_\mu\,r_\nu)^2 = -(e_\mu - e_\nu).$$

Ist

$$G = {}^1/_{16}\,(g_2^3 - 27\,g_3^2)$$

die Diskriminante von $f$, so ist noch

$$(r_0\,r_\lambda)\,(r_\lambda\,r_\mu)\,(r_\mu\,r_0) = -\sqrt[4]{G},$$

$$(r_\lambda\,r_\mu)\,(r_\mu\,r_\lambda)\,(r_\lambda\,r_\nu) = \sqrt[4]{G}.$$

Aus den vorstehenden Studyschen Formeln folgt zunächst, daß die Vektoren $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ die Länge 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Die Quadriken $2\,r_0\,r_\lambda$, $2\,r_\mu\,r_\nu$ bestimmen die Teilvektoren des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$, das durch $f$ gegeben ist. Durch zyklische Vertauschung von $\lambda$, $\mu$, $\nu$ erhält man aus ihnen die Quadriken der Teilvektoren der beiden anderen dieser Zweibeine $\mathfrak{u}_\mu^2$, $\mathfrak{u}_\nu^2$. Es ist

$$^1/_2\,(2\,r_0\,r_\lambda,\ 2\,r_\mu\,r_\nu)^2 = -3\,e_\lambda,$$

so daß sich als geometrische Bedeutung der Wurzel $e_\lambda$ der kubischen Resolvente von $f$ ergibt, daß sie das mit $-{}^1/_3$ multiplizierte skalare Produkt $Q_\lambda$ des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$ ist.

Das Quadrat der Länge des Vektors mit der Quadrik $2\,r_0\,r_\lambda$ oder die Größe $P_\lambda$ des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$ ist:

$$^1/_2\,(2\,r_0\,r_\lambda,\ 2\,r_0\,r_\lambda)^2 = -(e_\mu - e_\nu);$$

daher: die Länge eines Teilbeins des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$ ist $\sqrt{e_\nu - e_\mu}$.

Digitized by Google

Sind $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_\lambda$ die Minimalpunkte (Punkte des Minimalkegels mit dem Scheitel $O$), welche die Endpunkte der Nullvektoren $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_\lambda$ mit den Quadriken $r_0^2$, $r_\lambda^2$ sind, so ist das Quadrat der Entfernung $\overline{\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_\lambda}$ dieser Minimalpunkte, [1]) weil $\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_\lambda \cdot \mathfrak{r}_\lambda = 0$ ist:

$$\overline{\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_\lambda}^2 = -\,\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{r}_\lambda = -\,(r_0 r_\lambda)^2 = -\,(e_\mu - e_\nu) = \overline{\mathfrak{r}_\mu \mathfrak{r}_\nu}^2;$$

daher: Die Seitenlänge des Tetraeders, welches die vier Minimalpunkte $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_\lambda$, $\mathfrak{r}_\mu$, $\mathfrak{r}_\nu$ zu Ecken hat, sind $\sqrt{e_\nu - e_\mu}$.

Das Volumen des Tetraeders, das den Punkt $O$ und die Punkte $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_\lambda$, $\mathfrak{r}_\mu$ zu Ecken hat, ist (s. „B." p. 651)

$$\tfrac{1}{12}\,(r_0 r_\lambda)\,(r_\lambda r_\mu)\,(r_\mu r_0) = -\tfrac{1}{12}\sqrt[4]{G};$$

das Volumen des Tetraeders $O\,r_\lambda\,\mathfrak{r}_\mu\,\mathfrak{r}_\nu$ ist:

$$\tfrac{1}{12}\,(r_\lambda r_\mu)\,(r_\mu r_\lambda)\,(r_\lambda r_\nu) = \tfrac{1}{12}\sqrt[4]{G}.$$

Die Teilvektoren des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$ ergeben sich als:

$$\pm\sqrt{e_\lambda - e_\mu}\,\mathfrak{m} - \sqrt{e_\nu - e_\lambda}\,\mathfrak{n}.$$

Daher ist das vektorische Produkt dieser Teilvektoren:

$$-2\sqrt{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{e_\nu - e_\lambda}\,\mathfrak{m} \times \mathfrak{n} = 2\sqrt{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{e_\nu - e_\lambda}\,\mathfrak{l}.$$

Das Quadrat der Länge dieses vektorischen Produkts ist nun gleich dem Quadrat des äußeren Produktes $R_\lambda$ des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$, also ist:

$$R_\lambda = 2\sqrt{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{e_\nu - e_\lambda} = -2i\sqrt[4]{G}\,/\,P_\lambda;$$

daher ist

$$\sqrt[4]{G} = \tfrac{1}{2}\,i\,P_\lambda\,R_\lambda,$$

folglich auch

$$G = \tfrac{1}{16}\,P_\lambda^8 \sin^4\varphi_\lambda,$$

wo $\varphi_\lambda$ der Winkel des Zweibeins $\mathfrak{u}_\lambda^2$ ist.

## § 3. Vektorische Produkte eines Vektors und die Affinitäten des Vektorraumes.

9. Das $k^{\text{te}}$ Produkt $\mathfrak{v}'' \times \mathfrak{v}^{\nu}$ eines $\mu$- und eines $\nu$-beins ist ein $(\mu + \nu - k)$-bein (s. Art. 5). Soll daher das $k^{\text{te}}$ Produkt eines

[1]) Das doppelte Quadrat der Entfernung der Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ist:

$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} - 2\,\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}.$$

Digitized by Google

Vektors $\mathfrak{a}$ mit einem Vielbein $\mathfrak{v}''$ wieder ein Vektor sein, so muß $\mu + 1 - k = 1$, also $k = \mu$ sein. Da nun $k$ höchstens gleich zwei sein kann, so folgt: „Die möglichen vektorischen Produkte eines Vektors $\mathfrak{a}$ mit Vielbeinen sind das $0^{te}$, $1^{te}$, $2^{te}$ Produkte des Vektors resp. mit einem Skalar $\mathfrak{u}^0$, einem Vektor $\mathfrak{u}$, einem Zweibein $\mathfrak{u}^2$:

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{u}^0 \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{u} \,i\, \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a}. \tag{14}$$

Durch diese Produkte sind dem Vektor $\mathfrak{a}$ resp. die Vektoren $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ zugeordnet, die mit ihm linear variieren. Demnach sind durch die letzten Gleichungen spezielle Affinitäten des Vektorraumes gegeben. Die Affinität $\mathfrak{A}^0$ der ersten Gleichung ist die Streckung der Vektoren im Verhältnis $\mathfrak{u}^0$, die der zweiten liefert zu dem Vektor $\mathfrak{a}$ dessen vektorisches Produkt (im engeren Sinne) mit dem Vektor $\mathfrak{u}$. Die dritte Gleichung gibt eine bisher noch nicht betrachtete Affinität $\mathfrak{A}^2$, die im folgenden Art. besprochen werden soll.

Addiert man die letzten Gleichungen, so erhält man:

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{u}^2 \dot{z}\, \mathfrak{a} + \mathfrak{u} \,i\, \mathfrak{a} + \mathfrak{u}^0 \mathfrak{a}. \tag{15}$$

Diese Gleichung ist wiederum die einer Affinität, und zwar die der allgemeinen Affinität $\mathfrak{A}$ des Vektorraumes, weil $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}^0$, wenn sie allgemein und von einander unabhängig sind, neun Konstante enthalten. Daher: „Durch das System eines Zweibeins $\mathfrak{u}^2$, eines Vektors $\mathfrak{u}$ und eines Skalars $\mathfrak{u}^0$ ist eine Affinität $\mathfrak{A}$ des Vektorraumes bestimmt und umgekehrt gehört zu jeder Affinität ein solches System."

10. Für die Affinität $\mathfrak{A}^2$ des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$, die durch die Gleichung

$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{u}^2 \dot{z}\, \mathfrak{a} \tag{16}$$

gegeben ist, läßt sich zunächst der dem Vektor $\mathfrak{a}$ entsprechende Vektor $\mathfrak{a}_2$ leicht konstruieren. Denn es läßt sich (s. Art. 5), sobald das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ in seine Teilvektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ zerlegt ist, das Produkt $\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a} = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}) \cdot \mathfrak{a}$ im System der Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}$ ausdrücken vermöge der Beziehung zwischen deren Quadriken:

$$(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}, \mathfrak{a})^2 = {}^1/_2 (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})^2 \mathfrak{q} + {}^1/_2 (\mathfrak{q}, \mathfrak{a})^2 \mathfrak{p} - {}^1/_3 (\mathfrak{p}, \mathfrak{q})^2 \mathfrak{a}$$

als:

$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{u}^2 \dot{z}\, \mathfrak{a} = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}) \cdot \mathfrak{a} = {}^1/_2 \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a}\, \mathfrak{q} + {}^1/_2 \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{a}\, \mathfrak{p} - {}^2/_3 Q \mathfrak{a}. \tag{17}$$

Demnach ist, wenn $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$ die mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gleich gerichteten Einheitsvektoren sind, vermöge der Formeln (12)

$$\mathfrak{a}_2 = P\{\bar{\mathfrak{a}} \cos(\mathfrak{p}, \mathfrak{a})\, \mathfrak{q}_1 + \bar{\mathfrak{a}} \cos(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})\, \mathfrak{p}_1 - {}^2/_3 \bar{\mathfrak{a}} \cos\varphi\}.$$

Digitized by Google

Der Vektor $\mathfrak{a}_2/P$ wird demnach konstruiert, indem von der Summe der Projektionen des Vektors $\mathfrak{a}$ auf die Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ der mit $^2/_3 \cos\varphi$ multiplizierte Vektor $\mathfrak{a}$ subtrahiert wird.[1])

Vermöge der Affinität $\mathfrak{A}^2$ entsprechen den Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ die Vektoren

$$^1/_3 Q\mathfrak{p} + P\mathfrak{q},\ P\mathfrak{p} + {}^1/_3 Q\mathfrak{p};$$

demnach entsprechen den Vektoren $\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q}$ die Vektoren:

$$(^1/_3 Q \pm P)(\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q}).$$

Der zum Zweibein senkrechte Vektor $\mathfrak{p} \mathfrak{i} \mathfrak{q}$ übergeht vermöge $\mathfrak{A}^2$ (da $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} \mathfrak{i} \mathfrak{q} = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p} \mathfrak{i} \mathfrak{q} = 0$ ist) in den Vektor

$$-{}^2/_3 Q\mathfrak{p} \mathfrak{i} \mathfrak{q}.$$

Daher: „Die in den Symmetrielinien des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ liegenden Vektoren, und zwar die in der Halbierungslinie, der Nebenhalbierungslinie, dem Lote des Zweibeins gelegenen Vektoren, werden vermöge $\mathfrak{A}^2$ resp. multipliziert mit

$$18) \qquad 2e_{2,3} = {}^1/_3 Q \pm P,\ 2e_1 = -{}^2/_3 Q,$$

worin $e_\varkappa$ die Wurzeln der kubischen Resolvente (13) der Biquadrik $u^4$ des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ sind (vgl. Art. 7).

11. Der Kegel und die Flächen zweiter Ordnung des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$. Ist $\mathfrak{b}$ ein Vektor, senkrecht zum Vektor $\mathfrak{a}_2$, so muß

$$\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b} = (\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0$$

sein. Die Beziehung zwischen den Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ist demnach symmetrisch.

Ist ferner $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, so genügt der Vektor $\mathfrak{a}$ der Gleichung

$$(19) \qquad \mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a}^2 = 0;$$

er liegt demnach auf einem Kegel zweiter Ordnung $K_2$, dem Kegel zweiter Ordnung des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$. Folglich gibt die obige symmetrische Beziehung die Polarbeziehung bezüglich $K_2$, welche dem Träger des Vektors $\mathfrak{a}$ die zum Vektor $\mathfrak{a}_2$ senkrechte Ebene zuweist.

---

[1]) Es ist auch

$$^1/_2 (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})^2 \mathfrak{q} + {}^1/_2 (\mathfrak{q}, \mathfrak{a})^2 \mathfrak{p} = (\mathfrak{p} (\mathfrak{q}, \mathfrak{a})^1)^1 + (\mathfrak{q} (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})^1)^1 + 2Q\mathfrak{a},$$

daher:

$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{p} \mathfrak{i} (\mathfrak{q} \mathfrak{i} \mathfrak{a}) + \mathfrak{q} \mathfrak{i} (\mathfrak{p} \mathfrak{i} \mathfrak{a}) + {}^4/_3 Q\mathfrak{a},$$

woraus sich $\mathfrak{a}_2$ ebenfalls leicht konstruieren läßt.



Digitized by Google

Ist der Vektor $\mathfrak{a}$ speziell ein Nullvektor, also seine Quadrik gleich dem Quadrate einer Linearform $\alpha$, und liegt er auf dem Kegel $K_3$ mit der Gleichung (19), so muß

$$(u^4, \alpha^4)^4 = (u\alpha)^4 = 0$$

sein. Daher: „Die Linearfaktoren der Form $u^4$ des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ gehören zu Nullvektoren, welche auf den Minimalgeraden des Kegels $K_2$ des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ liegen." Dieser Kegel ist ein spezieller, nämlich ein „gleichseitiger", da ihm unendlich viele rechtwinklige Dreikante eingeschrieben werden können.[1]) Nach Art. 6 folgt, daß die Teilvektoren des Zweibeins und seiner assoziierten Zweibeine auf den Fokalgeraden dieses Kegels liegen.

Die Gleichung

$$\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a}^2 = k \tag{20}$$

ist die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung $F_2$ des Zweibeins. Diese Fläche hat den Punkt $O$ zum Mittelpunkt und die Symmetrielinien des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ zu Achsen, da sie nur von diesem Zweibein und der Konstanten $k$ abhängt. Sie ist „gleichseitig", da auf ihr unendlich viele rechtwinklige Sechsseite liegen.

Man kann die Gleichung (20) der Fläche vermöge (17) auch in die Gestalt setzen:

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a}\, \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{a} - {}^2/_3\, Q\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = k. \tag{21}$$

Sind dann $c(\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q})$, $c\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{q}$ Vektoren, die resp. auf den Halbierungslinien oder dem Lote der Zweibeine liegen, und genügen sie der Gleichung (21), so ist:

$$4c^2(P+Q)({}^1/_3\, Q \pm P) = k, \quad -{}^4/_3\, c^2 Q(P^2 - Q^2) = k.$$

Die Quadrate der Längen dieser Vektoren sind aber

$$4c^2(P+Q),\ 2c^2(P^2 - Q^2),$$

daher folgt nach (18): „Die Quadrate der Längen der Halbachsen der $F_2$ sind $k/2e_\varkappa$."

Auch die allgemeine Fläche zweiter Ordnung, die den Punkt $O$ zum Mittelpunkt hat, und welche die Gleichung

$$\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{u}^0\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = 1 \tag{22}$$

besitzt, hat die Symmetrielinien des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ zu Achsen; ihre unendlich fernen Minimalpunkte haben die Linearformen der Form $u^4$ des Zweibeins als Formen. Die Quadrate der Halbachsen dieser Fläche sind $1/(2e_\varkappa + \mathfrak{u}^0)$.

[1]) S. hier und im folgenden: „Über die lineare Vektorfunktion als binäre doppeltquadratische Form", Wien. Ber., Bd. 113, Abt. IIa, p. 1089 ff.

Digitized by Google

12. Duploquadriken und Affinitäten. Es sei

$$(rx)^2\,(sy)^2 \tag{23}$$

eine Duploquadrik (binäre doppeltquadratische Form in den Veränderlichen $x$ und $y$). Erst Produkte der Koeffizienten der symbolischen Quadrik $(rx)^2$ mit Koeffizienten der symbolischen Quadrik $(sy)^2$ haben hier unsymbolische Bedeutung.

Jede lineare Beziehung zwischen den Quadriken $a^2$ und $a'^2$ kann aus einer solchen Duploquadrik abgeleitet werden als:

$$a'^2 = (ra)^2\,(s\xi)^2 = (ra)^2\,s^2.$$

Nun kann man den symbolischen Quadriken $\mathfrak{r} \equiv r^2$, $\mathfrak{f} \equiv s^2$ symbolische Vektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{f}$ entsprechen lassen und aus ihnen das „dyadische" Produkt

$$\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{r}; \mathfrak{f}$$

bilden. Dann ergibt sich durch Bildung des zweiten Produktes des Vektors $\mathfrak{a}$ mit dem Vektor $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{D}$ der Vektor

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}\,\mathfrak{f}. \tag{24}$$

Demnach liefert das von der allgemeinen Duploquadrik $(rx)^2\,(sy)^2$ herrührende dyadische Produkt $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{r}; \mathfrak{f}$ der beiden symbolischen Vektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{f}$ auch die allgemeine Affinität $\mathfrak{A}$ des Vektorraumes.

Durch Anwendung der Clebsch-Gordanschen Reihenentwicklung [1]) erhält man für die Duploquadrik

$$\begin{aligned}(rx)^2\,(sy)^2 &= ((u^4, x^2)^2 + (u^2, x^2)^1 + {}^1/_3\,u^0 x^2, y^2)^2 = {}^2)\\ &= (u^4, x^2y^2)^4 + (u^2, (x^2, y^2)^1)^2 + {}^1/_3\,u^0\,(x^2, y^2)^2,\end{aligned} \tag{25}$$

worin $x, y$ die Linearformen $(x\xi)$, $(y\xi)$ sind und die „Elementarkomitanten" $u^0$, $u^2$, $u^4$ der Duploquadrik durch 0-, 1-, 2malige Anwendung des $\Omega$-prozesses aus ihr gewonnen werden als:

$$u^4 = r^2s^2,\quad u^2 = (rs)\,rs,\quad u^0 = (rs)^2.$$

Diesen Elementarkomitanten entsprechen die aus den symbolischen Vektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{f}$ durch Bildung ihrer $0^{\text{ten}}$, $1^{\text{ten}}$ und $2^{\text{ten}}$ Pro-

[1]) Vgl. „Über die lineare Vektorfunktion etc." l. c. p. 1081. — Die Bezeichnung $\mathfrak{r}; \mathfrak{f}$ für die Dyadik $\Phi$ von Gibbs-Wilson, l. c. p. 265, rührt von Jaumann her, s. Grundlagen der Bewegungslehre, Leipzig 1905, p. 28.

Das dyadische Produkt $\mathfrak{D}$ kann auch durch eine bilineare Form in den Cartesischen Koordinaten zweier Vektoren gegeben werden oder, wenn man den Vektor nach Art. 4 durch eine ternäre Linearform darstellt, durch das Produkt zweier symbolischer ternären Linearformen.

[2]) S. die in: „Über Reihenentwicklungen etc." l. c. pag. 1211 angegebene Modifikation der Clebsch-Gordanschen Entwicklung.



Digitized by Google

dukte gebildeten Vielbeine des Produktes $\mathfrak{D}$ oder seiner Affinität $\mathfrak{A}$, nämlich:

$$\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{r}\,\mathfrak{f},\quad \mathfrak{u} = \mathfrak{r}\,i\,\mathfrak{f},\quad \mathfrak{u}^0 = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f} = u^0,$$

wobei $\mathfrak{u}^2$ eines der drei assoziierten Zweibeine sein kann, welche durch die Biquadrik $u^4$ bestimmt sind. [1])

Werden nun die Nullvektoren mit den Quadriken $x^2$, $y^2$ mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnet, so hat man aus (25) als Entwicklung für das dyadische Produkt $\mathfrak{D}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{r};\mathfrak{f} &= \mathfrak{u}^2\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}\,i\,\mathfrak{y} + {}^1/_3\,u^0\,\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y} = \\ &= (\mathfrak{r}\mathfrak{f})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + \mathfrak{r}\,i\,\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{x}\,i\,\mathfrak{y} + {}^1/_3\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}\,\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}.\end{aligned} \tag{26}$$

Setzt man in (25) $x = \alpha$, $y = \xi$, so ergibt sich für die Quadrik $\alpha'^2$ des Vektors $\mathfrak{a}'$, welcher dem Vektor $\mathfrak{a}$ mit der Quadrik $\alpha^2$ vermöge der Affinität $\mathfrak{A}$ entspricht:

$$\alpha'^2 = (u^4, \alpha^2)^2 + (u^2, \alpha^2)^1 + {}^1/_3\,u^0\,\alpha^2$$

und demnach die Beziehung zwischen den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$:

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{u}^2 \dot{;} \mathfrak{a} + \mathfrak{u}\,i\,\mathfrak{a} + {}^1/_3\,u^0\,\mathfrak{a}. \tag{27}$$

Hiedurch ist die durch die Duploquadrik $(rx)^2(sy)^2$ oder das dyadische Produkt $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{r};\mathfrak{f}$ gegebene Affinität im Sinne des Art. 9 in die Summe von vektorischen Produkten des Vektors $\mathfrak{a}$ zerlegt.

Ist die Duploquadrik $(rx)^2(sy)^2$ symmetrisch in $x$ und $y$, so liefert sie ein symmetrisches Produkt $\mathfrak{D}$. Für ein solches Produkt verschwindet dessen Vektor $\mathfrak{u}$. Denn bei Vertauschung von $x$ und $y$ ändert das von $u^3$ herrührende Glied in (25), sein Zeichen muß also verschwinden, wenn $\mathfrak{D}$ symmetrisch sein soll. Das symmetrische Produkt $\mathfrak{D}$ hängt demnach nur von dem Zweibein $\mathfrak{u}^2$ und dem Skalar $u^0$ ab und seine Affinität hat die Gleichung:

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{u}^2 \dot{;} \mathfrak{a} + {}^1/_3\,u^0\,\mathfrak{a}.$$

Ändert aber die Duploquadrik $(rx)^2(sy)^2$ bei Vertauschung von $x$ und $y$ ihr Zeichen, so müssen die Formen $u^4$, $u^0$ verschwinden, das Produkt $\mathfrak{D}$ wird ein antisymmetrisches, das nur von dem Vektor $\mathfrak{u}$ abhängt und dessen Affinität die Gleichung hat:

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{u}\,i\,\mathfrak{a}.$$

Durch die Entwicklung (26) ist demnach auch das allgemeine Produkt $\mathfrak{D}$ [und durch (27) seine Affinität] zerlegt in einen symmetrischen Teil, der nur durch das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ und den Skalar $u^0$

[1]) Für eine reelle Affinität $\mathfrak{A}$ bestimmt sich dieses Zweibein als reelles unter den der Form $u^4$ zugeordneten assoziierten Zweibeinen eindeutig (s. den folgenden Art.).

Digitized by Google

und einen antisymmetrischen Teil, der nur durch den Vektor $\mathfrak{u}$ des Produkts (der Affinität) bestimmt ist. [1])

13. Reelle Affinitäten. „Die durch die Duploquadrik $(rx)^2(sy)^2$ gegebene Affinität $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann reell, d. h. jedem reellen Vektor $\mathfrak{a}$ entspricht vermöge $\mathfrak{A}$ wieder ein reeller Vektor $\mathfrak{a}'$, wenn jeder der symbolischen Quadriken $(rx)^2$, $(sy)^2$ realisiert, wenn also gesetzt werden kann (s. Art. 1):

$$(28)\qquad \begin{cases} (rx)^2 = (p + iq)\,x_1^2 - 2il\,x_1x_2 + (p - iq)\,x_2^2 \\ (sy)^2 = (p' + iq')\,y_1^2 - 2il'\,y_1y_2 + (p' - iq')\,y_2^2. \end{cases}$$

Dies kann in der folgenden Weise (allerdings bloß durch Konstantenzählung) bewiesen werden. Durch Multiplikation der Quadriken (27) erhält man die Koeffizienten:

$$(28)\qquad (pp' - qq') + i\,(qp' + pq'),\ 2\,(ql' - ipl') \text{ u. s. w.}$$

der Duploquadrik, in welcher erst die reellen Teile und die Faktoren von $i$ unsymbolische Bedeutung haben. Diese neun Zahlen geben aber die Konstanten der allgemeinen Affinität.

Ist nun $\mathfrak{A}$ reell, realisieren also die Quadriken $(rx)^2$ und $(sy)^2$, so sind auch $\mathfrak{u}^0$ und $\mathfrak{u}$ reell. Denn es ist zunächst

$$\mathfrak{u}^0 = pp' + qq' + ll'$$

reell, weil sich dieser Ausdruck in reeller Weise durch die unsymbolischen Koeffizienten (28) der Duploquadrik ausdrückt. Ferner realisiert die Quadrik des Vektors $\mathfrak{u}$ als erste Überschiebung der realisierenden Quadriken $r^2$, $s^2$ (vgl. Art. 5).

Die Biquadrik $u^4 = r^2 s^2$ ist das Produkt der symbolischen realisierenden Quadriken $r^2$, $s^2$; es soll gezeigt werden, daß sie dann auch das Produkt zweier unsymbolischen realisierenden Quadriken ist, so daß sie dann ein reelles Zweibein bestimmt. Man kann nämlich für die symbolischen realisierenden Quadriken $r^2$, $s^2$ setzten (s. Art. 1)

$$r^2 = i\alpha\alpha',\ s^2 = i\beta\beta',$$

wo $\alpha$, $\alpha'$ und $\beta$, $\beta'$ symbolische Linearformen sind, die in der Beziehung (5) stehen, so daß

$$u^4 = i\alpha\alpha'\ i\beta\beta'.$$

Ist nun $\varepsilon = (\varepsilon\xi)$ ein Linearfaktor der Form $u^4$, so muß

$$(29)\qquad i\,(\alpha\varepsilon)\,(\alpha'\varepsilon)\,i\,(\beta\varepsilon)\,(\beta'\varepsilon) = 0$$

[1]) Die „konjugierte" Dyadik $\Phi_c$ (in der Bezeichnung von Gibbs-Wilson) der Dyadik $\Phi$, welche durch das Produkt $\mathfrak{D}$ gegeben ist, hat die Duploquadrik $(sx)^2(ry)^2$, welche die Elementarkomitanten $u^4$, $-u^2$, $u^0$, also die Vielbeine $\mathfrak{u}^2$, $-\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}^0$ besitzt. Ferner sind der Vektor $\Phi_x$ und der Skalar $\Phi_s$ der Dyadik $\Phi$ (s. Gibbs-Wilson) gegeben als

$$\Phi_x = 2\mathfrak{u},\ \Phi_s = {}^1/_2\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}.$$

Digitized by Google

sein, da aber (s. Art. 1) die Produkte

$$i(\alpha\varepsilon)(\alpha'\varepsilon),\ i(\alpha\varepsilon')(\alpha'\varepsilon')$$

konjugiert sind, so ist die linke Seite von (30) konjugiert zu dem Produkte

$$i(\alpha\varepsilon')(\alpha'\varepsilon')\,i(\beta\varepsilon')(\beta'\varepsilon'),$$

das demnach auch verschwindet. Wenn also die Biquadrik $u^4$ den Faktor $\varepsilon$ besitzt, so hat sie auch den Faktor $\varepsilon'$. Daher kann gesetzt werden:

$$u^4 = ci\varepsilon\varepsilon' i\eta\eta'. \tag{31}$$

Nun hat das Produkt $u^4$ der realisierenden symbolischen Quadriken $r^2$, $s^2$ nach (28) Koeffizienten von $\xi_1^4$ und $\xi_2^4$, die konjugiert sind, daher müssen die Koeffizienten von $\xi_1^4$, $\xi_2^4$ in (31) auch konjugiert sein. Weil nun dasselbe von dem Produkte $i\varepsilon\varepsilon' i\eta\eta'$ in (31) gilt, muß $c$ reell sein.

Demnach ist eines der durch die Biquadrik $u^4$ bestimmten Zweibeine, es sei mit $\mathfrak{u}^2$ bezeichnet, reell, während die beiden anderen ihm assoziierten Zweibeine imaginär sind.

Da die Entwicklung der Duploquadrik $(rx)^2(sy)^2$ in die Clebsch-Gordansche Reihe eindeutig ist, so gehört zu dieser Duploquadrik, falls sie eine reelle Affinität darstellt, auch ein bestimmtes System von reellen Vielbeinen $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}^0$.

14. Automorphe Produkte $\mathfrak{D}$. Um die diversen automorphen Produkte $\mathfrak{D} = \mathfrak{r};\mathfrak{f}$ zu bestimmen,[1]) das sind solche, die eine Gruppe $G$ von Rotationen um $O$, Spiegelungen an Ebenen durch $O$ sowie Drehspiegelungen um Achsen durch $O$ gestatten, beachte man, daß diese Transformationen durch lineare Transformationen der binären Veränderlichen $x, y$ der Duploquadrik $(rx)^2(sy)^2$ gegeben sind. Diese linearen Transformationen müssen dann die Elementarkomitanten $u^4$, $u^2$, $u^0$ der Duploquadrik in sich überführen und demnach muß die Gruppe $G$ das der Form $u^4$ entsprechende Zweibein $\mathfrak{u}^2$ und den $u^2$ entsprechenden Vektor $\mathfrak{u}$ ungeändert lassen.

Das Produkt $\mathfrak{D}$ soll die Inversion an $O$ gestatten, d. h. sich bei Änderung der Vorzeichen der symbolischen Vektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{f}$ nicht ändern; demnach gibt eine Spiegelung, die $\mathfrak{D}$ eventuell gestattet, gefolgt von dieser Inversion eine Rotation um 180°. Folglich braucht man, um alle $\mathfrak{D}$ zu bestimmen, die eine Gruppe $G$ gestatten, nur diejenigen Systeme $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{u}$ aufzusuchen, die eine Gruppe von Rotationen allein zulassen. Eine auftretende Drehspiegelung könnte, da sie $\mathfrak{u}^2$ nicht verändern soll, nur um 180° erfolgen, wäre also mit der a priori gegebenen Inversion identisch.

[1]) Die Koeffizientensysteme für diese in Cartesischen Koordinaten gegebenen Produkte s. bei Voigt, Komp. d. Phys., p. 137.

Digitized by Google

Charakterisiert das Produkt $\mathfrak{D}$ eine physikalische Erscheinung, die dann auch durch das Zweibein $u^2$, den Vektor $u$ und den Skalar $u^0$ von $\mathfrak{D}$ bestimmt ist, so geben die verschiedenen Fälle automorpher $\mathfrak{D}$ die Fälle symmetrischer Erscheinungen. Die Gruppe $G$ des betreffenden automorphen $\mathfrak{D}$ hat dann nach dem F. Neumannschen Grundgesetz die Gruppe der geometrischen oder kristallographischen Symmetrien[1]) als Untergruppe.

Klassifiziert man nun das Zweibein allein je nach der Gruppe, die es gestattet, so erhält man die folgenden Fälle:

I. Fälle ohne Isotropieachse. Das allgemeine Zweibein $u^2$ mit fünf Konstanten: $u^2 = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$, wo $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gleichlange Vektoren sind.

I*a*. Es gestattet die Gruppe der Identität; die zugehörige geometrische Symmetrie ist die des triklinen Systems. Der Vektor $u$ fällt in keine der Symmetrielinien von $u^2$ und liefert drei Konstante. Demnach hat man mit $u^0$ zusammen im ganzen $5 + 3 + 1 = 9$ Konstante für $\mathfrak{D}$, was dem allgemeinen Produkte $\mathfrak{D}$ entspricht.

I*b*. $u^2$ gestattet die zyklische Gruppe $C^2$. Die geometrischen Symmetrien, die hier auftreten können, gehören dem monoklinen System an. Der Vektor $u$ fällt auf die Achse von $C^2$ und liefert demnach nur noch eine weitere Konstante, so daß sich zusammen mit $u^0$ im ganzen sieben Konstante ergeben. Es ist $u^2 = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$, $u = c\,(\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q})$ oder $u = c\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{q}$, $u^0$ beliebig. Wird das Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ zu Grunde gelegt, so kann das Zweibein in seiner ternären Darstellung (s. Art. 4)

$$u^2 = \alpha_0\,\mathfrak{i}^2 + 2\,\alpha_1\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{j} + \alpha_2\,\mathfrak{j}^2$$

gegeben werden. Dann ist $u = \alpha\,\mathfrak{i}$ oder $= \alpha\,\mathfrak{j}$ oder $= \alpha\,\mathfrak{k}$, je nachdem um welche Koordinatenachse die Rotationen der Gruppe, die $u^2$ in sich transformiert, erfolgen. Folglich ergeben sich hier die fünf Konstanten $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha$, $u^0$, also um zwei Konstante weniger als oben (und ebenso viele wie bei Voigt, l. c.), weil das Zweibein in die angegebene spezielle Lage zum Koordinatensystem gebracht wurde.

I*c*. Die Gruppe $C^2$ in I*b* erweitert sich durch eine Rotation von $180^0$ um eine Achse, die senkrecht ist zur Achse von $C^2$ zur Vierergruppe $V$. Hier können die Formen des rhombischen Systems

[1]) Die verschiedenen geometrischen Symmetrien oder kristallographischen Gruppen sind nach Schönflies „Kristallsysteme und Kristallstruktur", Leipzig 1891, Voigt, Komp. d. Phys., I., p. 134, durch die folgenden Gruppen charakterisiert. Die Kristallgruppe ist:
triklin: Identität;
monoklin: zyklische Gruppe $C^2$;
rhombisch: diedrische Gruppe $D^2$ = Vierergruppe $V$;
rhomboëdrisch: zyklische Gruppe $C^3$; diedrische Gruppe $D^3$;
tetragonal: zyklische Gruppe $C^4$; diedrische Gruppe $D^4$;
hexagonal: zyklische Gruppe $C^6$; diedrische Gruppe $D^6$;
regulär: Oktaedergruppe, Tetraedergruppe.

Digitized by Google

auftreten. Der Vektor $\mathfrak{u}$ verschwindet, da er $V$ nicht gestatten kann. Sechs Konstante, da $\mathfrak{u}^2$ und $u^0$ beliebig sind. Es kann gesetzt werden $\mathfrak{u}^2 = \alpha_0\, \mathfrak{i}^2 + \alpha_2\, \mathfrak{j}^2$, so daß dann die Symmetrielinien des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ in die Koordinatenachsen fallen. Mit $u^0$ ergeben sich dann nur mehr drei Konstanten.

II. Fälle mit Isotropieachse. Das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ ist speziell: $\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{p}\,\mathfrak{p}$ und gestattet alle Rotationen um seinen Träger. Der Vektor $\mathfrak{u}$, der dieselben Rotationen gestatten soll, hat denselben Träger wie $\mathfrak{u}^2$, also ist $\mathfrak{u} = c\,\mathfrak{p}$, $u^0$ beliebig; fünf Konstanten. Die physikalische Erscheinung hat den Träger von $\mathfrak{u}^2$ als Isotropieachse. Zyklische Gruppen der rhomboedrischen, tetragonalen, hexagonalen Kristallsysteme. Es kann gesetzt werden: $\mathfrak{u}^2 = a\,\mathfrak{i}^2$, $\mathfrak{u} = c\,\mathfrak{i}$, wo sich dann mit $u^0$ drei Konstanten ergeben.

III. Fall der kompletten Isotropie. $\mathfrak{u}^2$ verschwindet identisch. Gruppe sämtlicher Rotationen um $O$. Demnach verschwindet auch $\mathfrak{u}$ identisch. Es bleibt nur die Konstante $u^0$. Reguläres System oder isotrope Körper.

Symmetrisch sind von den vorstehenden Fällen von vornherein (wegen des Verschwindens von $\mathfrak{u}$) die Produkte $\mathfrak{D}$ der Fälle Ic und III. In den anderen Fällen ergeben sich symmetrische $\mathfrak{D}$, für $\mathfrak{u} \equiv o$, so daß es im ganzen fünf Klassen symmetrisch-automorpher $\mathfrak{D}$ gibt.

## § 4. Unendlich kleine Deformationen und elastische Isotropien.

15. Eine unendlich kleine Deformation oder ein Strain kann durch ein Produkt $\mathfrak{D} = \mathfrak{r}; \mathfrak{f}$ gegeben werden. Vermöge dieses Strains entspricht dem Vektor $\mathfrak{a}$ der Verrückungsvektor $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{f}$, der nach (27) auch in die Gestalt gesetzt werden kann:

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{u}^2 \dot{\imath}\, \mathfrak{a} + \mathfrak{u}\, \mathfrak{i}\, \mathfrak{a} + {}^1/_3\, u^0\, \mathfrak{a}. \tag{32}$$

Der Strain zerfällt demnach in drei Teile, welche resp. durch das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ des Strains, den Vektor $\mathfrak{u}$ und den Skalar $u^0$ des Strains gegeben sind.

Ist der Strain rein, also $\mathfrak{r}; \mathfrak{f}$ symmetrisch, so ist $\mathfrak{u} \equiv 0$; er hat dann nach (17) die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}' &= \mathfrak{u}^2 \dot{\imath}\, \mathfrak{a} + {}^1/_3\, u^0\, \mathfrak{a} \\ &= {}^1/_2\, \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a}\, \mathfrak{q} + {}^1/_2\, \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{a}\, \mathfrak{p} - {}^1/_3\, (2\, Q - u^0)\, \mathfrak{a}. \end{aligned} \tag{33}$$

Nach Art. 10 kann dieser Vektor $\mathfrak{a}'$ leicht konstruiert werden, wenn das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ des Strains und ein Skalar $u^0$ gegeben sind. Man bestimme die Durchstoßpunkte $A, B$ des Halbstrahls, der von $O$ ausgeht und die Richtung des Vektors $\mathfrak{a}$ hat, mit den ein für allemal gezeichneten Kugeln mit dem Zentrum $O$ und den Radien $P$ und ${}^2/_3\, P \cos\varphi - u^0$; ferner bestimme man die Summe $OC$ der Projektionen des Vektors $OA$ auf die Träger der Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$. Dann ist $\mathfrak{a}'$ gleichgerichtet mit dem Vek[illegible] und $\bar{a}$-mal so groß.

Digitized by Google

Sind $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ zwei zueinander senkrechte Vektoren, so hat man die folgenden Vielbeine einer:

| | |
|---|---|
| Dehnung längs $\mathfrak{v}$: | $\mathfrak{v}\mathfrak{v}, 0, \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}/6$; |
| Querkontraktion gegen $\mathfrak{v}$: | $\mathfrak{v}\mathfrak{v}, 0, -\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}/3$; |
| Einfachen Scherung: | $\mathfrak{v}\mathfrak{w}, \mathfrak{v}\,i\,\mathfrak{w}, 0$; |
| Doppelscherung: | $\mathfrak{v}\mathfrak{w}, 0, 0$. |

16. Es soll nun der Teil des Strains betrachtet werden, der allein durch das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ gegeben ist, der Zweibeinstrain. Er ordnet dem Vektor $\mathfrak{a}$ den Vektor

$$(34) \qquad \mathfrak{u}^2 \dot{2}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q} \dot{2}\, \mathfrak{a} = {}^1/_2\,\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{q} + {}^1/_2\,\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{p} - {}^2/_3\,Q\,\mathfrak{a}$$

zu.[1]) Den Vektoren $\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}\,i\,\mathfrak{q}$, die resp. auf den Halbierungslinien und dem Lote des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ liegen, entsprechen (s. Art. 10) vermöge dieses Strains die Vektoren

$$({}^1/_3\,Q \pm P)(\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q}), \quad -{}^2/_3\,Q\,\mathfrak{p}\,i\,\mathfrak{q}.$$

Demnach sind diese Geraden Hauptachsen des Strains und die entsprechenden Hauptdilatationen sind (s. Art. 7):

$$35) \qquad \tau_{2,3} = {}^1/_3\,Q \pm P = 2\,e_{2,3}, \quad \tau_1 = -{}^2/_3\,Q = 2\,e_1.$$

Daher: Die Hauptdilatation des Zweibeinstrains längs des Lotes des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ ist $-{}^2/_3$mal dem skalaren Produkt dieses Zweibeins.[2])

Aus (35) ergibt sich, daß die durch den Zweibeinstrain hervorgerufene Volumdilatation, die durch $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ gegeben ist, verschwindet.[3]) Daher: Durch den Skalar $\mathfrak{u}^0$ des allgemeinen Strains von der Gestalt (32) ist wie bekannt die durch den Strain bewirkte Dilatation des Volumelements gegeben, durch den Vektor die Rotation des Volumelements. „Das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ eines Strains bestimmt denjenigen Teil des Strains, der allein eine Gestaltveränderung des Volumelements hervorruft.

---

[1]) Ein solcher spezieller Strain ist die Doppelscherung (s. Art. 15); nur stehen bei dieser die Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ (die in Art. 15 mit $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ bezeichnet wurden) aufeinander senkrecht.

[2]) Die beiden anderen Hauptdilatationen werden ebenso aus den skalaren Produkten der zu $\mathfrak{u}^2$ assoziierten Zweibeine gefunden.

[3]) Hiezu kann man auch gelangen, indem man den durch das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ gegebenen Strain durch die Dyadik:

$$\Phi = {}^1/_2\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} + {}^1/_2\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{p} - {}^1/_3\,\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}\,\mathfrak{I}$$

gegeben denkt. Es ist dann die Volumdilatation gleich dem Skalar der Dyadik

$$\Phi_s = {}^1/_2\,\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} + {}^1/_2\,\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{p} - {}^1/_3\,\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}\,\mathfrak{I}_s = 0,$$

da der Skalar $\mathfrak{I}_s$ des Idemfaktors $\mathfrak{I}$ gleich 3 ist.

Digitized by Google

Dieser Teil des Strains wird also durch Bildung des zweiten Produkts des Vektors $\mathfrak{a}$ mit dem Zweibein $\mathfrak{u}^2$ gefunden; er erscheint daher allein durch die binäre Operation der zweiten Überschiebung charakterisiert, während sich die Teile der Dilatation und der Rotation des Volumelements durch $0^{te}$ und $1^{te}$ Überschiebung ergeben.

Für den reinen Strain (33) tritt zu den Hauptdilatationen des Zweibeinstrains noch die Dilatation $\frac{1}{3}\mathfrak{u}^0$, die von dem Gliede $\frac{1}{3}\mathfrak{u}^0\mathfrak{a}$ des Strains hervorgerufen wird, so daß die Hauptdilatationen dieses reinen Strains sind:

$$\sigma_\varkappa = \tau_\varkappa + \tfrac{1}{3}\mathfrak{u}^0 = 2e_\varkappa + \tfrac{1}{3}\mathfrak{u}^0. \tag{36}$$

Die Symmetrielinien des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ sind auch hier die Hauptachsen des Strains; die Hauptdilatation längs des Lotes des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ ist:

$$\sigma_3 = \tfrac{1}{3}(\mathfrak{u}^0 - 2Q).$$

17. Die auf die Volumeinheit bezogene potentielle Energie $\varphi$ des Volumelements eines elastischen isotropen Mediums mit dem durch Gleichung (33) gegebenen reinen Strain ist in der Helmholtzschen Normalform ausgedrückt durch

$$\varphi = \tfrac{1}{3}K\Sigma(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \tfrac{1}{2}H(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Hierin ist nach (36), da $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ ist:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \mathfrak{u}^0,$$

$$\Sigma(\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 4\Sigma(e_2 - e_3)^2 = -24\Sigma e_2 e_3 = 6g_2.$$

Daher ist

$$\varphi = 2Kg_2 + \tfrac{1}{2}H\mathfrak{u}^{0\,2}.$$

Hierin ist der erste Teil allein durch das Zweibein des Strains, der zweite Teil allein durch den Skalar des Strains bestimmt.[1])

Vermöge des im Art. 7 für $g_2$ gegebenen Ausdruckes ist auch:

$$2\varphi = KP^2 + \tfrac{1}{3}KQ^2 + H\mathfrak{u}^{0\,2} =$$

$$= KP^2(1 + \tfrac{1}{3}\cos^2\varphi) + H\mathfrak{u}^{0\,2}.$$

Daher setzt sich die aus dem Widerstande gegen Gestaltsveränderungen herrührende Energie weiters aus zwei Teilen zusammen, die resp. proportional sind dem Quadrate der Größe und dem Quadrat des skalaren Produkts des Zweibeins $\mathfrak{u}^2$ des Strains.

[1]) Dieser Ausdruck für die Energie des isotropen Mediums wird in Art. 27 nochmals direkt abgeleitet werden. Nach obigem ist auch

$$\varphi = K\mathfrak{r}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{f} + H\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}.$$

Digitized by Google

Der Vektor $\mathfrak{a}''$ des Streß, der durch den Strain bewirkt wird, wird durch Differentiation von $-\varphi$ nach den Strainkoordinaten gefunden. Das dyadische Produkt des Streß in der Form (26) ergibt sich daher aus:

$$-\varphi = -K\mathfrak{r}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{f} - {}^1/_2 H\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}$$

durch Evektantenbildung bezüglich $\mathfrak{r}\mathfrak{f}$ als

$$-2K\mathfrak{r}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{x}\mathfrak{y} - H\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}\,\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{z};$$

daher folgt:

$$\mathfrak{a}'' = -2K\mathfrak{r}\mathfrak{f}\,\dot{\imath}\,\mathfrak{a} - H\mathfrak{u}^0\,\mathfrak{a} = -2K\mathfrak{u}^2\,\dot{\imath}\,\mathfrak{a} - H\mathfrak{u}^0\mathfrak{a}.$$

Auch dieser Vektor kann nach Art. 10 leicht konstruiert werden, wenn das Zweibein $\mathfrak{u}^2$ und der Skalar $\mathfrak{u}^0$ des Strains sowie der Vektor $\mathfrak{a}$ gegeben sind.

18. Ausdrücke der Formen des Strains durch die Strainkoordinaten. Es seien die Gleichungen des Strains, dessen Koordinaten $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ sind:

$$(37)\qquad \begin{cases} x' = x_x\,x + {}^1/_2\,x_y\,y + {}^1/_2\,x_z\,z \\ y' = {}^1/_2\,y_x\,x + y_y\,y + {}^1/_2\,y_z\,z \\ z' = {}^1/_2\,z_x\,x + {}^1/_2\,z_y\,y + z_z\,z \end{cases}$$

wo $x, y, z$; $x', y', z'$ resp. die Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ sind.

Führt man nach (2) statt der Koordinaten $x$, $y$, $z$ die Koeffizienten des Quadrik $\mathfrak{a}$ ein, so erhält man

$$x' = {}^1/_2\,x_x(A_0 + A_2) + i\,x_y(A_2 - A_0) + {}^1/_2\,i\,z_x\,A_2, \text{ u. s. w.}$$

und hieraus nach (1) die Quadrik des Vektors $\mathfrak{a}'$. Wird hierin $y$ statt $\xi$ geschrieben und

$$A_0 = x_2^2,\ A_1 = -x_1\,x_2,\ A_2 = x_1^2$$

gesetzt, so ergibt sich als Duploquadrik des Strains:

$$\begin{aligned} &{}^1/_2\{(x_x + y_y)\,x_2^2 + (x_x - y_y + i\,x_y)\,x_1^2 + (y_z - i\,z_x)\,x_1\,x_2\}\,y_1^2 + \\ &{}^1/_2\{(x_x - y_y - i\,x_y)\,x_2^2 + (x_x + y_y)\,x_1^2 - (y_z - i\,z_x)\,x_1\,x_2\}\,y_2^2 + \\ &{}^1/_2\{-(y_z + i\,z_x)\,x_2^2 + (y_z - i\,z_x)\,x_1^2 - 4\,z_z\,x_1\,x_2\}\,y_1\,y_2. \end{aligned}$$

Wird hier $x = y = \xi$ gesetzt, so erhält man die Elementar-Komitante $u^4$ dieser Duploquadrik oder die Biquadrik des Zweibeins $u^2$ des Strains als:

$$\begin{aligned} u^4 \equiv {}&{}^1/_2\,(x_x - y_y + i\,x_y)\,\xi_1^4 + (y_z - i\,z_x)\,\xi_1^3\,\xi_2 + (x_x + y_y - 2\,z_z)\,\xi_1^2\,\xi_2^2 \\ &+ {}^1/_2\,(x_x - y_y - i\,x_y)\,\xi_2^4 - (y_z + i\,z_x)\,\xi_1\,\xi_2^3 \equiv \\ \equiv {}&u_0\,\xi_1^4 + 4\,u_1\,\xi_1^3\,\xi_2 + 6\,u_2\,\xi_1^2\,\xi_2^2 + 4\,u_3\,\xi_1\,\xi_2^3 + u_4\,\xi_2^4. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Durch Anwendung des Ω-prozesses an der letzten Duplo-quadrik erhält man ferner:

$$^1/_2 (x_x + y_y + z_z)(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Setzt man hier $y = x = \xi$, so erhält man identisch 0, was dem Umstande entspricht, daß die Elementarkomitante $u^2$ der Duplo-quadrik identisch verschwindet, da hier ein reiner Strain vorliegt.

Durch Anwendung des Ω-prozesses an der letzten bilinearen Form erhält man schließlich die Elementarinvariante der Duplo-quadrik:

$$u^0 = x_x + y_y + z_z.$$

19. Die fünf Invarianten bei elastischer Isotropieachse. Hat das Medium eine elastische Isotropieachse und wird diese als $z$-Achse gewählt, so läßt sich nach Beltrami die potentielle Energie aus den folgenden, bei Rotationen um die $z$-Achse invarianten in den Strainkoordinaten quadratischen Ausdrücken:

$$B_1 = z_z^2,\ B_2 = (x_x + y_y)^2,\ B_3 = (x_x + y_y) z_z,\ B_4 = x_x y_y - ^1/_4 x_y^2,$$

$$B_5 = ^1/_4 (y_z^2 + x_z^2)$$

linear ableiten.

Diese fünf Beltramischen Invarianten lassen sich ersetzen durch Produkte $\mathfrak{P}_k$, die gebildet werden aus dem Zweibein $\mathfrak{u}^2$, dem Skalar $\mathfrak{u}^0$ des Strains und einem Vektor $\mathfrak{z}$, der auf der Isotropieachse liegt. Denn die $B_k$ sind invariant für alle Rotationen um $O$ und multiplizieren sich bei einer Streckung mit dem Zentrum $O$ mit einem Faktor; daher müssen sie bei allen binären linearen Transformationen invariant bleiben und sich folglich durch die Invarianten des vollen Systems der Formen $u^4$, $u^0$ und der Quadrik $\mathfrak{z}$ ausdrücken lassen. Da aber die $B_k$ quadratisch in den Strainkoordinaten sind, kommen hiezu nur die Invarianten des Systems in Betracht, die in den Koeffizienten von $u^4$ und in $u^0$ höchstens vom zweiten Grade sind.[1]) Es sind dies die Invarianten (vgl. Art. 7)

$$(u^4, \mathfrak{z}^2)^4,\ g_2,\ (\mathfrak{h}, \mathfrak{z}^2)^4,\ (\mathfrak{z}, \mathfrak{z})^2.$$

Demnach ergeben sich durch Hinzutreten von $u^0 = \mathfrak{u}^0$ die folgenden invarianten Produkte

$$\mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{u}^0 \mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{z}^2,\ (\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{z}^2)^2,\ g_2,\ f^2 \cdot \mathfrak{z}^2,\ \mathfrak{z} \cdot \mathfrak{z}.$$

[1]) Bezüglich des Systems einer Biquadrik und einer Quadrik s. Clebsch, Binäre Formen, p. 212.

Digitized by Google

Nun kann angenommen werden, daß der Vektor $\mathfrak{z}$ der Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ ist, so daß $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{z} = 2$ gesetzt werden kann und sich ergibt: Die bei einer elastischen Isotropieachse, welche den Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ trägt, auftretenden invarianten Produkte $\mathfrak{P}_k$ sind:

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{u}^{0^2},\ \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{u}^0\,\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{k}^2,\ \mathfrak{P}_3 = (\mathfrak{u}^2 \cdot \mathfrak{k}^2)^2,\ \mathfrak{P}_4 = g_2,\ \mathfrak{P}_5 = \mathfrak{h}^2 \cdot \mathfrak{k}^2;$$

aus ihnen läßt sich die potentielle Energie des Mediums linear ableiten.

Die Produkte $\mathfrak{P}_k$ müssen sich durch die Invarianten $B_k$ linear ausdrücken lassen. Zunächst ist

$$\mathfrak{P}_1 = (x_x + y_y + z_z)^2 = B_1 + B_2 + 2\,B_3.$$

Ferner hat nach (3) der Vektor $\mathfrak{k}$ die Quadrik $-2\,i\,\xi_1\,\xi_2$, also hat $\mathfrak{k}^2$ die Quadrik $-4\,\xi_1^2\,\xi_2^2$; da nun $[\mathfrak{u}^2\,\mathfrak{k}^2] = -4\,u_2$ ist, so ist

$$\mathfrak{P}_2 = -4\,u_2\,\mathfrak{u}^0 = \tfrac{2}{3}\,(2\,B_1 - B_2 + B_3).$$

Es gilt ferner für die folgenden Produkte der Koeffizienten von $u^4$:

$$u_0\,u_4 = {}^1/_4\,B_2 - B_4,\ u_1\,u_3 = {}^1/_4\,B_5,\ u_2^2 = {}^1/_9\,(B_1 + {}^1/_4\,B_2 - B_3);$$

daher ist:

$$\mathfrak{P}_3 = {}^{16}/_9\,(B_1 + {}^1/_4\,B_2 - B_3),$$
$$\mathfrak{P}_4 = {}^1/_3\,(B_1 + B_2 - B_3 - 3\,B_4 - 3\,B_5),$$
$$\mathfrak{P}_5 = -{}^2/_3\,(2\,B_1 + {}^3/_4\,B_2 - 2\,B_3 - B_4 + 4\,B_5).$$

## § 5. Die immanenten Vielbeine elastischer Medien.

20. Die potentielle Energie $\varphi$ eines elastischen anisotropen Mediums ist eine in den Koordinaten $x_x,\ y_y,\ z_z,\ y_z,\ z_x,\ x_y$ des reinen Strains quadratische Form gegeben durch:

$$2\varphi \equiv c_{11}\,x_x^2 + 2\,c_{12}\,x_x\,y_y + 2\,c_{13}\,x_x\,z_z + \cdots + 2\,c_{56}\,z_x\,x_y + c_{66}\,x_y^2,$$

wo die 21 Koeffizienten $c_{kh}$ die elastischen Konstanten sind.

Demnach läßt sich $\varphi$, sobald der Strain durch die Duploquadrik $(rx)^2\,(sy)^2$ gegeben wird, darstellen als homogene Funktion zweiten Grades der Koeffizienten dieser Duploquadrik, also der Koeffizienten ihrer Elementarkovariante $u^4$ und ihrer Elementarinvariante $u^0$. Da $\varphi$ ferner bei Transformationen auf ein anderes Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt $O$ ungeändert bleibt, ist $\varphi$ eine simultane Invariante der Komitanten $u^4, u^0$. Nun sind $u^4,\ h,\ g_2$ die Komitanten ersten und zweiten Grades von $u^4$ (s. Art. 7); daher sind die Komitanten zweiten Grades von $u^4$ und $u^0$ und damit der Duploquadrik:

$$u^{4^2},\ u^4\,u^0,\ h,\ g_2,\ u^{0^2}.$$

Digitized by Google

Sind folglich

$$e^8, e^4, e'^4, e^0, e'^0$$

beliebige Formen der Ordnung des angeschriebenen Exponenten, so ist

$$\varphi = (e^8, u^{4\,2})^8 + (e^4, u^4)^4\, u^0 + (e'^4, h)^4 + e^0 g_2 + e'^0 u^{0\,2}.$$

Ersetzt man den Strain durch sein Zweibein $\mathfrak{u}^2$ und seinen Skalar $u$ so ergibt sich: „Aus der Forderung eines in den Strainkoordinaten $x_x, \cdots x_y$ quadratischen und homogenen elastischen Potentials ergibt sich, daß dasselbe in fünf Teile gespalten werden kann, die resp. durch ein Vierbein, zwei Zweibeine und zwei Konstante gegeben sind. Jedem Punkte des elastischen anisotropen Mediums ist also ein System von elastischen Vielbeinen $\mathfrak{e}^4$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$, $\mathfrak{e}^0$, $\mathfrak{e}'^0$ zugeordnet, welche, wenn sie allgemein und von einander unabhängig sind, die 21 elastischen Konstanten liefern. Die fünf Teile des Potentials sind die skalaren Produkte dieser Vielbeine mit den quadratischen Vielbeinen

$$\mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{u}^0,\ \mathfrak{h}^2,\ g_2,\ \mathfrak{u}^{0^2}$$

des Strains; es ist also

$$\varphi \equiv \mathfrak{e}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2} + \mathfrak{e}^2 \cdot \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{u}^0 + \mathfrak{e}'^2 \cdot \mathfrak{h}^2 + \mathfrak{e}^2 g_2 + \mathfrak{e}'^0\,\mathfrak{u}^{0^2}. \tag{38}$$

Bestimmt man die Vielbeine $\mathfrak{e}^4$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ resp. durch die Einheitsvielbeine $\mathfrak{E}^4$, $\mathfrak{E}^2$, $\mathfrak{E}'^2$ und die Skalare $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, so hat man auch:

$$\varphi \equiv \varepsilon_1\, \mathfrak{E}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2\,2} + \varepsilon_2\, \mathfrak{E}^2 \cdot \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{u}^0 + \varepsilon_3\, \mathfrak{E}'^2 \cdot \mathfrak{h}^2 + \mathfrak{e}^0 g_2 + \mathfrak{e}'^0\,\mathfrak{u}^{0\,2}.$$

Nunmehr sind die elastischen Einheitsvielbeine $\mathfrak{E}^4$, $\mathfrak{E}^2$, $\mathfrak{E}'^2$ nur durch Richtungen gegeben, und zur vollen Charakterisierung des Mediums die fünf elastischen Skalare $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\mathfrak{e}^0$, $\mathfrak{e}'^0$ anzugeben.

21. Das tetradische elastische Produkt $\mathfrak{E}$. Das tetradische Produkt

$$\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{e};\ \mathfrak{f};\ \mathfrak{l};\ \mathfrak{m}$$

ist gegeben durch die vierfache Quadrik

$$\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{e};\ \mathfrak{f};\ \mathfrak{l};\ \mathfrak{m} \equiv (e\,x)^2\,(\mathfrak{f}\,\mathfrak{y})^2\,(l\,z)^2\,(m\,t)^2$$

wo $(e\,x)^2$, $(\mathfrak{f}\,\mathfrak{y})^2$, $(l\,t)^2$, $(m\,t)^2$ symbolische Quadriken mit den Veränderlichen $x$, $y$, $z$, $t$ sind. Es weist dem dyadischen Produkt $\mathfrak{r};\mathfrak{f}$ das Produkt

$$\mathfrak{r}';\mathfrak{f}' = \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{r}\,\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{f}\,\mathfrak{m};\ \mathfrak{n} \tag{39}$$

zu und soll reell heißen, wenn vermöge der letzten Gleichung jedem reellen Produkt $\mathfrak{r};\mathfrak{f}$ ein reelles $\mathfrak{r}';\mathfrak{f}'$ entspricht. Dies ist

Digitized by Google

dann und nur dann der Fall, wenn die symbolischen Quadriken $\mathfrak{e} = e^2$, $\mathfrak{f} = f^2$, $\mathfrak{l} = l^2$, $\mathfrak{m} = m^2$ realisieren, was ähnlich wie der entsprechende Satz des Art. 2 bewiesen werden kann.

Die Gleichung (39) gibt auch, wenn $\mathfrak{T}$ allgemein ist, die allgemeine lineare Beziehung zwischen dyadischen Produkten.

Es sei nun $\mathfrak{T}$ symmetrisch in $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}$, ferner auch in $\mathfrak{e}, \mathfrak{l}$ so daß die Identitäten bestehen:

$$\mathfrak{e};\mathfrak{f};\mathfrak{l};\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{f};\mathfrak{e};\mathfrak{l};\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{l};\mathfrak{f};\mathfrak{e};\mathfrak{m}. \tag{40}$$

Ein Produkt mit diesen Symmetrien ist das elastische Produkt $\mathfrak{E}$, aus welchem und aus dem dyadischen Produkte $\mathfrak{r};\mathfrak{f}$ des Strains das Potential $\varphi$ des elastischen anisotropen Mediums gefunden wird durch

$$2\varphi \equiv \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{f}.$$

Der dem Strain entsprechende Streß wird dann (vgl. Art. 17) aus diesem Ausdruck durch Evektantenbildung gefunden als:

$$\mathfrak{r}';\mathfrak{f}' = -\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{l};\mathfrak{m}.$$

22. Entwicklung des Produkts $\mathfrak{E}$. Wegen der Identitäten (40) kann $\mathfrak{E}$ gefunden werden, indem man die Entwicklungen der symmetrischen dyadischen Produkte:

$$\mathfrak{e};\mathfrak{f} \equiv \mathfrak{e}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{x}\mathfrak{y} + \tfrac{1}{3}\,\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}$$
$$\mathfrak{l};\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{l}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{z}\mathfrak{t} + \tfrac{1}{3}\,\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t}$$

miteinander multipliziert, so daß sich ergibt

$$\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{e}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{x}\mathfrak{y}\,\mathfrak{l}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{z}\mathfrak{t} + \tfrac{1}{9}\,\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t} +$$
$$+ \tfrac{1}{3}\,(\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\,\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\mathfrak{t}) + \tfrac{1}{3}\,(\mathfrak{e}\mathfrak{f}\,\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t}).$$

Wendet man nun auf das erste Produkt rechts in dieser Gleichung, in welchem $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}\mathfrak{m}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{t}$ Biquadriken sind, die Clebsch-Gordansche Reihenentwicklung an, so erhält man:[1])

$$\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{l}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t} + 2(\mathfrak{e}\mathfrak{f}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{z}\mathfrak{t}) + \tfrac{12}{7}\,(\mathfrak{e}\mathfrak{f}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}\mathfrak{t})$$
$$+ \tfrac{4}{5}\,(\mathfrak{e}\mathfrak{f}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}\mathfrak{t}) + \tfrac{1}{5}\,(\mathfrak{e}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{l}\mathfrak{m})\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{z}\mathfrak{t}).$$

Wird dies in die letzte Entwicklung von $\mathfrak{E}$ eingesetzt, dann die $\mathfrak{E}$ nicht verändernde Vertauschung von $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{m}$ vorgenommen und das Resultat zu $\mathfrak{E}$ addiert, die Summe halbiert, so fallen die Glieder aus, welche ungerade Überschiebungen von $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{l}\mathfrak{m}$ enthalten, da sie bei der angegebenen Vertauschung ihr Zeichen ändern, so daß sich schließlich ergibt:

$$\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{l}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t} + \tfrac{1}{6}\,(\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\,\mathfrak{l}\mathfrak{m} + \mathfrak{e}\mathfrak{f}\,\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t} + \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t}) + \tag{41}$$
$$+ \tfrac{12}{7}\,(\mathfrak{e}\mathfrak{f}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}\mathfrak{t}) + \tfrac{1}{5}\,(\mathfrak{e}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{l}\mathfrak{m})\cdot(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{z}\mathfrak{t}) + \tfrac{1}{9}\,\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t}.$$

[1]) Es werden hier und im folgenden statt der Zeichen für Überschiebungen die Bezeichnungen der eingeführten entsprechenden Produkte verwendet.

Digitized by Google

Demnach ist $\mathfrak{E}$ entwickelt in die Summe von fünf Gliedern, in welchen der Reihe nach die Elementarkomitanten

$$(42)\qquad \begin{gathered} e^4 \equiv efl\,m,\ e^2 \equiv {}^1/_6\,(e\cdot fl\,m + efl\cdot m) \\ e'^2 \equiv {}^{24}/_7\,ef_2\,lm,\ e^0 = {}^2/_5\,ef\cdot lm,\ e'^0 = {}^1/_4\,e\cdot fl\cdot m \end{gathered}$$

des Produkts $\mathfrak{E}$ auftreten und mit einer Komitante der Quadriken $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{t}$ überschoben sind, die in derselben Weise aus $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{t}$ gebildet sind wie diese Elementarkomitanten aus $e, f, l, m$.

Ist $\mathfrak{E}$ das allgemeine Produkt seiner Art mit 21 Konstanten, so sind diese Elementarkomitanten allgemeine von einander unabhängige Formen, die zusammen, da sie von den Ordnungen 8, 4, 4, 0, 0 sind, die 21 Konstanten von $\mathfrak{E}$ ergeben. Sie bestimmen, wie leicht in der für das Produkt $\mathfrak{r};\mathfrak{f}$ in Art. 13 durchgeführten Weise gezeigt werden kann, für ein reelles Produkt $\mathfrak{E}$ die reellen Vielbeine desselben: das Vierbein $e^4$, die Zweibeine $e^2$, $e'^2$ und die Skalare $e^0$, $e'^0$.

Hienach ist der Satz des vorigen Artikels nochmals, vom elastischen Produkt $\mathfrak{E}$ ausgehend, bewiesen und gleichzeitig gezeigt, wie nach (42) die elastischen Vielbeine aus dem elastischen Produkt $\mathfrak{E}$ gefunden werden können, ferner daß die Vielbeine des allgemeinen elastischen Produkts $\mathfrak{E}$ allgemein und von einander unabhängig sind.

Führt man, um das Potential zu bilden, in dem letzten Ausdruck für $\mathfrak{E}$ den Strain mit dem dyadischen Produkt $\mathfrak{r};\mathfrak{f}$ ein, indem man $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ durch $\mathfrak{r}, \mathfrak{f}$ und ebenso $\mathfrak{z}, \mathfrak{t}$ durch $\mathfrak{r}, \mathfrak{f}$ ersetzt, so ergibt sich da

$$\mathfrak{r}\mathfrak{f} = u^2,\ {}^1/_2\,\mathfrak{r}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{f} = \mathfrak{h}^2,\ {}^1/_2\,\mathfrak{r}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{f} = g_2,\ \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f} = u^0$$

ist der Ausdruck (38) für $\varphi$ als:

$$(43)\qquad \begin{gathered} \varphi \equiv efl\,m\cdot u^{2^2} = {}^1/_6\,(e\cdot fl\,m + efl\cdot m)\cdot u^2 u^0 + \\ + {}^{24}/_7\,(ef_2\,lm)\cdot\mathfrak{h}^2 + {}^2/_5\,ef\cdot lm g_2 + {}^1/_9\,e\cdot fl\cdot m u^{0^2}. \end{gathered}$$

23. Die elastischen Vielbeine der Poisson-Cauchyschen Theorie. Unter Voraussetzung der Gültigkeit der Poisson-Cauchyschen Hypothese, daß die elastischen Kräfte nur von der Entfernung der Moleküle abhängen, bestehen bekanntlich die folgenden Gleichungen zwischen den Elastizitätskonstanten:

$$c_{23} = c_{44},\ c_{31} = c_{55},\ c_{12} = c_{66},\ c_{14} = c_{56},\ c_{25} = c_{64},\ c_{36} = c_{65}.$$

Diese Gleichungen sagen aus, daß das elastische tetradische Produkt $\mathfrak{E}$ außer den Symmetrien (40) noch die Vertauschung von $e$ mit $l$, und somit alle Vertauschungen von $e, f, l, m$ gestattet. Dann muß aber $\mathfrak{E}$ in der Form (41) auch alle Vertauschungen von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{t}$ gestatten, also noch die Vertauschung von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{z}$. Bei dieser Vertauschung ändern sich aber die Produkte:

$$\mathfrak{V} \equiv \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t} + \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t},\ \mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{x}\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}\mathfrak{t}.\ \mathfrak{S} \equiv \mathfrak{x}\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{z}\mathfrak{t},\ \mathfrak{S}' = \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{t}$$

Digitized by Google

respektive in

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{F}, \mathfrak{Z} - {}^{7}/_{12}\,\mathfrak{F}, \mathfrak{S} + {}^{5}/_{6}\,\mathfrak{G}, \mathfrak{S}' = \mathfrak{G},$$

wobei

$$\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t} + \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{t} - \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{t} - \mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{t},$$

$$\mathfrak{G} \equiv \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{t} - \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{z}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{t}$$

ist. Soll demnach $\mathfrak{E}$ bei Vertauschung von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$ ungeändert bleiben, so muß:

$$\mathfrak{e}^{2} \cdot \mathfrak{F} - {}^{7}/_{12}\,\mathfrak{e}'^{2} \cdot \mathfrak{F} \equiv (\mathfrak{e}^{2} - {}^{7}/_{12}\,\mathfrak{e}'^{2}) \cdot \mathfrak{F} \equiv 0$$

$$({}^{5}/_{6}\,\mathfrak{e}^{0} - \mathfrak{e}'^{0})\,\mathfrak{G} \equiv 0$$

sein. Daher folgt: „Unter Zugrundelegung der Poisson-Cauchyschen Hypothese besteht zwischen den elastischen Zweibeinen die Relation:

$$\mathfrak{e}'^{2} \equiv {}^{12}/_{7}\,\mathfrak{e}$$

und zwischen den elastischen Skalaren die Relation:

$$\mathfrak{e}'^{0} = {}^{5}/_{6}\,\mathfrak{e}^{\alpha}.$$

Bei Einführung der Helmholtzschen Konstanten $K = \mu$, $H = (3\lambda + 2\mu)/3$ (s. Art. 27) ergibt sich demnach $H = {}^{5}/_{3}\,K$, also die Cauchysche Relation $\lambda = \mu$, oder für die Zahl $\Theta = \lambda/2\,K$ der Wert ${}^{1}/_{2}$.

## § 8. Automorphe elastische Produkte.

24. Soll das tetradische elastische Produkt $\mathfrak{E}$ durch die Transformation einer Gruppe $G$ von Rotationen, Spiegelungen und Drehspiegelungen in sich übergehen, so muß seine vierfache Quadrik lineare Transformationen in sich zulassen. Vermöge dieser Transformationen müssen dann die Elementarkomitanten der vierfachen Quadrik in sich übergehen, weshalb die ihnen entsprechenden Vielbeine von $\mathfrak{E}$ bei $G$ invariant sein werden.

Um die verschiedenen automorphen $\mathfrak{E}$ zu finden, können daher die Systeme von Vielbeinen $\mathfrak{e}^{4}$, $\mathfrak{e}^{2}$, $\mathfrak{e}'^{2}$, $\mathfrak{e}^{0}$, $\mathfrak{e}'^{0}$ bestimmt werden, für die jedes der Vielbeine die Gruppe $G$ gestattet. Da die Konstanten $\mathfrak{e}^{0}$, $\mathfrak{e}'^{0}$ bei allen Transformationen von $G$ ungeändert bleiben, so kommen sie nicht in Betracht; sie sind aber bei allen folgenden Konstantenzählungen mitzurechnen.

Es handelt sich also um automorphe Systeme, die aus einem Vierbein und zwei Zweibeinen bestehen, deren Gruppe $G$ (unter vorläufiger Ausschaltung von Drehspiegelungen) nur aus Rotationen besteht (vgl. Art. 14). Demnach wird zunächst das Vierbein allein nach der Gruppe, welche es gestattet, klassifiziert. Die Zweibeine $\mathfrak{u}^{2}$, $\mathfrak{u}'^{2}$ müssen dann so gewählt werden, da sie dieselbe Gruppe zulassen.



Digitized by Google

In den folgenden drei Artikeln werden auf diese Weise die sämtlichen automorphen elastischen Produkte $\mathfrak{E}$ aufgestellt. Hiebei wird die Konstantenzahl $k$ jedes einzelnen Produkts bestimmt und die kristallographische Gruppe $K$, die in der Gruppe $G$ enthalten sein kann. Ferner werden die Elementarkomitanten $e^8$, $e^4$, $e'^4$ charakterisiert, die zu der vierfachen Quadrik des Produkts gehören, wenn die $z$-Achse als Hauptachse der Gruppe $G$ gewählt wird. Es werden auch in jedem Falle die ternären Darstellungen der Vielbeine $\mathfrak{e}^4$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ angegeben, so daß sich das elastische Potential immer als linear ableitbar ergibt aus invarianten skalaren Produkten $\mathfrak{P}_k$ der Vielbeine $\mathfrak{u}^{2'}$, $\mathfrak{h}^2$, $\mathfrak{u}^2\mathfrak{u}^0$, $g_2$, $\mathfrak{u}^2$ des Strains und von Vielbeinen, die aus den Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bestehen.

25. Fälle ohne dreizählige Achse. I. Das Vierbein $\mathfrak{e}^4$ ist allgemein mit neun Konstanten; die zugehörige kristallographische Gruppe $K$ ist die trikline. Die Zweibeine $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ sind allgemein und liefern zusammen zehn Konstante, so daß $k = 21$ ist. Die Formen $e^8$, $e^4$, $e'^4$ sind allgemein und die ternären Darstellungen der Vielbeine sind (s. Art. 4):

$$\mathfrak{e}^4 = \mathfrak{F}^4 + \mathfrak{k}\mathfrak{F}^3, \quad \mathfrak{e}^2 = \mathfrak{F}^2 + \mathfrak{k}\mathfrak{F}^1, \quad \mathfrak{e}'^2 = \mathfrak{F}'^2 + \mathfrak{k}\mathfrak{F}'^1.$$

Demnach ergeben sich vermöge (38) die 21 invarianten skalaren Produkte

$$\mathfrak{i}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2'} \text{ u. s. w. bis } \mathfrak{e}' \mathfrak{u}^0,$$

aus welchen sich das elastische Potential linear ableiten läßt.

II. Das Vierbein $\mathfrak{e}^4$ gestattet die Gruppe $C^2$; es besteht aus zwei Zweibeinen $\mathfrak{e}_1^2$, $\mathfrak{e}_2^2$ mit einer gemeinsamen Symmetrielinie, die Achse von $C^2$ ist. Die Gruppe $K$ ist die des monoklinen Systems. Die Zweibeine $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ haben diese Achse als Symmetrielinie. Es ist $k = 13$. Wird sie als $z$-Achse gewählt, so ist durch die lineare Transformation

$$\xi_1 = i\,\xi_1', \quad \xi_2 = i\,\xi_2' \tag{45}$$

eine Drehung um $180^0$ um diese Achse gegeben. Sollen daher die Formen $u^8$, $u^4$, $u'^4$ bei Anwendung dieser Transformation ungeändert bleiben, so müssen alle Glieder der Formen, die ungerade Potenzen von $\xi_1$ enthalten, ausfallen. Bei dieser Drehung übergehen ferner die Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in $-\mathfrak{i}$, $-\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Sollen daher die Vielbeine $\mathfrak{e}^4$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ bei derselben ungeändert bleiben, so müssen sie die Gestalt haben:

$$\mathfrak{e}^4 \equiv \mathfrak{F}^4, \quad \mathfrak{e}^2 \equiv \mathfrak{F}^2, \quad \mathfrak{e}'^2 = \mathfrak{F}'^2.$$

Die Form $\mathfrak{F}^4$ hat entweder lauter reelle Wurzeln, wo dann (vgl. Art. 4) die Zweibeine $\mathfrak{e}_1^2$, $\mathfrak{e}_2^2$ von $\mathfrak{e}^4$ die $z$-Achse als Halbierungslinie besitzen, oder sie hat paarweise konjugierte Wurzeln, wo dann die $z$-Achse Halbierungslinie für das eine und Lot für das andere Zweibein ist.

Digitized by Google

Die 13 Produkte $\mathfrak{P}_k$ sind außer $g_2$ und $u^{0^2}$ die skalaren Produkte von $u^{2^2}$, $\mathfrak{h}^2$, $u^2 u^0$ über Produkte von i und j.

III. Die Symmetrielinien der Zweibeine $e_1$, $e_2$ von II fallen zusammen; $e^4$ gestattet die Gruppe $V$. Die Gruppe $K$ ist die des rhombischen Systems. $e^2$, $e'^2$ haben dieselben Symmetrielinien wie $e_1$, $e_2$. $k = 9$.

Werden die Symmetrielinien als Achsen gewählt, so kommt zu der Transformation (45) noch die Transformation

46) $$\xi_1 = \xi'_2, \; \xi_2 = -\xi'_1$$

hinzu, welcher eine Rotation um 180° um die $x$-Achse entspricht. Sollen die Formen $u^8$, $u^4$, $u'^4$ von II auch diese Transformation zulassen, so müssen die Koeffizienten ihrer Glieder, die gleich hohe Potenzen von $\xi_1$, $\xi_2$ enthalten, einander gleich sein.

Die ternären Formen der Vielbeine $e^4$, $e^2$, $e'^2$ in II müssen ungeändert bleiben, wenn i, j, $\mathfrak{k}$ durch i, $-$ j, $-\mathfrak{k}$ ersetzt werden, so daß in $\mathfrak{F}^4$, $\mathfrak{F}^2$, $\mathfrak{F}'^2$ nur die Glieder verbleiben, die gerade Potenzen von i enthalten. Da nach der Identität (7) gilt: $\mathrm{i}^2 \mathrm{j}^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{k}^4 - \mathrm{i}^4 - \mathrm{j}^4)$, so kann auch gesetzt werden:

$$e^4 = a\,\mathrm{i}^4 + b\,\mathrm{j}^4 + c\,\mathfrak{k}^4.$$

Die neun Produkte $\mathfrak{P}_k$ sind hier die skalaren Produkte von $\mathrm{i}^4$, $\mathrm{j}^4$, $\mathfrak{k}^4$ mit $u^{2^2}$, von $\mathrm{i}^2$, $\mathrm{j}^2$ mit $u^2 u^0$ und $\mathfrak{h}^2$ und schließlich $g_2$ und $u^{0^2}$.

IV *a*. Die Zweibeine $e_1^2$, $e_2^2$, in welche $e^4$ zerfällt, sind kongruent, haben eine gemeinsame Winkelhalbierende und auf einander senkrechte Ebenen. Diese Zweibeine $e_1^2$, $e_2^2$ übergehen dann in einander entweder durch eine Rotation um einen rechten Winkel, in welchem Falle das Vierbein regulär ist, oder aber durch Drehspiegelung mit einer Drehung um einen rechten Winkel und um diese Winkelhalbierende als Achse. In letzterem Falle bringt aber auch eine Rotation um einen rechten Winkel das Vierbein in sich, denn es ist (Art. 2) mit demjenigen gleich, das aus ihm durch Inversion an $O$ hervorgeht. Demnach gestattet $e^4$ die Gruppe $C^4$. Die durch $C^4$ charakterisierten Gruppen des tetragonalen Systems. Die Zweibeine $e^4$, $e'^2$ werden speziell und fallen in die Achse. Es ist $k = 7$. Da eine Rotation um einen rechten Winkel um die $z$-Achse durch die lineare Transformation

$$\xi_1 = \varepsilon\,\xi'_1, \; \xi_2 = \xi'_2/\varepsilon$$

gegeben ist, wo $\varepsilon$ eine der primitiven achten Wurzeln aus 1 ist, so sind die Formen $u^8$, $u^4$, $u'^4$, welche diese Transformation gestatten:

$$u^8 \equiv a\,\xi_1^8 + b\,\xi_1^4\,\xi_2^4 + c\,\xi_2^8, \; u^4 \equiv d\,\xi_1^2\,\xi_2^2, \; u'^4 \equiv e\,\xi_1^2\,\xi_2^2.$$



Digitized by Google

Ferner ist:

$$\mathfrak{e}^4 = \alpha\,\mathfrak{i}^4 + \beta\,\mathfrak{j}^4 + \gamma\,\mathfrak{k}^4,\ \mathfrak{e}^2 = \delta\,\mathfrak{k}^2,\ \mathfrak{e}'^2 = \varepsilon\,\mathfrak{k}^2.$$

Die sieben Produkte $\mathfrak{P}_k$ sind demnach:

$$\mathfrak{i}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{j}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{k}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{k}^2 \cdot \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{u}^0,\ \mathfrak{k}^2 \cdot \mathfrak{h}^2,\ \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{u}^{0^2}.$$

IV*b*. Die Gruppe $C^4$ in IV*a* erweitert sich zu $D^4$ durch eine Rotation von 180° um die $x$-Achse. Die durch $D^4$ charakterisierten Gruppen des tetragonalen Systems. Die Zweibeine $\mathfrak{e}^2, \mathfrak{e}'^2$ liegen wie in IV*a*. $k = 6$. Die Formen $u^8$, $u^4$, $u'^4$ in IV*a* gestatten noch die Transformation (46), daher wird $a = b$ folglich auch $\alpha = \gamma$. Deshalb kann auch gesetzt werden:

$$\mathfrak{e}^4 = \rho\,\mathfrak{i}^2\,\mathfrak{j}^2 + \sigma\,\mathfrak{k}^4.$$

Die sechs Produkte $\mathfrak{P}_k$ lauten demnach:

$$\mathfrak{i}^2\mathfrak{j}^2 \cdot \mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{k}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2},\ \mathfrak{k}^2 \cdot \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{u}^0,\ \mathfrak{k}^2 \cdot \mathfrak{h}^2,\ \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{u}^{0^2}.$$

V. Die Teilvektoren von $\mathfrak{e}^4$ in IV*b* halbieren die Winkel zwischen den Koordinatenachsen. Reguläres System. $\mathfrak{e}^2, \mathfrak{e}'^2$ verschwinden identisch. $k = 3$. Es ist

$$\mathfrak{e}^4 = \alpha\,(\mathfrak{i}^4 + \mathfrak{j}^4 + \mathfrak{k}^4).$$

26. Fälle mit dreizähliger Achse. VI*a*. Drei Teilvektoren von $\mathfrak{e}^4$ bilden einen regulären Trivektor (sind Kanten einer regulären Pyramide), der vierte Teilvektor von $\mathfrak{e}^4$ liegt auf der Achse des Trivektors (Höhenlinie der Pyramide), welche Achse der Gruppe $C^3$ ist, die $\mathfrak{e}^4$ in sich überführt. Die durch $C^3$ charakterisierten Gruppen des rhomboëdrischen Systems. $\mathfrak{e}^2, \mathfrak{e}'^2$ wie in IV*a*. $k = 7$. Die Formen $u^8$, $u^4$, $u'^4$ gestatten die Transformation:

$$\xi_1 = \varepsilon\,\xi_1',\ \xi_2 = \xi_1'/\varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ eine der komplexen dritten Einheitswurzeln ist. Daher haben sie die Gestalt:

$$u^4 = \xi_1\,\xi_2\,(a\,\xi_1^6 + b\,\xi_1^3\,\xi_2^3 + c\,\xi_2^6),\ u^4 = d\,\xi_1^2\,\xi_2^2,\ u'^4 = e\,\xi_1^2\,\xi_2^2.$$

Da vermöge der Formeln (3) die Vektoren

$$^1/_2\,(\mathfrak{i} + i\,\mathfrak{j}),\ ^1/_2\,(\mathfrak{i} - i\,\mathfrak{j}),\ \mathfrak{k}$$

die Quadriken $\xi_1^2, \xi_2^2, -2\,i\,\xi_1\,\xi_2$ besitzen: so folgt

$$\mathfrak{e}^4 = {}^1/_2\,\mathfrak{k}\,\{(a + c)\,i\,(\mathfrak{i}^3 - 3\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}^2) + (a - c)\,(\mathfrak{j}^3 + 3\,\mathfrak{i}^2\,\mathfrak{j})\} + \gamma\,\mathfrak{k}^4.$$

Daher ist, wenn

$$a = -\beta - i\,\alpha,\ c = \beta - i\,\alpha$$

Digitized by Google

gesetzt wird:

$$\mathfrak{e}^4 = \mathfrak{f}\{\alpha(\mathfrak{i}^3 - 3\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}^2) + \beta(\mathfrak{j}^3 + 3\,\mathfrak{i}^2\,\mathfrak{j}) + \gamma\,\mathfrak{f}^3\}.$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{e}^2 = \delta\,\mathfrak{f}^2,\ \mathfrak{e}'^2 = \varepsilon\,\mathfrak{f}^2.$$

Die Produkte $\mathfrak{P}_k$ sind demnach die skalaren Produkte von $\mathfrak{f}(\mathfrak{i}^3 - 3\mathfrak{i}\mathfrak{j}^2)$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{j}^3 + 3\mathfrak{i}^2\mathfrak{j})$, $\mathfrak{f}^4$ über $\mathfrak{u}^{2^2}$, von $\mathfrak{f}^2$ über $\mathfrak{u}^2\mathfrak{u}^0$ und $\mathfrak{h}^2$ und $g_2$ und $\mathfrak{u}^{0^2}$.

VI*b*. Die Gruppe $C^3$ von VI*a* wird zu $D^3$ durch Hinzutreten der Rotation um 180° um die Normale einer Symmetrieebene des regulären Dreibeins. Die durch $D^3$ charakterisierten Gruppen des rhomboedrischen Systems $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}'^2$ wie in VI*a*. Wird diese Normale als $x$-Achse gewählt, so ist $k = 6$.

Formen $u^4$, $u'^4$ wie in VI*a*. Die Form $u^8$ von VI*a* muß noch die Transformation (46) gestatten, daher ist $a = c$. Demnach ist auch $\beta = 0$ und

$$\mathfrak{e}^4 = \mathfrak{f}\{\alpha(\mathfrak{i}^3 - 3\mathfrak{i}\mathfrak{j}^2) + \gamma\,\mathfrak{f}^3\},\ \mathfrak{e}^2 = \delta\,\mathfrak{f}^2,\ \mathfrak{e}'^2 = \varepsilon\,\mathfrak{f}^2.$$

Die sechs Produkte $\mathfrak{P}_k$ sind die von VI*a* mit Ausnahme des zweiten.

27. Fälle der Isotropien. VII. Das Vierbein $\mathfrak{e}^4$ gestattet die kontinuierliche Gruppe von Rotationen um eine Achse; es wird demnach speziell und seine Teilbeine fallen in diese Achse, die eine Achse elastischer Isotropie wird. Hier müssen die durch $C^6$ oder $D^6$ charakterisierten Gruppen des hexagonalen Systems mit sechszähliger Symmetrieachse eingeordnet werden, denn das Auftreten einer solchen Achse bewirkt, daß das elastische Vierbein, welches dieselbe Symmetrie gestatten soll, speziell wird und in die Achse fällt.

Auch $\mathfrak{e}^2$ und $\mathfrak{e}'^2$ werden speziell und fallen in die Achse, so daß, wenn diese Achse als $z$-Achse gewählt wird, folgt: $k = 5$. Für die Vielbeine ist dann:

$$\mathfrak{e}^4 = c_1\,\mathfrak{f}^4,\ \mathfrak{e}^2 = c_2\,\mathfrak{f}^2,\ \mathfrak{e}'^2 = c_3\,\mathfrak{f}^2,$$

und das elastische Potential lautet demnach

$$(47)\quad \varphi \equiv c_1\,\mathfrak{f}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2} + c_2\,\mathfrak{f}^2 \cdot \mathfrak{u}^2\mathfrak{u}^0 + c_3\,\mathfrak{f}^2 \cdot \mathfrak{h}^2 + \mathfrak{e}^0 g_2 + \mathfrak{e}'^0\,\mathfrak{u}^{0^2}.$$

Hierin sind $c_1$, $c_2$, $c_3$, $\mathfrak{e}^0$, $\mathfrak{e}'^0$ die fünf Konstanten der elastischen Isotropieachse und die auftretenden Produkte

$$\mathfrak{f}^2 \cdot \mathfrak{u}^2\mathfrak{u}^0,\ \mathfrak{f}^2 \cdot \mathfrak{h}^2,\ g_2,\ \mathfrak{u}^{0^2}$$

sind mit den in Art. 19 eingeführten Produkten $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_5$, $\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{P}_1$ identisch. Das Produkt

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{f}^4 \cdot \mathfrak{u}^{2^2}$$

Digitized by Google

das hier auftritt, läßt sich aus den fünf Produkten $\mathfrak{P}_k$ (und demnach auch aus den fünf Beltramischen Invarianten $B_k$) linear ableiten, da dies nach Art. 22 für jedes invariante Produkt, das zweiten Grades in $u^2$ und $u^0$ ist, der Fall sein muß.

„Die obige Zerlegung des allgemeinen elastischen Potentials in die fünf Teile, welche den elastischen Vielbeinen entsprechen, ist nach dem Vorstehenden als eine Erweiterung der in (47) angegebenen Zerlegung des Potentials bei elastischer Isotropieachse anzusehen".

VIII. Das Vierbein $e^4$ verschwindet identisch. Gruppe sämtlicher Rotationen um $O$. Komplette elastische Isotropie. Die Zweibeine $e^2$, $e'^2$ müssen dieselbe Gruppe gestatten, verschwinden daher ebenfalls identisch. Das elastische Potential ergibt sich als

$$e^0 g_2 + e'^0 u^{0^2} = 2 K g_2 + \tfrac{1}{2} H u^{0^2}, \tag{48}$$

in der Helmholtzschen Normalform (vgl. Art. 20).

28. Es wurden oben die Gruppen ausgeschlossen, die Drehspiegelungen enthalten. Von solchen Drehspiegelungen, die ein Vierbein $e^4$ invariant lassen, kommen nur $S^3$ und $S^4$, die drei- resp. vierzählig sind, in Betracht. Wäre nun ein Teilbein $e_1$ von $e^4$ nicht senkrecht zur Achse von $S^3$, so müßte $S^3$ auf $e_1$ angewendet ein Sechsbein liefern. Wäre $e_1$ senkrecht zur Achse von $S^3$ so müßte $e^4$ noch zwei weitere Teilbeine $e_2$, $e_3$ haben, die mit $e_1$ und miteinander Winkel von $120^0$ einschließen und das vierte Teilbein $e_4$ von $e^4$ müßte auf der Achse liegen. Vermöge $S^3$ würde dann der Trivektor $e_1\, e_2\, e_3$ in sich übergehen, $e_4$ aber sein Zeichen ändern. Demnach würde auch $e^4$ bei $S^3$ sein Zeichen ändern, also nicht invariant sein.

Es gibt ferner ein Vierbein $e^4$ das $S^4$ gestattet; es wird aus einem zur Achse von $S^4$ senkrechten Vektor durch Anwendung der Transformationen von $S^4$ erhalten und tritt unter IV auf.

29. Nach dem Vorstehenden ergeben sich acht verschiedene automorphe elastische Produkte $\mathfrak{E}$ und ferner die Fälle der elastischen Isotropieachse und der kompletten Isotropie. Sie sind durch ein Vierbein allein und durch die Gruppe $G$, die es gestattet, charakterisiert.

Da den Teilvektoren des Vierbeins $e^4$ Quadriken mit gleicher Diskriminante zugehören und dieses vermöge der Operationen von $G$ auch in dasjenige übergehen kann, das sich von ihm nur durch die Richtungen einer geraden Anzahl der Teilbeine unterscheidet, so folgt noch, daß die Aufgabe, die verschieden automorphen elastischen Produkte $\mathfrak{E}$ ohne Isotropien zu finden, identisch ist mit der folgenden:

„Es sind die Systeme von vier von einander verschiedenen Quadriken $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ mit nicht verschwindender Diskriminante zu finden, die durch eine Gruppe von linearen Transformationen in sich oder in die Quadriken $\pm e_1$, $\pm e_2$, $-e_3$, $-e_4$ übergeführt werden."

Digitized by Google

30. Kubische Potentiale. Es möge noch die Frage behandelt werden, ob die potentielle Energie eines elastischen Körpers außer dem im vorstehenden behandelten quadratischen Teile $\varphi$ noch einen Teil enthalten kann, der in den Strainkoordinaten homogen und vom dritten Grade ist, ohne daß die eventuellen Rotationssymmetrien dieses „kubischen Teiles $\Phi$ des Potentials“ dem Gesetze der rationalen Indizes widersprechen.

Dieser Teil $\Phi$ muß in den Koeffizienten der Formen $u^4 \equiv f$, $u^0 \equiv k$ der Duploquadrik des Strains homogen und vom dritten Grade sein. Da nun

$$f,\ h,\ t,\ g_2,\ g_3$$

das volle System von $f$ bilden, so hat man unter Hinzunahme von $k$ die folgenden zehn Komitanten dritten Grades der Duploquadrik des Strains:

$$f^3;\ fh, f'k;\ t;\ fg_2, fk^2,\ hk;\ g_2 k,\ g_3,\ k^3.$$

Diesen entsprechen die folgenden invarianten kubischen Vielbeine des Strains

$$(49) \qquad \mathfrak{u}^{2'},\ \mathfrak{u}^2 \mathfrak{h}^2,\ \mathfrak{u}^{2'} \mathfrak{u}^0;\ \mathfrak{t};\ \mathfrak{u}^2 g_2,\ \mathfrak{u}^2 \mathfrak{u}^{0'},\ \mathfrak{h}^2 \mathfrak{u}^0;\ g_2 \mathfrak{u}^0,\ g_3,\ \mathfrak{u}^{0'}.$$

Bildet man nun die skalaren Produkte dieser Vielbeine mit Vielbeinen gleicher Ordnung $\mathfrak{c}^\nu$, so folgt:

$$\Phi \equiv \mathfrak{c}^6 \cdot \mathfrak{u}^{2'} + \mathfrak{c}^4 \cdot \mathfrak{u}^2 \mathfrak{h}^2 + \mathfrak{c}'^4 \cdot \mathfrak{u}^{2'} \mathfrak{u}^0 + \mathfrak{c}^3 \cdot \mathfrak{t} + \mathfrak{c}^2 \cdot \mathfrak{u}^2 g_2 +$$
$$+ \mathfrak{c}'^2 \cdot \mathfrak{u}^2 \mathfrak{u}^{0'} + \mathfrak{c}''^2 \cdot \mathfrak{h}^2 \mathfrak{u}^0 + \mathfrak{c}^0 g_2 \mathfrak{u}^0 + \mathfrak{c}'^0 g_3 + \mathfrak{c}''^0 \mathfrak{u}^{0'}.$$

Statt der 56 kubischen Elastizitätskoeffizienten des durch die Strainkoordinaten ausgedrückten $\Phi$ können demnach diese „elastischen kubischen Vielbeine $\mathfrak{c}^\nu$“, die von 0, 2, 3, 4, 6ter Ordnung sind und die zusammen von 56 Konstanten abhängen, eingeführt werden.

Man kann $\Phi$ auch, analog wie oben den quadratischen Teil $\varphi$ des Potentials, geben durch eine sechsfache Quadrik

$$(a x)^2 (b y)^2 (p z)^2 (q t)^2 (m u)^2 (n v)^2$$

oder durch ein sexadisches Produkt $\mathfrak{a}; \mathfrak{b}; \mathfrak{p}; \mathfrak{q}; \mathfrak{m}; \mathfrak{n}$, aus dem sich $\Phi$ ergibt als

$$\Phi = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r}\, \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{f}\, \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{r}\, \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{f}\, \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{r}\, \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{f}.$$

Durch Entwicklung dieses Produkts nach der Methode des Art. 22 und durch Beachtung der Symmetrien, die es gestattet, ergibt sich d

Soll nu[illegible] Rotation zulassen, so [illegible]lbe Rotation gestatte[illegible]beine er-

Digitized by Google

hält man dann, sowie oben für die quadratischen Vielbeine $\mathfrak{c}^1, \mathfrak{c}^2, \mathfrak{c}'^2$, nur 2-, 3-, 4-zählige Rotationen, die also dem Gesetze der rationalen Indizes nicht widersprechen. Ebenso erhält man für $\mathfrak{c}^3$ keine anderszähligen Rotationen.

Das Sechsbein $\mathfrak{c}^6$ kann bei gewissen Spezialisierungen 2-, 3-, 4-, 6zählige Rotationen gestatten, die dem Rationalitätsgesetze auch nicht widersprechen würden. Es kann aber auch aus einem regulären Fünfbein und einem Vektor bestehen, der auf der Achse des Fünfbeins liegt, so daß $\mathfrak{c}^6$ eine fünfzählige Rotation gestattet, die dem Rationalitätsgesetze widerspricht. In diesem Falle müssen dann die anderen quadratischen und kubischen Vielbeine speziell werden und in die Achse des Fünfbeins fallen. Demnach:

„Wird die Achse des regulären Fünfbeins als $z$-Achse gewählt, so liefert seine ternäre Darstellung drei Konstante und jedes der anderen neun kubischen und fünf quadratischen Vielbeine je eine weitere Konstante, so daß das dem Gesetze der Rationalität widersprechende kubische Potential von 17 Konstanten abhängt."

Würde angenommen, daß das Sechsbein $\mathfrak{c}^6$ des kubischen Potentials a priori verschwinden würde, so hätte man nur elastische Null- bis Vierbeine. Da das Sechsbein 13 Konstante besitzt, so würde eine solche Annahme noch immer kubische Potentiale mit $56 - 13 = 43$ Konstanten liefern, welche Potentiale dem Rationalitätsgesetze nicht widersprechen können.

Bei Auftreten einer elastischen Isotropieachse würde das aus $\varphi$ und $\Phi$ bestehende Potential von $5 + 10$ Konstanten abhängen und sich aus den skalaren Produkten von Potenzen des Einheitsvektors $\mathfrak{k}$ der Achse und den quadratischen und kubischen Vielbeinen des Strains linear ableiten lassen.

Bei kompletter elastischer Isotropie würden sich ergeben:[1])

$$\Phi = \mathfrak{c}^0 g_3 + \mathfrak{c}'^0 g_2 \mathfrak{k} + \mathfrak{c}''^0 \mathfrak{k}^3.$$

Brünn, 7. Juni 1906.

[1]) Vgl. Voigt: „Über eine anscheinend notwendige Erweiterung der Theorie der Elastizität", Wied. Ann., Bd. 52, p. 536. Der dort verwendete Satz des Herrn Stickelberger folgt nach dem Obigen als: Jede ganze rationale Funktion der Strainkoordinaten, welche vom Koordinatensystem unabhängig ist, ist eine ganze rationale Funktion von $u^0$, $g_2$, $g_3$; denn diese Größen bilden das volle System der Invarianten der Duploquadrik des Strains.

Digitized by Google

# Notiz über eine allgemeine Integralformel.

Von **Niels Nielsen** in Kopenhagen.

In einer russisch geschriebenen Arbeit hat N. von Sonin[1]) für die Eulersche Konstante Integraldarstellungen von sehr allgemeiner Form hergeleitet; ganz einfache Spezialfälle dieser Formel sind früher von Soldner[2]) und Arndt[3]) betrachtet worden, während Hermite[4]) später und offenbar ohne die Arbeit von Sonin zu kennen, einen etwas allgemeineren Spezialfall untersucht hat.

Der folgende allgemeine Integralsatz kann als Analogon der Soninschen Formeln angesehen werden:

Es sei das bestimmte Integral

$$\Omega(x) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-tx}\, dt, \tag{1}$$

welches für $\Re(x) > \omega$ konvergiert, für jeden endlichen Wert von $x$, welcher dieser Bedingung Genüge leistet, eine in $x$ analytische Funktion, für welche außerdem

$$\lim_{\Re(x)=+\infty} \left(x^\varrho . \Omega(x)\right) = 0 \tag{2}$$

ist, wo $\varrho$ eine angebbare, aber beliebig kleine positive Größe bedeutet, dann ist immer für $\Re(x) > \omega$

$$C . \Omega(x) = \int_0^\infty \left(\Omega^{(1)}(t+x) - f(t)\, e^{-tx}\right) \log t\, dt, \tag{3}$$

wo $C$ die Eulersche Konstante bedeutet.

---

[1]) Annalen der kaiserlichen Universität in Warschau 1889; der Titel der Arbeit lautet deutsch: Darstellungen des Logarithmus und der Eulerschen Konstante durch bestimmte Integrale.

[2]) Théorie et table d'une nouvelle fonction transcendante. München 1809.

[3]) Grunerts Archiv. Bd. 10; 1847.

[4]) Časopis, Bd. 23, p. 273—274; 1894.

Digitized by Google

Aus der Integraldefinition des Integrallogarithmus

$$\mathrm{li}\,(e^{-xy}) = -\int_y^\infty \frac{e^{-tx}}{t}\,dt,\ \Re(x) > 0$$

ergibt sich unmittelbar vermöge (1)

$$(4)\quad -\int_y^\infty \frac{\Omega(t+x)}{t}\,dt = \int_0^\infty f(t)\,e^{-tx}\,\mathrm{li}\,(e^{-ty})\,dt,\ \Re(x+y) > \omega,$$

woraus durch Anwendung der partiellen Integration

$$(5)\quad \Omega(x+y)\log y + \int_y^\infty \Omega^{(1)}(t+x)\log t\,dt = \int_0^\infty f(t)\,e^{-tx}.\,\mathrm{li}\,(e^{-ty})\,dt.$$

Führt man demnach in das Integral rechter Hand in (5) die Entwicklung

$$(6)\qquad \mathrm{li}\,(e^{-ty}) = C + \log t + \log y + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (ty)^s}{s!\,s}$$

ein, so entfließt eine Identität von dieser Form:

$$C\,.\,\Omega(x) + F(x,y) = \big(\Omega(x+y) - \Omega(x)\big)\log y +$$

$$+ \int_y^\infty \big(\Omega^{(1)}(t+x) - f(t)\,e^{-tx}\big)\log t\,dt;$$

da nun offenbar $F(x,y)$ mit $y$ verschwindet, so hat man nur in dieser Formel $y = 0$ zu setzen, um die Integraldarstellung (3) zu erhalten.

Hinsichtlich der großen Allgemeinheit der so erhaltenen Formel (3) bemerken wir, daß sie für jede konvergente Fakultätenreihe

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,b_s}{x\,(x+1)\ldots(x+s)}$$

giltig bleibt, so daß die Theorie der Gammafunktion uns viele spezielle Anwendungen unsererer Integralformel gestattet.

Als erstes Beispiel betrachten wir die altbekannte Formel

$$(7)\qquad \frac{\Gamma(\nu)}{x^\nu} = \int_0^\infty e^{-tx}\,t^{\nu-1}\,dt,\ \Re(x) > 0,\ \Re(\nu) > 0$$

Digitized by Google

und finden dann aus (3) die entsprechende Formel

$$\frac{C}{x^\nu} = -\int_0^\infty \left( \frac{\nu}{(t+x)^{\nu+1}} + \frac{e^{-tx} t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \right) \log t \, dt, \tag{8}$$

wo dieselben Voraussetzungen über $x$ und $\nu$ wie in (7) aufrecht zu halten sind.

Aus (7) findet man weiter durch Differentiation nach $\nu$

$$\frac{\Gamma(\nu)}{x^\nu} (\Psi(\nu) - \log x) = \int_0^\infty e^{-tx} t^{\nu-1} \log t \, dt,$$

wo der Kürze halber

$$\Psi(x) = D_\nu \log \Gamma(\nu) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{\nu+s} \right) \tag{9}$$

gesetzt worden ist, und somit entfließt aus (8) diese elegante Formel

$$\frac{C + \Psi(\nu) - \log x}{x^\nu} = -\nu \int_0^\infty \frac{\log t}{(t+x)^{\nu+1}} \, dt, \tag{10}$$

wo man $\Re(\nu) > 0$ voraussetzen muß, während $x$ weder Null noch negativ reell angenommen werden darf.

Aus (10) kann eine große Menge anderer Formeln hergeleitet werden; setzt man z. B. $\nu = 1$, so kommt

$$\frac{\log x}{x} = \int_0^\infty \frac{\log t}{(t+x)^2} \, dt, \tag{11}$$

woraus durch Integration nach $x$

$$\frac{1}{2} (\log x)^2 = \int_0^\infty \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+x} \right) \log t \, dt. \tag{12}$$

Setzt man nun weiter

$$\zeta(\nu, x, \alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\alpha^s}{(x+s)^\nu}, \tag{13}$$

Digitized by Google

wo man demnach $|\alpha|<1$ oder speziell $\alpha=1$, $\Re(\nu)>1$; $|\alpha|=1$, $\Re(\nu)>0$ annehmen muß, während $x$ weder Null noch negativ ganz sein darf, so kommt aus (10) diese andere Formel

$$(14)\quad \big(C+\Psi(\nu)\big).\zeta(\nu,x,\alpha)+D_\nu\zeta(\nu,x,\alpha)=\int_0^\infty D_t\zeta(\nu,t+x,\alpha)\log t\,dt,$$

woraus für $\alpha=-1$, $\nu=1$

$$(15)\quad \sum_{s=2}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\log s}{s}=\int_0^\infty \beta^{(1)}(t+1)\log t\,dt,$$

wo der Kürze halber

$$(16)\quad \beta(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\cdots$$

gesetzt worden ist.

Aus der Formel (8) findet man in ähnlicher Weise die beiden anderen

$$(17)\quad C.\beta(x)=\int_0^\infty\left(\beta^{(1)}(t+x)-\frac{e^{-tx}}{1+e^{-t}}\right)\log t\,dt,\ \Re(x)>0,$$

$$(18)\quad \left.\begin{aligned} &C.\big(\Psi(x)-\Psi(x+y)\big)=\\ &=\int_0^\infty\left(\Psi^{(1)}(t+x)-\Psi^{(1)}(t+x+y)-\frac{1-e^{-ty}}{1-e^{-t}}\cdot e^{-tx}\right)\log t\,dt,\end{aligned}\right.$$

wo man in (18) sowohl $\Re(x)>0$ als $\Re(x+y)>0$ voraussetzen muß; aus (17) findet man für $x=1$, $x=\frac{1}{2}$ Integraldarstellungen für die beiden Produkte $C.\lg 2$ und $C.\pi$.

Es ist bemerkenswert, daß die Formel (8) als eine Verallgemeinerung der folgenden von Dirichlet herrührenden

$$(19)\quad C=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+t}-e^{-t}\right)\frac{dt}{t}$$

angesehen werden kann; setzt man in der Tat $x=1$, so leuchtet ein, daß (8) für $x=1$ auf diese andere Form

$$C=\int_0^\infty\left(\frac{1}{(1+t)^2}-e^{-t}\right)\log t\,dt$$

gebracht werden kann, und aus dieser letzten Formel erhält man unmittelbar (19) nach einer partiellen Integration.

Digitized by Google

Indem wir vorübergehend bemerken, daß die Formel von Binet

$$\log x - \Psi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1\right) e^{-tx}\, dt, \quad \Re(x) > 0$$

diese andere

$$(20)\quad C^2 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - \Psi^{(1)}(1+t) - \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1\right) e^{-t}\right) \log t\, dt$$

liefert, wollen wir nunmehr die elementare Formel

$$(21)\quad \log\left(1 + \frac{y}{x}\right) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ty}}{t} \cdot e^{-tx}\, dt, \quad \Re(x) > 0, \ \Re(x+y) > 0$$

etwas eingehender untersuchen.

Aus (8) findet man unmittelbar vermöge (21)

$$(22)\quad C . \log\left(1 + \frac{y}{x}\right) = -\int_0^\infty \left(\frac{y}{(t+x)(t+x+y)} - \frac{e^{-tx} - e^{-t(x+y)}}{t}\right) \log t\, dt$$

woraus für $x = y = 1$ eine neue Integraldarstellung für das Produkt $C . \lg 2$; wendet man noch auf (21) die Identität (4) an, so kommt nach einer leichten Änderung der Bezeichnungen

$$(23)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s^2} = \int_0^\infty \frac{1 - e^{tx}}{t} \cdot \mathrm{li}\,(e^{-t})\, dt;$$

die Funktion linker Hand in (23) ist der sogenannte „Dilogarithmus.[1])

Wegen der durch (6) hergeleiteten Integraldarstellung

$$\mathrm{li}\,(e^x) - C - \log(-x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt$$

findet man endlich noch aus (23) die andere Integraldarstellung

$$(24)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s^3} = \int_0^\infty \frac{C + \log(-tx) - \mathrm{li}\,(e^{tx})}{t} \cdot \mathrm{li}\,(e^{-t})\, dt,$$

die überall da anwendbar ist, wo dies mit (23) der Fall ist.

[1]) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. 29, p. 377; 1898.

Digitized by Google

Es ist bemerkenswert, daß die beiden Integrale rechter Hand in (23) und (24) in der durch die Ungleichung $\Re(x) \leqq 1$ bestimmten Halbebene einen Sinn haben und somit die analytischen Erweiterungen der im Innern des Einheitskreises konvergierenden Potenzreihen darstellen.

Digitized by Google

# Zur Differentialgeometrie der Linienkomplexe.

Von **Konrad Zindler** in Innsbruck.

1. Wenn $x_1, y_1, z_1$ und $x_2, y_2, z_2$ die rechtwinkligen Zeiger (Koordinaten) zweier Punkte einer Geraden $g$ sind, so heißen die Größen

$$\begin{aligned} p_1 &= x_2 - x_1, & p_4 &= y_1 z_2 - y_2 z_1, \\ p_2 &= y_2 - y_1, & p_5 &= z_1 x_2 - z_2 x_1, \\ p_3 &= z_2 - z_1, & p_6 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned} \tag{1}$$

die rechtwinkligen homogenen Strahlenzeiger von $g$. Zwischen ihnen besteht die Identität

$$\sum_1^3 p_\nu p_{\nu+3} = 0, \tag{2}$$

wobei die Marken nach dem Modul 6 zu nehmen sind. Wenn nun sechs Funktionen

$$p_i = p_i(u, v, w) \qquad (i = 1, \ldots 6) \tag{3}$$

dreier unabhängiger Parameter $u, v, w$ gegeben sind, welche die Beziehung (2) erfüllen, so ist dadurch ein Linienkomplex in „Parameterdarstellung“ gegeben. Diese Darstellung habe ich im zweiten Bande meiner Liniengeometrie [1]) verwendet und will jetzt den besonderen Fall voraussetzen, daß $u, v, w$ mit den rechtwinkligen Zeigern $x, y, z$ eines auf dem Komplexstrahl liegenden Punktes $P$ identisch sind. [2]) Infolge der hiedurch erzielten Vereinfachungen wird es möglich sein, die Untersuchung der Umgebung eines regulären Komplexstrahles in einigen Punkten weiter zu führen,

[1]) Vgl. die §§ 47—50, 53, 55.

[2]) Schon bei Malus (Optique, 1808) treten zum erstenmal die Linienkomplexe in der Form auf, daß jedem Punkte des Raumes ein durch ihn gehender Strahl zugeordnet wird; vgl. meinen Bericht über differentielle Liniengeometrie in den Jahresb. d. D. Math.-Vereinigung, Bd. 15.

Digitized by Google

als es in der Liniengeometrie geschah, und auf eine eindeutig ausgezeichnete Parameterdarstellung der erwähnten Art aufmerksam zu machen.

Durch einen Punkt $P$ und die Richtung des Strahles ist dieser selbst bestimmt; also darf man nur noch $p_1, p_2, p_3$ als Funktionen von $x, y, z$ willkürlich wählen und erhält dann als Parameterdarstellung des Komplexes:

$$(4)\qquad \begin{cases} p_i = p_i(x, y, z) & (i = 1, 2, 3) \\ p_4 = y p_3 - z p_2, \\ p_5 = z p_1 - x p_3, \\ p_6 = x p_2 - y p_1. \end{cases}$$

**2.** Auch bei allgemeiner Parameterdarstellung (3) spielen in der Differentialgeometrie der Linienkomplexe folgende Größen eine wichtige Rolle [1]) (alle Summen gehen nach $\lambda$ von 1 bis 6):

$$(5)\qquad \begin{aligned} 2A_{11} &= \Sigma p_{\lambda u} p_{\lambda+3,u}, & 2A_{12} &= \Sigma p_{\lambda u} p_{\lambda+3,v}, \\ 2A_{22} &= \Sigma p_{\lambda v} p_{\lambda+3,v}, & 2A_{23} &= \Sigma p_{\lambda v} p_{\lambda+3,w}, \\ 2A_{33} &= \Sigma p_{\lambda w} p_{\lambda+3,w}, & 2A_{31} &= \Sigma p_{\lambda w} p_{\lambda+3,u}, \end{aligned}$$

$$p_{\lambda u} = \frac{\partial p_\lambda}{\partial u} \text{ u. s. w.} \qquad A_{ki} = A_{ik}.$$

Es sei hier beispielsweise nur erwähnt: Wenn wir $u, v, w$ von einem Parameter $t$ abhängen lassen und Striche Ableitungen nach $t$ bedeuten, wenn wir ferner

$$u' = u_1, \quad v' = u_2, \quad w' = u_3$$

setzen, so werden durch

$$(6)\qquad \sum_1^3 A_{ik} u_i u_k = 0$$

von allen Richtungen des Linienraumes, die im Komplex vom Strahl $u, v, w$ ausgehen, die schneidenden Richtungen ausgesondert. Deutet man die $u_i$ zugleich als homogene Punktzeiger in einer abbildenden Ebene, so werden also die schneidenden Richtungen durch einen Kegelschnitt abgebildet, der für die Theorie der Umgebung eines Komplexstrahles fundamental ist. [2])

In unserem besonderen Falle vereinfachen sich die Größen $A$ bedeutend, indem sie sich, wie eine einfache Rechnung zeigt, aus bloß neun Größen

[1]) Vgl. meine Liniengeom., Bd. II, § 47.
[2]) a. a. O. § 47, 48.

Digitized by Google

$$\delta_{1x} = \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_{2x} & p_{3x} \end{vmatrix}, \quad \delta_{2x} = \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ p_{3x} & p_{1x} \end{vmatrix}, \quad \delta_{3x} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_{1x} & p_{2x} \end{vmatrix},$$

(7)

$$\delta_{1y} = \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_{2y} & p_{3y} \end{vmatrix}, \quad \text{u. s. w.}$$

wie folgt zusammensetzen:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \delta_{1x}, & 2A_{12} &= \delta_{2x} + \delta_{1y}, \\ A_{22} &= \delta_{2y}, & 2A_{23} &= \delta_{3y} + \delta_{2z}, \\ A_{33} &= \delta_{3z}, & 2A_{31} &= \delta_{1z} + \delta_{3x}. \end{aligned} \tag{8}$$

Für einen singulären Komplexstrahl zerfällt die Gesamtheit (6) der schneidenden Richtungen in zwei lineare Richtungsbüschel. [1]) Führt man also in die Gleichung

$$|A_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{9}$$

die Werte (8) und dann (7) ein, so hat man unmittelbar den Ort derjenigen Punkte, deren zugeordnete Strahlen die Singularitätenkongruenz bilden.

**3.** Wir wollen nun den Zentralpunkt einer beliebigen durch einen bestimmten Strahl $g$ gehenden Regelfläche des Komplexes ermitteln. Eine solche erhalten wir, wenn wir uns in der Darstellung (4) die Größen $x$, $y$, $z$ als Funktionen eines Parameters $t$ denken. Die Ableitungen nach $t$ sollen durch Striche bezeichnet sein. Ferner machen wir die vereinfachende Voraussetzung:

$$\sum_1^3 p_i^2 = 1, \tag{10}$$

also

$$\sum_1^3 p_i p_i' = 0, \tag{11}$$

d. h. der Komplex soll durch Einheitsstäbe dargestellt sein. Nun hat man zur Bestimmung des Zentralpunktes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ einer durch Einheitsstäbe dargestellten Regelfläche die Gleichungen: [2])

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{p_2' p_6' - p_3' p_5' - p_1' D}{n}, \\ \eta &= \frac{p_3' p_4' - p_1' p_6' - p_2' D}{n}, \\ \zeta &= \frac{p_1' p_5' - p_2' p_4' - p_3' D}{n}, \end{aligned} \tag{12}$$

[1]) a. a. O. S. 181.
[2]) a. a. O. § 2, Gleichungen (17 a).



Digitized by Google

wobei

$$D = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1' & p_2' & p_3' \\ p_4 & p_5 & p_6 \end{vmatrix}, \qquad n = \sum_1^3 p_\lambda'^2.$$

In unserem Falle erhält man aus (4):

$$D = -(x p_1' + y p_2' + z p_3'), \tag{13}$$

ferner wenn man

$$x' p_1' + y' p_2' + z' p_3' = \sigma$$

setzt,

$$\xi = x - \frac{p_1 \sigma}{n}, \quad \eta = y - \frac{p_2 \sigma}{n}, \quad \zeta = z - \frac{p_3 \sigma}{n}. \tag{14}$$

Also ist die Entfernung $r$ des Zentralpunktes der Regelfläche vom Punkte $P \equiv (x, y, z)$ gegeben durch

$$r = \frac{\sigma}{n}. \tag{15}$$

Hierin ist einzuführen:

$$p_\lambda' = p_{\lambda x} x' + p_{\lambda y} y' + p_{\lambda z} z', \qquad (\lambda = 1, 2, 3), \tag{16}$$

wodurch $n$ und $\sigma$ quadratische Differentialformen von $x', y', z'$ werden. Die Richtungen der von $g$ ausgehenden Regelflächen des Komplexes, die ihren Zentralpunkt in einem bestimmten Punkte $Q$ von $g$ haben, bilden also eine quadratische Richtungsreihe,[1] die durch die Gleichung

$$n r - \sigma = 0 \tag{17}$$

dargestellt wird. Der Bequemlichkeit halber schreiben wir auch $x_1', x_2', x_3'$ statt $x', y', z'$ und könnnen dann setzen

$$n = \Sigma n_{ik} x_i' x_k', \quad \sigma = \Sigma \sigma_{ik} x_i' x_k', \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{18}$$

wobei $(\lambda = 1, 2, 3)$:

$$\begin{aligned} n_{11} &= \Sigma p_{\lambda x}^2, & n_{12} &= n_{21} = \Sigma p_{\lambda x} p_{\lambda y}, \\ n_{22} &= \Sigma p_{\lambda y}^2, & n_{23} &= n_{32} = \Sigma p_{\lambda y} p_{\lambda z}, \\ n_{33} &= \Sigma p_{\lambda z}^2, & n_{31} &= n_{13} = \Sigma p_{\lambda z} p_{\lambda x}; \end{aligned} \tag{19}$$

[1] a. a. O. S. 218. Dadurch ist die daselbst in der Übungsaufg. 43 angedeutete Sachlage bestätigt.

Digitized by Google

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= p_{1x}, & 2\sigma_{12} &= 2\sigma_{21} = p_{1y} + p_{2x}, \\ \sigma_{22} &= p_{2y}, & 2\sigma_{23} &= 2\sigma_{32} = p_{2z} + p_{3y}, \\ \sigma_{33} &= p_{3z}, & 2\sigma_{31} &= 2\sigma_{13} = p_{3x} + p_{1z}. \end{aligned} \tag{20}$$

Jetzt können wir die Gleichung (17) ausführlicher schreiben:

$$\sum (n_{ik} r - \sigma_{ik}) x_i' x_k' = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{21}$$

4. Fällt $Q$ mit dem Zentralpunkt $C$ von $g$ zusammen,[1]) so muß die quadratische Richtungsreihe (21) in zwei lineare Richtungsbüschel, nämlich das isotrope Büschel und das Gegenbüschel, zerfallen.[2]) Wir werden also, um den Zentralpunkt von $g$ selbst zu finden, die Determinante der linken Seite von (21) Null setzen:

$$| n_{ik} r - \sigma_{ik} | = 0. \tag{22}$$

Entwickelt man nach Potenzen von $r$, so verschwindet der Koeffizient von $r^3$. Denn durch Differentiation von (10) nach $x, y, z$ erhält man drei Gleichungen, aus denen folgt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{1x} & p_{2x} & p_{3x} \\ p_{1y} & p_{2y} & p_{3y} \\ p_{1z} & p_{2z} & p_{3z} \end{vmatrix} = 0, \tag{23}$$

und es ist

$$| n_{ik} | = \Delta^2.$$

Daß auch das Glied mit $r^2$ verschwindet, sieht man am bequemsten durch eine Überlegung ein: Deutet man $x_1', x_2', x_3'$ zugleich als homogene Punktzeiger, durch welche die von $g$ ausgehenden Richtungen in einer Ebene abgebildet werden, so stellt (17) ein Kegelschnittbüschel $\mathfrak{B}'$ dar,[3]) das durch die Kegelschnitte $n = 0$ und $\sigma = 0$ bestimmt ist. Der erstere enthält vermöge seiner Entstehung aus $\sum p_\lambda'^2 = 0$ einen einzigen reellen Punkt, dessen Zeigerverhältnisse wegen $p_1' = p_2' = p_3' = 0$ durch die Adjunkten von $\Delta$ bestimmt

[1]) Die Zuordnung zwischen den Punkten eines regulären Komplexstrahles $g$ und den Berührungsebenen der zugehörigen Komplexkegel längs $g$ ist eine Korrelation. Dem unendlich fernen Punkte von $g$ entspricht die „asymptotische" Ebene der Korrelation, die auch asymptotische Ebene des Komplexstrahles heißt, der hiezu senkrechten „Zentralebene" entspricht der „Zentralpunkt" der Korrelation, der auch Zentralpunkt des Komplexstrahles heißt.

[2]) a. a. O. S. 160 und 190.

[3]) Vgl. a. a. O. § 48 die ganz analoge Diskussion eines anderen Kegelschnittbüschels $\mathfrak{B}$, das durch die Betrachtung der Regelflächen mit gemeinsamem Verteilungsparameter hervorgeht; auch $\mathfrak{B}'$ wurde a. a. O., Übungsaufg. 43, flüchtig erwähnt.



Digitized by Google

werden. Setzt man einen der Werte $a$, $b$, $c$ konstant, so ist dadurch auch die Zentralebene fixiert und die Richtungsmannigfaltigkeiten, die durch die verschiedenen Werte der Konstanten bestimmt werden, bilden sich durch ein Strahlenbüschel ab, das hier eine analoge Rolle spielt, wie früher das Kegelschnittsbüschel $\mathfrak{B}'$. Der Scheitel des Strahlenbüschels ist durch $p_1' = p_2' = p_3' = 0$ bestimmt und der schon früher erwähnten zylindrischen Richtung zugeordnet.

Digitized by Google

windestrahles $g$ von der $Z$-achse mit $NP$ bezeichnen ($N$ auf $Z$, $P$ auf $g$), $NP = u$ setzen, den Winkel zwischen der $XZ$-Ebene und $NP$ mit $v$ bezeichnen, endlich $ON = w$ setzen, so lautet die Parameterdarstellung des Gewindes: [1])

$$
\begin{aligned}
p_1 &= k \sin v, & p_4 &= k w \cos v + u^2 \sin v,\\
p_2 &= -k \cos v, & p_5 &= k w \sin v - u^2 \cos v,\\
p_3 &= u, & p_6 &= -k u,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

und wir wissen von vornherein, daß $P$ der Zentralpunkt von $g$ ist. Führen wir daher seine Zeiger $x, y, z$ statt $u, v, w$ in (26) als Parameter ein, indem wir setzen

$$
\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},
$$

$$
u = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad w = z,
$$

so müssen wir nach Division durch $\sqrt{k^2+x^2+y^2}$ eine ausgezeichnete Darstellung der Form (4) erhalten. In der Tat kann man leicht bestätigen, daß die Bedingung (25) erfüllt ist.

**6.** Die Richtungen, die in einem Komplex von einem bestimmten Strahl $g$ ausgehen, lassen sich einerseits durch die natürlichen Richtungszeiger $r$, $\alpha$, $P$ festlegen (von denen $r$ den Zentralpunkt der entsprechenden Regelflächen, $\alpha$ die Zentralebene bestimmt und $P$ den Verteilungsparameter bedeutet), anderseits durch die Größen $u' : v' : w'$ oder bei der Darstellung (4) durch $x' : y' : z'$. Wir nennen die letzteren der Kürze halber homogene Richtungszeiger und es fragt sich, wie sich die natürlichen Richtungszeiger [zwischen denen, wenn man im Komplex bleibt, eine Beziehung besteht [2])] durch die homogenen ausdrücken. Für $r$ haben wir dies soeben erledigt [Gleichung (15)], für $P$ vergleiche man den § 47 des zweiten Bandes meiner Liniengeometrie; es erübrigt nur noch die Besprechung von $\alpha$, namentlich die Untersuchung der Richtungsmannigfaltigkeiten $\alpha = \text{const}$.

Die Zeiger $a, b, c$ der Zentralebene einer Regelfläche sind unter der Voraussetzung (10) gegeben durch [3])

$$
a = \frac{p_1'}{D}, \quad b = \frac{p_2'}{D}, \quad c = \frac{p_3'}{D}.
$$

Führt man hier aus (13) und (16) die Werte ein, so sieht man, daß Zähler und Nenner homogene lineare Formen von $x', y', z'$

[1]) a. a. O. S. 209.
[2]) a. a. O. S. 156.
[3]) a. a. O. S. 6.

Digitized by Google

werden. Setzt man einen der Werte $a$, $b$, $c$ konstant, so ist dadurch auch die Zentralebene fixiert und die Richtungsmannigfaltigkeiten, die durch die verschiedenen Werte der Konstanten bestimmt werden, bilden sich durch ein Strahlenbüschel ab, das hier eine analoge Rolle spielt, wie früher das Kegelschnittsbüschel $\mathfrak{B}'$. Der Scheitel des Strahlenbüschels ist durch $p_1' = p_2' = p_3' = 0$ bestimmt und der schon früher erwähnten zylindrischen Richtung zugeordnet.

Digitized by Google

# Über das allgemeine Problem der Variationsrechnung.

Von **Hans Hahn** in Wien.

Die folgenden Zeilen sollen sich mit einem speziellen Punkte aus der Theorie des sogenannten allgemeinen Problems der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Veränderlichen befassen. Dasselbe lautet in geometrischer Einkleidung:

Es sollen zwei gegebene Punkte $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ und $(x_1, y_1^1, \ldots, y_n^1)$ eines $(n+1)$-dimensionalen Raumes durch eine den Gleichungen:

$$(1) \qquad \varphi_i(x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n') = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

genügende Kurve:

$$(2) \qquad y_k = y_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

verbunden werden, welche dem Integral:

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n')\, dx$$

einen kleineren (oder größeren) Wert erteilt als jede andere, genügend benachbarte, dieselben Punkte verbindende und ebenfalls den Gleichungen (1) genügende Kurve.[1])

Man denkt sich nun eine den Gleichungen (1) genügende, durch die beiden vorgeschriebenen Randpunkte gehende Kurve gegeben und sucht nach notwendigen Bedingungen, denen sie genügen muß, um das Integral (3) zu einem Extremum zu machen. Die weitere Behandlung des Problems ist eine ganz verschiedene, je nachdem der „Hauptfall" oder der „Ausnahmefall" vorliegt. Wir befinden uns im Hauptfalle, wenn die Koordinaten $y_k(x)$ der gegebenen Kurve so beschaffen sind, daß das System von $n$ linearen Differentialgleichungen für die $m$ Größen $\mu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{m} \left( \mu_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \mu_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

keine von Null verschiedenen Lösungen besitzt. Wir wollen zunächst annehmen, es liege der Hauptfall vor.

[1]) Dabei ist natürlich $m < n$ vorausgesetzt. Das Differentialgleichungssystem (4) wird dann im allgemeinen keine von Null verschiedene Lösung zulassen.

Digitized by Google

Als erste notwendige Bedingung ergibt sich dann bekanntlich die folgende: Die Koordinaten der Kurve (2) müssen zusammen mit $m$ Funktionen $\lambda_i\,(i=1,2,\ldots,m)$ den Gleichungen genügen:

$$(5)\quad \frac{\partial f}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_k'}+\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}\lambda_i\frac{\partial \varphi}{\partial y_k'}\right)=0\quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Eine solche Kurve wird als Extremale unseres Variationsproblems bezeichnet. Die Gleichungen (5) reichen im Verein mit den Gleichungen (1) und den für die $y_k$ vorgeschriebenen Randbedingungen zur Bestimmung der $m+n$ Funktionen $y_k$ und $\lambda_i$ im allgemeinen aus.

Wir setzen nun der Kürze halber:

$$f+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i=F.$$

Eine zweite notwendige Bedingung, die das Analogon des Legendreschen Kriteriums für unser allgemeines Problem ist, lautet dann: Die quadratische Form:

$$\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i'\,\partial y_k'}\zeta_i\zeta_k,$$

deren Unbestimmte den Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'}\zeta_k=0\quad (i=1,2,\ldots,m)$$

unterworfen seien, darf für $x_0\leqq x\leqq x_1$ nicht verschiedener Vorzeichen fähig sein.

Diese Bedingung wurde zuerst von A. Clebsch aufgestellt,[1]) auf Grund der Transformation der zweiten Variation des Integrals (3) in die sogenannte reduzierte Form. Eine strenge Begründung dieser notwendigen Bedingung wurde von G. v. Escherich gegeben,[2]) ebenfalls vermöge der Transformation der zweiten Variation. Da weiterhin in der Theorie unseres Variationsproblems von der reduzierten Form der zweiten Variation kein Gebrauch gemacht wird, so entsteht, wie v. Escherich bemerkt,[3]) die Aufgabe, unsere notwendige Bedingung zu begründen, ohne die Transformation der zweiten Variation zu verwenden. Es gelingt dies ganz analog, wie im einfachsten Falle, durch Verfolgung des Weges, der Weierstraß zu seiner $E$-Funktion führte. Es erweisen sich als nützlich bei

[1]) A. Clebsch, Journ. f. Math. 55.
[2]) G. v. Escherich, Wien. Ber. 107, p. 1383 ff.
[3]) G. v. Escherich, Wien. Ber. 108, p. 1271.

Digitized by Google

Durchführung dieses Gedankenganges gewisse, von mir an anderer Stelle angestellte Überlegungen; [1]) im übrigen stützen sich die folgenden Rechnungen auf den bekannten Ansatz aus den grundlegenden Arbeiten von A. Mayer über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode. [2])

Im nachstehenden setzen wir die folgenden Bedingungen als erfüllt voraus: Die Funktionen $f$ und $\varphi_i$ seien für alle in Betracht kommenden Werte von $x, y_k, y_k'$ samt ihren Ableitungen der ersten drei Ordnungen stetig. Die Koordinaten der Kurve (2) seien eindeutige, stetige, einmal stetig differenzierbare Funktionen von $x$. Diese Bedingungen genügen ja, um das Bestehen der Gleichungen (5) als notwendig zu erweisen. [3]) Weiters setzen wir voraus, daß entlang der Extremale (2) überall:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_n'}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_n'^2}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}; & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}; & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

sei. Unsere Extremale geht dann durch keine singuläre Stelle des Differentialgleichungssystems (5) und (1), so daß ihre Koordinaten noch ein zweites Mal stetig differenzierbar sind. Endlich folgt aus dem Nichtverschwinden der angeschriebenen Determinante, daß überall auf unserer Extremale mindestens eine Determinante der Matrix:

$$\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right\|_{\substack{(i=1,2,\ldots,m) \\ (k=1,2,\ldots,n)}}$$

von Null verschieden ist.

Es bezeichne $\xi_1$ einen beliebig gewählten Punkt des Intervalls $(x_0 x_1)$. Wir können dann immer annehmen, daß in $\xi_1$ gerade die Determinante:

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right|_{(i,k=1,2,\ldots,m)} \tag{6}$$

[1]) Math. Ann. 58.
[2]) A. Mayer, Math. Ann. 26. Leipz. Ber. 47.
[3]) Monatsh. f. Math. u. Phys. 14, p. 325 ff.

Digitized by Google

von Null verschieden ist. Bedeutet dann $\xi_0$ einen genügend nahe an $\xi_1$ gelegenen Punkt des Intervalls $(x_0\,\xi_1)$, so ist gewiß die Determinante (6) auch im ganzen Intervall $(\xi_0\,\xi_1)$ von Null verschieden. Wir betrachten nun neben der Extremale (2) eine variierte Kurve:

$$y_k = y_k(x) + \Delta y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

die durch den Punkt $\xi_0$ unserer Extremale hindurchgehen und ebenfalls den Gleichungen (1) genügen möge. Gibt man sich die Zuwächse $\Delta y_{m+1}, \ldots, \Delta y_n$ willkürlich vor (aber so, daß sie für $x = \xi_0$ verschwinden), so sind die Zuwächse $\Delta y_1, \ldots, \Delta y_m$, die ja auch für $x = \xi_0$ verschwinden sollen, durch die Gleichungen (1) vollständig bestimmt. Setzt man speziell:

$$\Delta y_k = \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r u_k^r(x) \quad (k = m+1, \ldots, n),$$

wo die $\varepsilon_r$ Konstante bedeuten, die $u_k^r(x)$ aber stetige, stetig differenzierbare Funktion, die in $\xi_0$ sämtlich verschwinden, so wird:

$$\Delta y_k = \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r u_k^r(x) + [\varepsilon]_2 \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

wo die $u_k^r(x)$ ebenfalls stetige, stetig differenzierbare, in $\xi_0$ verschwindende Funktionen sind, und $[\varepsilon]_2$ — ebenso wie im folgenden — eine abkürzende Bezeichnung für das Restglied der Taylorschen Reihe ist. Dabei bestehen zwischen den $u_k^r(x)$ die Gleichungen:

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} u_k^r + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} (u_k^r)' \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ r = 0, 1, \ldots, m).$$

Die Werte der Ausdrücke $u_k^r$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ an einer beliebigen Stelle $\xi$ des Intervalls $(\xi_0\,\xi_1)$ lassen sich nun nach A. Mayer in der nachstehenden Weise durch die $u_k^r$ $(k = m+1, \ldots, n)$ ausdrücken (wobei bei den $u_k^r$ der Einfachheit halber der obere Index weggelassen ist):

Man bezeichnet mit $\mu_i^s$ $(i, s = 1, 2, \ldots, m)$ ein Fundamentallösungssystem des in $(\xi_0\,\xi_1)$ regulären Systems linearer Differentialgleichungen:

$$\sum_{i=1}^{m} \left( \mu_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \mu_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Digitized by Google

Aus den Gleichungen (7) folgt dann sofort:

$$\sum_{k=m+1}^{n} u_k \sum_{i=1}^{m} \left( \mu_i^s \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \mu_i^s \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right) + \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} u_k \sum_{i=1}^{m} \mu_i^s \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} = 0$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m)$$

und durch Integration von $\xi_0$ bis $\xi$:

$$\sum_{k=1}^{m} u_k \sum_{i=1}^{m} \mu_i^s \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \Big]_{\xi} = - \sum_{k=m+1}^{n} u_k \sum_{i=1}^{m} \mu_i^s \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \Big]_{\xi} -$$

$$- \int_{\xi_0}^{\xi} \sum_{k=m+1}^{n} u_k \sum_{i=1}^{m} \left( \mu_i^s \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \mu_i^s \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \right) dx \quad (s = 1, 2, \ldots, m).$$

Diese Gleichungen können, da die Determinanten (6) und $|\mu_i^s|_{(i,s=1,2,\ldots,m)}$ an der Stelle $\xi$ nicht verschwinden, nach den $u_k(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ aufgelöst werden und ergeben:

$$u_k(\xi) = \sum_{s=m+1}^{n} \varphi_s^k u_s(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi} \sum_{s=m+1}^{n} u_s \sum_{i=1}^{m} \left( \nu_i^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \nu_i^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_s'} \right) dx,$$

wo die Ausdrücke $\varphi_s^k$ und $\nu_i^k$ leicht zu bilden sind und von der Wahl der $u_s(x)$ $(s = m+1, \ldots, n)$ nicht abhängen.

Ist speziell:

$$(8) \qquad u_s^1(\xi) = u_s^2(\xi) = \cdots = u_s^m(\xi) = 0 \quad (s = m+1, \ldots, n)$$

und setzt man der Kürze halber:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \sum_{s=m+1}^{n} u_s^r \sum_{i=1}^{m} \left( \nu_i^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \nu_i^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_s'} \right) dx = W_k^{(\xi)}(u^r),$$

so erhält man für $\Delta y_k]_{\xi}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ die Ausdrücke:

$$(9) \quad \Delta y_k]_{\xi} = \varepsilon_0 \sum_{s=m+1}^{n} \varphi_s^k u_s^0(\xi) + \sum_{r=0}^{m} \varepsilon_r W_k^{r(\xi)}(u^r) + [\varepsilon]_2 \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Es bezeichne nun $v_s^r(x)$ $(r = 1, 2, \ldots, m;\ s = m+1, \ldots, n)$ ein System stetiger, stetig differenzierbarer Funktionen, die sämtlich sowohl in $\xi_0$ als in $\xi_1$ verschwinden und außerdem so gewählt seien, daß die Determinante

$$(10) \qquad |W_k^{(\xi_1)}(v^r)|_{(r,k=1,2,\ldots,m)}$$

Digitized by Google

von Null verschieden ausfällt. Daß dies — im Hauptfalle — sicher möglich ist, habe ich an anderer Stelle gezeigt.[1])

Wir legen nun durch den Punkt $\xi_1$ unserer Extremale eine Kurve, deren Gleichung die Form habe:

$$(11)\quad y_k = \tilde{y}_k(x) = y_k(\xi_1) + \tilde{y}_k'(\xi_1)(x-\xi_1) + [x-\xi_1]_2 \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

und die den Gleichungen (1) genüge, so daß:

$$(12)\quad \tau_i(x;\ y_1(\xi_1),\ldots,y_n(\xi_1);\ \tilde{y}_1'(\xi_1),\ldots,\tilde{y}_n'(\xi_1)) = 0 \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

ist. Dann wollen wir zunächst zeigen, daß jeder dem Punkte $\xi_1$ genügend nahe gelegene Punkt $\xi$ dieser Kurve (dessen Abszisse dem Intervall $(\xi_0\,\xi_1)$ angehöre) sich mit dem Punkte $\xi_0$ unserer Extremale durch eine den Gleichungen (1) genügende Kurve:

$$(13)\qquad y_k = \bar{y}_k(x) = y_k(x) + [\xi-\xi_1]_1 \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

verbinden läßt.

Zu diesem Zwecke setzen wir in (9):

$$\varepsilon_0 = \xi - \xi_1$$

$$u_s^0(x) = \frac{x-\xi_0}{(\xi-\xi_0)-(\xi-\xi_1)}\left(\tilde{y}_s(\xi) - y_s(\xi)\right) \quad (s=m+1,\ldots,n)$$

$$u_s^r(x) = v_s^r\left(\xi_0 + (x-\xi_0)\frac{\xi_1-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right) \quad (r=1,2,\ldots,m;\ s=m+1,\ldots,n).$$

Dann sind die Gleichungen (8) erfüllt. Setzen wir weiter:

$$\bar{y}_k(x) = y_k(x) + (\xi-\xi_1)u_k^0(x) + \varepsilon_1 u_k^1(x) + \cdots + \varepsilon_m u_k^m(x)$$
$$(k=m+1,\ldots,n),$$

so bestehen bereits die Gleichungen:

$$\bar{y}_k(\xi) = \tilde{y}_k(\xi) \quad (k=m+1,\ldots,n).$$

Wir haben noch zu zeigen, daß bei geeigneter Wahl von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ diese selben Gleichungen auch noch für $k=1,2,\ldots,m$ erfüllt werden können:

Beachten wir, daß zufolge (9):

$$\bar{y}_k(\xi) = y_k(\xi) + (\xi-\xi_1)\sum_{s=m+1}^{n}\varphi_s^k u_s^0(\xi) + (\xi-\xi_1)\,W_k^{(\xi)}(u^0) +$$
$$+\sum_{r=1}^{m}\varepsilon_r W_k^{(\xi)}(u^r) + [\xi-\xi_1,\varepsilon]_2 \quad (k=1,2,\ldots,m)$$

[1]) Math. Ann. 58, p. 155 ff.

Digitized by Google

wird. Man ersieht hieraus die Richtigkeit der folgenden Behauptungen: Die linken Seiten der $m$ Gleichungen:

$$\bar{y}_k(\xi) - \tilde{y}_k(\xi) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{14}$$

sind in der Umgebung der Stelle $\xi = \xi_1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_m = 0$ stetige, mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktionen von $\xi, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$. An der genannten Stelle sind diese Gleichungen erfüllt. Ihre Funktionaldeterminante nach $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ hat an dieser Stelle den Wert:

$$| W_k^{(\xi_1)}(u^r) |_{(k, r = 1, 2, \ldots, m)}$$

was zufolge der Definition der $u^{(r)}(x)$ nichts anderes ist, als die Determinante (10), die nach Voraussetzung von Null verschieden ist.

Es können also, nach einem bekannten Satze $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ so als stetige, stetig differenzierbare Funktionen von $\xi$ bestimmt werden, daß die Gleichungen (14) auch für alle von $\xi_1$ genügend wenig verschiedenen $\xi$ erfüllt bleiben. Das aber ist es, was wir behauptet hatten.

Wir bezeichnen nun mit $J$ das Integral (3), erstreckt über das Stück $(\xi_0\, \xi_1)$ unserer Extremale, mit $\bar{J}$ dasselbe Integral, erstreckt von $\xi_0$ bis $\xi$ über die Kurve (13), von $\xi$ bis $\xi_1$ über die Kurve (11). Da alle diese Kurven den Gleichungen (1) genügen, können wir statt des Integrals (3) auch das Integral:

$$\int \Big( f(x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n') \Big) dx =$$

$$\int F(x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n')\, dx$$

betrachten. Wir wollen nun die Differenz $\bar{J} - J$ als Funktion des Parameters $\xi$ betrachten und an der Stelle $\xi = \xi_1$ nach der Taylorschen Formel entwickeln. Es ist:

$$\bar{J} - J = \int_{\xi_0}^{\xi} \Big( F(x; \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n; \bar{y}_1', \ldots, \bar{y}_n') - F(x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n') \Big) dx$$

$$+ \int_{\xi}^{\xi_1} F(x; \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n; \tilde{y}_1', \ldots, \tilde{y}_n')\, dx - \int_{\xi}^{\xi_1} F(x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n')\, dx.$$

Für das erste rechts stehende Integral findet man bekanntlich durch partielle Integration den Ausdruck: [1])

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_k'} \right) (\bar{y}_k - y_k)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k'} (\bar{y}_k - y_k) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + [\xi - \xi_1]_2,$$

[1]) Dabei hat man zu beachten, daß $\bar{y}_k(x) = y_k(x) + [\xi - \xi_1]_1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Digitized by Google

der sich wegen des Bestehens der Gleichungen (5) und wegen der Gleichungen:

$$\bar{y}_k(\xi_0) = y_k(\xi_0) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

weiter reduziert auf:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k'}\Big]_{\xi} \big(\bar{y}_k(\xi) - y_k(\xi)\big) + [\xi - \xi_1]_2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k'}\Big]_{\xi} \big(\tilde{y}_k'(\xi_1) - y_k'(\xi_1)\big)(\xi - \xi_1) + [\xi - \xi_1]_2.$$

Ferner ist:

$$\int_{\xi}^{\xi_1} F(x; \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n; \tilde{y}_1', \ldots, \tilde{y}_n')\, dx =$$

$$= -F\big(\xi_1; y_1(\xi_1), \ldots, y_n(\xi_1); \tilde{y}_1'(\xi_1), \ldots, \tilde{y}_n'(\xi_1)\big)(\xi - \xi_1) + [\xi - \xi_1]_2$$

und:

$$\int_{\xi}^{\xi_1} F(x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n')\, dx =$$

$$= -F\big(\xi_1; y_1(\xi_1), \ldots, y_n(\xi_1); y_1'(\xi_1), \ldots, y_n'(\xi_1)\big)(\xi - \xi_1) + [\xi - \xi_1]_2,$$

so daß wir schließlich erhalten:

$$(15) \quad \bar{J} - J = -E\big(\xi_1; y(\xi_1), y'(\xi_1), \tilde{y}'(\xi_1)\big)(\xi - \xi_1) + [\xi - \xi_1]_2,$$

wo:

$$E(x; y, y'; \tilde{y}') =$$

$$= F(x; y_1, \ldots, y_n; \tilde{y}_1', \ldots, \tilde{y}_n') - F(x; y_1, \ldots, y_n; y_1' \ldots, y_n')$$

$$(16) \quad - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k'}(x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n')(\tilde{y}_k' - y_k')$$

gesetzt ist. Es ist ferner zu beachten, daß die Differenz $\xi - \xi_1$ negativ ist, da ja der Punkt $\xi$ im Intervall $(\xi_0\, \xi_1)$ liegen sollte.

Soll nun aber der Bogen $(x_0\, x_1)$ unserer Extremale das gewünschte Extremum liefern, so muß auch der Bogen $(\xi_0\, \xi_1)$ ein Extremum liefern, was wegen (15) offenbar nur dann möglich ist, wenn der Ausdruck (16) für alle den Gleichungen (12) genügenden Wertsysteme von $\tilde{y}_k'(\xi_1)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dasselbe Vorzeichen hat.

Digitized by Google

Da ferner der Punkt $\xi_1$ ein ganz beliebiger Punkt des Intervalls $(x_0 x_1)$ war, so haben wir die gewünschte Verallgemeinerung der notwendigen Bedingung von Weierstraß auf unser allgemeines Problem:

Für das Eintreten eines Extremums ist notwendig, daß auf dem ganzen Bogen $(x_0 x_1)$ der Extremale (2) die Ungleichung bestehe:

$$E\left(x; y(x), y'(x), \tilde{y}'\right) \geqq 0 \quad (\text{oder} \leqq 0) \tag{17}$$

für alle den Gleichungen:

$$\varphi_i\left(x; y_1(x), \ldots, y_n(x); \tilde{y}'_1, \ldots, \tilde{y}'_n\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{18}$$

genügenden Werte der Unbestimmten $\tilde{y}'_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Das Legendresche Kriterium ist hieraus sofort ableitbar, wenn man beachtet, daß

$$E(x; y, y', \tilde{y}') =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k}(x; y_1, \ldots, y_n; y'_1, \ldots, y'_n)(\tilde{y}'_i - y'_i)(\tilde{y}'_k - y'_k) + [\tilde{y}' - y']_3$$

ist, während die Gleichungen (18) in die Form gebracht werden können:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k}(x; y_1, \ldots, y_n; y'_1, \ldots, y'_n)(\tilde{y}'_k - y'_k) + [\tilde{y}'_k - y'_k]_2 = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Es ist also offenbar, daß die Ungleichung (17) für alle den Gleichungen (18) genügenden $\tilde{y}'_k$ nur dann bestehen kann, wenn die Ungleichung:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k}\left(x; y_1(x), \ldots, y_n(x); y'_1(x), \ldots, y'_n(x)\right) \zeta_i \zeta_k \geqq 0 \ (\text{oder} \leqq 0)$$

für alle den Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k}\left(x; y_1(x), \ldots, y_n(x); y'_1(x), \ldots, y'_n(x)\right) \zeta_k = 0$$

genügenden $\zeta$ erfüllt ist. Dies aber ist die gesuchte Verallgemeinerung des Legendreschen Kriteriums auf unser allgemeines Problem. [1])

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß alles Bisherige sich nur auf den Hauptfall bezieht, denn nur im Hauptfalle ließ sich

[1]) Wie aus dem Obigen ersichtlich ist, besteht die einzige Schwierigkeit bei Übertragung des Weierstraßschen Gedankenganges auf unser allgemeines

Digitized by Google

die Existenz der bei dem obigen Beweise zur Verwendung gelangenden Vergleichskurven beweisen. Ganz einfache Beispiele zeigen, daß sich in der Tat im Ausnahmefalle die Existenz solcher Kurven nicht mehr behaupten läßt. Demgegenüber dürfte es der Beachtung wert sein, daß bei dem folgenden Problem die Beschränkung auf den Hauptfall überflüssig ist, so daß man hier die in Rede stehenden notwendigen Bedingungen ganz allgemein aufstellen kann:

Es sei eine gegebene Fläche unseres $(n+1)$-dimensionalen Raumes:

$$g(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \tag{19}$$

mit einem gegebenen Punkte $(x_1, y_1^1, \ldots, y_n^1)$ durch einen den Gleichungen (1) genügenden Kurvenbogen zu verbinden, der dem Integrale (3) einen kleineren (oder größeren) Wert erteilt, als jeder andere genügend benachbarte den Gleichungen (1) genügende Kurvenbogen, der ebenfalls die gegebene Fläche mit dem gegebenen Punkte verbindet.

Sei in der Tat hier eine Extremale unseres Problems gegeben, die bekanntlich die Fläche (19) transversal schneiden muß.[1]) Legen wir dann durch den Punkt $\xi_1$ dieser Extremale eine den Gleichungen (1) genügende Kurve

$$y_k = \tilde{y}_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

so kommt alles darauf an, zu beweisen, daß es eine ebenfalls den Gleichungen (1) genügende Kurve:

$$y_k = \bar{y}_k(x, \xi) = y_k(x) + w_k(x)(\xi - \xi_1) + [\xi - \xi_1]_2 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gibt, die die Fläche (19) mit dem willkürlichen, aber genügend nahe an $\xi_1$ gelegenen Punkte $\xi$ der Kurve $y_k = \tilde{y}_k(x)$ verbindet. Eine solche Kurve aber erhält man, wie man leicht einsieht, in der folgenden Weise:

Man setze:

$$\bar{y}_k(x) = y_k(x) + \Delta y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

wähle $\Delta y_k$ $(k = m+1, \ldots, n)$ willkürlich, aber so, daß sie für $x = \xi$ die Werte $\tilde{y}_k(\xi) - y_k(\xi)$ $(k = m+1, \ldots, n)$ annehmen und bestimme dann $\Delta y_k$ $(k = m+1, \ldots, n)$ aus den Gleichungen (1) in Verbindung mit den Anfangsbedingungen:

$$\Delta y_k]_\xi = \tilde{y}_k(\xi) - y_k(\xi) \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

---

Problem im Nachweise der Existenz gewisser den Gleichungen (1) genügender Kurven. Das Vorhandensein dieser Kurven würde sich unmittelbar ergeben, wenn es gelänge, allgemein nachzuweisen, daß im Hauptfalle die vom Punkte $\xi_0$ ausgehenden Extremalen ein Feld des Bogens $(\xi_0\, \xi_1)$ bilden. Da aber der einzige mir bekannte Beweis dieses Satzes (G. v. Escherich, Wien. Ber. 110, p. 1405) das Legendresche Kriterium bereits als erfüllt voraussetzt, so kann er zum Beweise dieses Kriteriums nicht verwendet werden.

[1]) Dabei möge der Fall, daß die transversale Lage in Berührung ausartet, der Sicherheit halber ausgeschlossen werden.

Digitized by Google

# Ein Beitrag zur Tetraederlehre.

Von **V. Eberhard** in Halle a. S.

Die folgenden Sätze habe ich auf Anregung von Herrn F. Meyer zusammengestellt, welchem ich sie kürzlich gelegentlich persönlich unter Besprechung ihrer gegenseitigen Zusammenhänge mitgeteilt hatte.[1]) Um möglichste Knappheit des Ausdruckes zu erzielen, bezeichne ich allgemein die Ecken eines Tetraeders durch große lateinische, die ihnen gegenüberliegenden Flächen durch die gleichlautenden kleinen griechischen Buchstaben.

I. Fällt man aus einem beliebigen Punkte $P$ des Raumes auf die Flächen

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta$$

eines gegebenen Tetraeders

$$\mathfrak{T} \equiv ABCD$$

resp. die Lote $\overline{PA_1}$, $\overline{PB_1}$, $\overline{PC_1}$, $\overline{PD_1}$ und verbindet deren Fußpunkte durch die Ebenen

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$$

zu einem neuen Tetraeder

$$\mathfrak{T}_1 \equiv A_1B_1C_1D_1,$$

so laufen die aus den Ecken

$$A, B, C, D$$

auf resp. die Flächen

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$$

gefällten Senkrechten

$$\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'}$$

durch einen und denselben Punkt $P_1$.

[1]) Im nächsten Heft erscheint ein damit zusammenhängender Aufsatz von Herrn F. Meyer. D. R.



Digitized by Google

Der Beweis liegt auf der Hand. Nach der Konstruktion sind die zweimal sechs Kanten der Tetraeder $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$ paarweise einander senkrecht zugeordnet, und zwar

$$\overline{A_1B_1} \perp \overline{CD},\ \overline{A_1C_1} \perp \overline{DB},\ \overline{A_1D_1} \perp \overline{BC},$$
$$\overline{B_1C_1} \perp \overline{AD},\ \overline{C_1D_1} \perp \overline{AB},\ \overline{D_1B_1} \perp \overline{AC};$$

also den Kanten einer Ecke von $\mathfrak{T}_1$ die Kanten einer Fläche von $\mathfrak{T}$ und umgekehrt.

Es steht aber, um an ein bestimmtes Paar anzuknüpfen, die Kante

$$A_1B_1$$

als Schnitt der Ebenen

$$\gamma_1 \text{ und } \delta_1$$

senkrecht auf deren Normalen

$$CC' \text{ und } DD',$$

also auch auf den Ebenen

$$[DCC'] \text{ und } [CDD']$$

und diese fallen mithin zusammen.

Da hiernach je zwei der vier Lote

$$\overline{AA'},\ \overline{BB'},\ \overline{CC'},\ \overline{DD'}$$

als in einer Ebene liegend sich schneiden, alle vier aber als durch die Ecken von $\mathfrak{T}$ gehend nicht derselben Ebene angehören, so müssen sich ihre paarweisen sechs Schnittpunkte in einem, $P_1$, vereinigen. q. e. d.

In vorstehendem Beweise ist nur die vertikale Stellung der sechs Kantenpaare von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}$ unabhängig von der durch die Wahl des Punktes $P$ bedingten gegenseitigen Lage letzterer benützt worden. Man kann daher dem Satze I sofort die allgemeinere Fassung geben:

II. Hat man im Raume zwei in obigem Sinne kantenvertikale Tetraeder

$$\mathfrak{T} \equiv ABCD \text{ und } \mathfrak{T}_1 \equiv A_1B_1C_1D_1,$$

so schneiden sich

*a*) sowohl die aus den vier Ecken des einen auf die zugeordneten Flächen des anderen gefällten vier Lote,

*b*) als auch die aus den sechs Kanten des einen auf die zugeordneten Kanten des anderen senkrecht

Digitized by Google

gelegten sechs Ebenen in einem und demselben Punkte.

Diese erweiterte Auffassung des Satzes I zeigt unmittelbar, daß die zwischen den Punkten $P$ und $P_1$ bestehende Abhängigkeit eine involutorische ist. Man erkennt das auch direkt aus der Konfiguration in I, wenn man den Durchschnitt etwa der Ebene

$$[A_1PB_1]$$

mit den durch die zu ihr normale Kante

$$\overline{CD}$$

jenen Ebenen betrachtet

$$[CDB],\ [CDA],\ [CDP_1].$$

Bezeichnen nämlich

$$F \text{ und } F'$$

die Schnittpunkte der Ebenen

$$[A_1PB_1] \text{ und } [CP_1D]$$

mit resp. den Kanten

$$\overline{CD} \text{ und } \overline{A_1B_1},$$

so folgt aus der Lage der vier Punkte

$$F,\ A_1,\ P,\ B_1$$

auf einem Kreise mit dem Durchmesser $\overline{FP}$ die Gleichheit der Winkel

$$\sphericalangle A_1FP \text{ und } \sphericalangle A_1B_1P$$

und wegen

$$\sphericalangle FB_1A_1 + \sphericalangle A_1B_1P = 90^0 = \sphericalangle FB_1A_1 + \sphericalangle B_1FF'$$

auch diejenige der Winkel

$$\sphericalangle A_1FP \text{ und } \sphericalangle B_1FF' = \sphericalangle B_1FP_1.$$

Demnach haben die Neigungswinkel des aus irgend einer Kante von $\mathfrak{T}$ nach den Punkten $P$ und $P_1$ gelegten Ebenenpaares dieselben Halbierungsebenen wie die Winkel des in dieser Kante zusammenstoßenden Paares Tetraederflächen.

Damit ist die Vertauschbarkeit der Punkte $P$ und $P_1$ in der Konstruktion I evident und es erhellt zugleich der Satz:

$_1$ besteht eine
n Grades und



Digitized by Google

III*a*. Im besonderen entspricht der unendlich fernen Ebene eine dadurch ausgezeichnete kubische Fläche, daß die Fußpunkte der vier aus einem ihrer Punkte auf die Flächen des Tetraeders gefällten Lote in einer Ebene liegen.

Es bietet keine Schwierigkeit, diejenige Verallgemeinerung des Satzes I anzugeben, welche entsteht, wenn man statt des in ihm benützten Polarsystems des unendlich fernen Kugelkreises ein beliebiges ebenes Polarsystem zu Grunde legt.

Digitized by Google

# Über das Küppersche Konoid.

Von stud. phil. **Paul Ernst** in Wien.

## 1.

Wählt man bei der von E. Seipka[1]) im 9. Jahrgang dieser Zeitschrift behandelten Regelfläche dritten Grades — sie sei im folgenden als Küppersches Konoid bezeichnet — die $xy$-Ebene als Ebene des Leitkreises, die $z$-Achse als Doppelgerade und die Symmetrieebene des 2. und 4. Quadranten als Richtebene, so ergibt sich als Gleichung des Konoids

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)(x - z) + 2rx^2 = 0.$$

Als besondere Fläche dritten Grades muß sie durch eine Spezialisierung der zweiten Steinerschen[2]) Erzeugungsart für Flächen dritten Grades erzeugbar sein.

Sei der Flächenbüschel zweiter Ordnung gegeben durch

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda(x + ky) = 0,$$

der dazu $\pi$-Ebenenbüschel durch

$$(3) \qquad r(x - ky) + \lambda[(x - z)(1 + k^2) + 2rk^2] = 0,$$

so erhält man durch Elimination des Parameters $\lambda$ die Gleichung (1) des Küppersches Konoids.

Das Küppersche Konoid ist also das Erzeugnis eines Büschels von geraden Kreiszylindern, die einander längs der $z$-Achse berühren, und eines dazu $\pi$ Ebenenbüschels um jene Erzeugende, deren Projektion auf die $xy$-Ebene zur Mittelpunktsgeraden der Grundkreise des Zylinderbüschels in bezug auf $y = x$ symmetrisch ist.

Daraus folgt unmittelbar der von Seipka mittels darstellend-geometrischer Methoden bewiesene Satz:

Der Schnitt des Küpperschen Konoids mit jeder durch eine Erzeugende gelegten Ebene ist eine Ellipse,

---

[1]) Zwei Aufgaben über die Flächen dritten und vierten Grades, welche zum Unterricht in der darstellenden Geometrie besonders geeignet sind.

[2]) Über die Flächen dritten Grades, Crelles Journal, Bd. 53, S. 133 f.

Digitized by Google

die sich in der Horizontalprojektion als Kreis darstellt; ist die Erzeugende eine der singulären Erzeugenden, so berührt der Projektionskreis die andere.

2.

Setzt man in Gleichung (1) $z = k$, so ergibt sich als Gleichung der ebenen Horizontalschnitte

$$(4) \qquad (x^2 + y^2)(x - k) + 2rx^2 = 0,$$

die Gleichung der Konchoiden von Sluse.[1])

Jeder ebene Horizontalschnitt des Küpperschen Konoids ist eine Slusesche Konchoide.

Insbesondere liefern die Schnitte im Abstand

$k = 2r$ die Zissoïde des Diokles[2]) $x(x^2 + y^2) - 2ry^2 = 0$

$k = -2r$ die Visiera des Peano[3]) $(x^2 + y^2)(x + 2r) + 2rx^2 = 0$

$k = r$ die Strophoïde[4]) $x(x^2 + y^2) + r(x^2 - y^2) = 0$

$k = \frac{r}{2}$ die Trisektrix des Maclaurin[5]) $x(x^2 + y^2) + \frac{r}{2}(3x^2 - y^2) = 0.$

Da die zwischen der Sluseschen Konchoïde mit isoliertem Punkt und Asymptote befindliche Fläche $F = r(2k - r)\pi$[6]) ist, ergibt sich das Volumen des Konoids zwischen Kreis-, Visiera- und Asymptotenebene

$$(5) \qquad V = r\pi \int_{-2r}^{0} (2k - r)\, dk = r\pi \left[k^2 - rk\right]_0^{2r} = 2r^3\pi.$$

Es ist das Volumen des Konoids zwischen Kreis-, Visiera- und Asymptotenebene gleich dem des gleichseitigen Zylinders über dem Leitkreis.

3.

Der Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, die durch den Doppelpunkt einer rationalen zirkularen Kurve dritter Ordnung gehen und sie anderswo berühren, heißt Nebenevolute der Kurve.

---

[1]) G. Loria, Spezielle ebene Kurven, S. 71.
[2]) Loria, l. c. S. 36.
[3]) Peano, Appl. geom. del. calc. infinit. S. 81.
[4]) Loria, l. c. S. 58.
[5]) Maclaurin, Traité des fluxions, traduit de l'anglais par R. P. Pezenas, S. 198.
[6]) St. Jollinek, Die Konchoiden von Sluse (10), S. 403, Zeitschr. f. d. Realschulwesen, XXIX. Jahrg.

Digitized by Google

Für die Sluseschen Konchoiden lautet ihre Gleichung, wie eine einfache Rechnung ergibt:[1])

$$y^2 + 2kx + k(2r - k) = 0. \tag{6}$$

Setzen wir nun $k = z$, so erhalten wir:

$$y^2 + 2(x + r)z - z^2 = 0, \tag{7}$$

die Gleichung eines Kegels zweiten Grades.

Die Parabeln, welche sich als Nebenevoluten der ebenen Horizontalschnitte des Küpperschen Konoids ergeben, erfüllen einen Kegel zweiten Grades, welcher die $xy$-Ebene längs der $x$-Achse berührt, seine Spitze im Mittelpunkt des Leitkreises hat und durch die Kuspidalpunkte der Fläche hindurchgeht.

4.

Für die Wendepunkte der Sluseschen Konchoiden gilt die Relation:[2])

$$tg\varphi = \sqrt{\frac{k - 2r}{3k}}. \tag{8}$$

Daher ergibt sich als Ort der Wendepunkte aller Sluseschen Konchoiden auf der Fläche ihr Schnitt mit

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{z - 2r}{3z}} \tag{9}$$

oder

$$3y^2z - x^2z + 2rx^2 = 0. \tag{9'}$$

Eliminiert man aus (9') und (1) $y$, so erhält man als Kreuzrißprojektion der betrachteten Kurve die Hyperbel

$$2z^2 + 2rz - 2xz - rx = 0. \tag{10}$$

Die Kurve der Wendepunkte aller Sluseschen Konchoiden auf dem Küpperschen Konoid projiziert sich auf die Kreuzrißebene als Hyperbel, deren Asymptoten einen Winkel von 135° einschließen; ihr Scheitel ist im Punkt $\left(0, -\frac{r}{2}\right)$ gelegen.

---

[1]) Analog der allgemeineren Berechnung in Loria, l. c. S. 35.
[2]) Jellinek, l. c. Formel (6).

Digitized by Google

5.

Die ebenen Schnitte parallel zur $yx$-Ebene haben die Gleichung

$$(k^2 + y^2)(k - z) + 2rk^2 = 0, \tag{11}$$

oder in anderer Form

$$y^2 z = k^2(2r - z). \tag{11'}$$

Die Gleichung (11') geht durch die Substitution $z = z'$ $y = \frac{ky}{z}$ über in

$$y^2 - 2rz + z^2 = 0, \tag{12}$$

die Gleichung eines Kreises, so daß die Kurven, — sie heißen Schützenbogen (The Archers Bow)[1]) — sich als Hyperbolismen[2]) von Kreisen ergeben.

Die ebenen Schnitte des Küpperschen Konoids parallel zur $yz$-Ebene sind Schützenbogen.

Insbesondere liefern die Schnitte im Abstand

$k = 2r = a$ die Versiera[3]) $\quad xy^2 = a^2(a - x)$

$k = r = b$ die Pseudoversiera[4]) $\quad xy^2 = b^2(2b - x)$.

Da die zwischen dem Schützenbogen und seiner Asymptote befindliche Fläche, wie sich leicht ergibt, $F = 2rk\pi$ ist, läßt sich das Volumen des Konoids zwischen der Doppellinie und einem zur $yz$-Ebene parallelen Schnitt leicht bestimmen.

$$V = 2r\pi \int_0^k k\,dk = rk^2\pi. \tag{13}$$

Das Volumen des Konoids zwischen der Doppellinie und einer zur $yz$-Ebene parallelen Schnittebene beträgt $^3/_4$ vom Volumen eines Rotationsellipsoids mit den Achsen $r$, $k$, $k$. Ist die Schnittebene insbesondere die Ebene der Pseudoversiera, so ist das betrachtete Volumen $^3/_4$, ist sie die der Versiera, so ist es dreimal so groß als die Kugel, für die der Leitkreis größter Kugelkreis ist.

---

[1]) F. W. Newmann, On curves of the third degree. (Br. Ass. Rep. Exeter 1869).

[2]) Loria, l. c. S. 20, (Hyp. conicae centrales ellipsae).

[3]) Loria, l. c. S. 76 (2).

[4]) Loria, l. c. S. 79 (8).

Digitized by Google

6.

Zur Bestimmung der Striktionslinie stellt man die Gleichung der Fläche in Parameterform auf, so daß die Erzeugenden durch $v = k$ und die Doppellinie durch $u = 0$ gegeben ist.[1]) Sie lautet:

$$(14)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{-v}{\sqrt{2rv + v^2}} \cdot u \\ y = \dfrac{\sqrt{2rv - v^2}}{\sqrt{2rv + v^2}} \cdot u \\ z = v - \dfrac{v}{\sqrt{2rv + v^2}} \cdot u \end{cases}$$

Seien die Koeffizienten von $u$ in $x\ y\ z$ bezw. $l$, $m$, $n$, ihre ersten Ableitungen nach $v$, $l'$, $m'$, $n'$, bezeichnet man ferner

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = A$$

und

$$l'x' + m'y' + n'z' = B,$$

so ist die Striktionslinie durch $u = -\dfrac{B}{A}$ gegeben.[2])

Für das Küppersche Konoid lautet somit die Gleichung der Striktionslinie in Gaußischen Koordinaten:

$$(15)\qquad 2ru = (2r - v)\sqrt{2rv + v^2}.$$

Durch Rücksubstitution von $x$, $y$, $z$ folgt, daß die Striktionslinie des Konoids sein Schnitt mit der Fläche

$$(16)\qquad 2rz = (z - x)^2$$

ist.

Die Striktionslinie des Küpperschen Konoids projiziert sich also auf die Kreuzrißebene als Parabel.

Eliminiert man $z$ aus (1) und (16), so erhält man als Projektion auf die $xy$-Ebene die Gleichung des geraden Zweiblattes.[3])

$$(17)\qquad (x^2 + y^2)^2 + 2rxy^2 = 0.$$

Die Striktionslinie des Küpperschen Konoids projiziert sich auf die $xy$-Ebene als ein gerades Zweiblatt, das bekanntlich eine Fußpunktskurve der Steinerschen Hypozykloide ist.[4])

---

[1]) Kommerell, Raumkurven, S. 150 ff.
[2]) Kommerell, l. c. Formel (6).
[3]) G. Lora, l. c. S. 159, (9').
[4]) Vgl. Seipka, l. c.

Digitized by Google

# Das Berührungsproblem für die allgemeine Regelschraubenfläche.

Von **Karl Mack** in Wien.

Es sei eine Regelschraubenfläche durch ihre zur Grundebene senkrechte Achse $A$, die Erzeugende $E$, die reduzierte Ganghöhe $\mathfrak{h}_0$ und den Sinn $B$ der nach aufwärts gerichteten Schraubenbewegung gegeben. (Siehe Figur). $R$ bezeichne den Grundkreis jenes Richtkegels der Regelschraubenfläche, dessen Spitze $s$ in $A$ liegt und um $\mathfrak{h}_0$ von der Grundebene absteht. Handelt es sich um die Aufgabe, zu der beliebig durch $E$ gelegten Ebene $\tau$ mit der Spur $T$ den Grundriß $t'$ des Berührungspunktes $t$ zu finden, so hat man nur das aus dem Punkte $A'$ auf die Gerade $E'$ gefällte Lot mit dem Kreise $R$ im Punkte $e'$ zu schneiden und das Lot aus $e'$ auf $T$ mit $E'$ zum Schnitte zu bringen. Diese Konstruktion ist auf verschiedene Arten bewiesen worden.

J. de la Gournerie[1]) leitete sie als erster auf drei verschiedenen Wegen her. L. Burmester[2]) gelangte zu demselben Resultate gelegentlich der Bestimmung der Selbstschatten auf kinematisch-geometrischem Wege. A. Mannheim[3]) liefert den Beweis mit Hilfe des zu $E$ gehörigen Normalenparaboloides, K. Pelz[4]) mittels eines längs $E$ berührenden hyperbolischen Paraboloides und Th. Schmid[5]) zeigt mit Hilfe der metrischen Beziehungen zwischen dem Parameter der Erzeugenden, der reduzierten Ganghöhe, dem Radius des Kehlkreises und der Neigung der Erzeugenden gegen die Schraubenachse, auf welche Weise sich das Büschel der durch eine Erzeugende gehenden Tangentialebenen mit dem Grundrisse ihrer Berührungspunkte in perspektive Lage bringen läßt.

Von dem Chaslesschen Fundamentalsatze über Regelflächen ausgehend, soll die obige Konstruktion im Nachfolgenden auf völlig anschauliche Weise bewiesen werden.[6])

---

[1]) Journal de l'École Polyt. XXXIV, Paris 1851, Art. 46 sowie Art. 47 und „Traité de géométrie descriptive", Paris 1864, Art. 1023.

[2]) Zeitschrift f. Math. und Physik, 18. Jahrg., Leipzig, 1873, p. 195.

[3]) Cours de géométrie descriptive, Paris 1886, p. 366.

[4]) Wiener Sitzungsber. math. naturw. Kl. 1883, LXXXVII, p. 473.

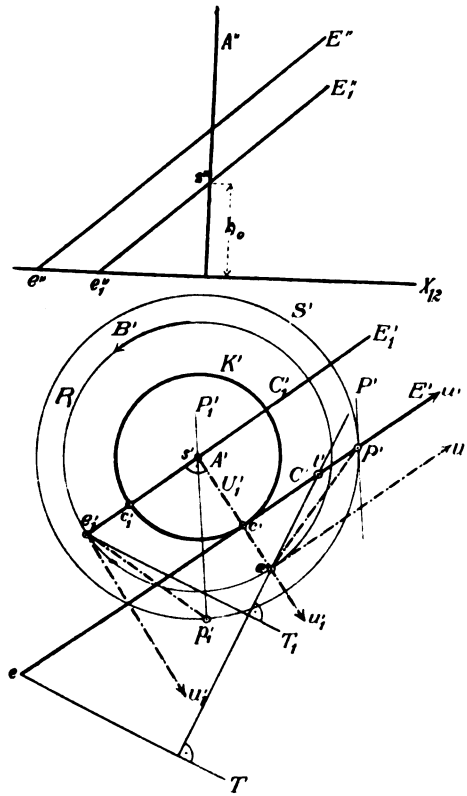
[5]) Wiener Sitzungsber. math. naturw. Kl. 1890, XCIX, p. 952.

[6]) Damit ist eine von Prof. Dr. E. Müller im Seminar für darstellende Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Wien im Studienjahre 1904/05 gestellte Aufgabe gelöst.

Digitized by Google

Zuvor sei noch an die Eigenschaft jeder auf der gegebenen Fläche liegenden Schraubenlinie $S$ erinnert, daß die Grundspur des durch $s$ gelegten Richtkegels ihrer abwickelbaren Fläche mit dem Grundrisse $S'$ der Schraubenlinie zusammenfällt.

Es sei nun auf $E$ $p$ ein beliebiger Punkt, $c$ der Punkt der Kehlschraubenlinie $K$ und $u$ der unendlich ferne Punkt. Bezeichnen $P, C$ die Tangenten in $p, c$ an die durch sie gehenden Schraubenlinien $S$ und $K$, und $U$ die Tangente in $u$ an den unendlich




fernen Kegelschnitt der Schraubenfläche, so bestimmen die Geradenpaare $EP$, $EC$, und $EU$ die Tangentialebenen in den drei genannten Punkten von $E$ an die Regelschraubenfläche. Durch $s$ werde nun ein zu dem Ebenenbüschel $E[PCU]$ paralleles Ebenenbüschel $E_1[P_1C_1U_1]$ gelegt.

Zieht man durch $s$ die zu $E, P, C$ bezw. parallelen Geraden $E_1, P_1, C_1$, so liegt der Spurpunkt $e_1$ von $E_1$ auf $R$ und die Spurpunkte $p_1, c_1$ von $P_1$ und $C_1$, wegen der oben angeführten Eigenschaft der Schraubenlinien, auf den Kreisen $S'$ und $K'$. Legt man noch durch $s$ die Gerade $U_1$, die zur asymptotischen Ebene $[EU]$

Digitized by Google

parallel ist und senkrecht steht zu $E$, so liegt ihr Spurpunkt $u_1$ unendlich fern in der zu $E'$ senkrechten Richtung und die Ebene $[E_1 U_1]$ ist zur asymptotischen Ebene $[EU]$ parallel.

Die Strahlen des Büschels $e_1 (p_1 c_1 u_1)$, das die Spuren von $E_1 [P_1 C_1 U_1]$ bilden, gehen aber nach einer Drehung um $90^0$ im Sinne von $B'$ bezw. durch die Punkte $p'$, $c'$, $u'$; denn die Punkte $p_1, c_1, u_1$ werden durch diese Drehung in die Punkte $p', c', u'$ übergeführt, da $p_1 c_1$ die Endpunkte jener Kreisradien sind, die zu den Tangenten in den Punkten $p', c'$ an die Kreise $S', K'$ parallel sind und $[e_1 u_1]$, wegen des Parallellismus mit $U_1'$, zu $E'$ senkrecht steht. Der Scheitel $e_1$ geht durch diese Drehung in den eingangs erwähnten Punkt $e'$ über.

Da aber das Ebenenbüschel $E_1 (P_1 C_1 U_1) = E_1 [p_1 c_1 u_1]$ zu dem Büschel $E(PCU)$ parallel ist und dieses nach dem Chaslesschen Fundamentalsatze über Regelflächen zur Reihe der Punkte $pcu$ projektiv ist, so ist das Strahlbüschel $e_1 (p_1 c_1 u_1)$ der Grundspuren des ersteren zur Punktreihe $p' c' u'$ projektiv. Durch die eben erwähnte Drehung um $90^0$ geht das Büschel $e_1 (p_1 c_1 u_1)$ in das Büschel $e' (p' c' u')$, das mit der Punktreihe $p' c' u'$ perspektiv liegt, über. Daraus folgt aber die eingangs erwähnte Konstruktion.

Digitized by Google

# Inhaltsverzeichnis.


Seite

*Berger, Alfred*, Über die zur dritten Stufe gehörigen hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde . . . . . 137, 179

*Biermann, Otto*, Über gewisse lineare Transformationen . . . . . 234

*Carda, Karl*, Zur Berechnung der Torsion einer Raumkurve in rationaler Form . . . . . 78

*Carda, Karl*, Zur Theorie der Jacobischen Differentialgleichung . . . . . 59

*Carda, Karl*, Über eine Schar dreigliedriger algebraischer Gruppen der Ebene 225

*Eberhard, V.*, Ein Beitrag zur Tetraederlehre . . . . . 305

*Ernst, Paul*, Über das Küppersche Konoid . . . . . 309

*Gmeiner, J. A.*, Otto Stolz, Nachruf . . . . . 161

*Grünwald, Josef*, Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie 81

*Hahn, Hans*, Über einen Satz von Osgood in der Variationsrechnung . . . 63

*Hahn, Hans*, Über das allgemeine Problem der Variationsrechnung . . . 295

*Klug, L.*, Konstruktion der Brennpunkte der ebenen Schnitte eines Kegels zweiter Ordnung . . . . . 44

*Lerch, M.*, Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale . . . 3

*Mack, Karl*, Das Berührungsproblem für die allgemeine Regelschraubenfläche . . . . . 314

*Meder, Alfred*, Über die Determinante von Wronski . . . . . 19

*Nielsen, Niels*, Über bestimmte Integrale mit der Prymschen Q-Funktion . 47

*Nielsen, Niels*, Notiz über die Kugelfunktionen . . . . . 222

*Nielsen, Niels*, Notiz über eine allgemeine Integralformel . . . . . 281

*Tauber, Alfred*, Über die unvollständigen Gammafunktionen . . . . . 207

*Waelsch, Emil*, Über mehrfache Vektoren und ihre Produkte sowie deren Anwendung in der Elastizitätstheorie . . . . . 241

*Zindler, Konrad*, Zur Differentialgeometrie der Linienkomplexe . . . . . 287


## Literaturberichte.


*Abraham, Henri*, et *Langevin, Paul*, Les quantités élémentaires d'Électricité; Ions, Électrons, Corpuscules . . . . . 61

*Abraham, M., Dr.*, Theorie der Elektrizität . . . . . 38

*Amodeo, Federigo, Prof.*, Lezioni di Geometria proiettiva . . . . . 53

Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1906 . . . . . 39

*Appell, P.* et *Chappuis, J.*, Leçons de mécanique élémentaire . . . . . 32


Digitized by Google

Seite

*Arnaudeau, A.*, Tables des intérêts composés, annuités et amortissements pour des taux variant de dixièmes en dixièmes et des époques variant de 100 à 400 suivant les taux . . . . . 60
Astronomischer Kalender für 1906 . . . . . 44
*Baire, René*; Leçons sur les fonctions discontinues . . . . . 12
*Barks, Heinrich, Dr.*, Mathematische Hauptsätze . . . . . 10
*Beltrami, Eugenio*, Opere Matematiche . . . . . 19
*Blau, Ernst*, Die Mechanik fester Körper . . . . . 43
*Bolza, O.*, Lectures on the calculus of variations . . . . . 28
*Borel, Émile*, Leçons sur les fonctions de variables réelles et les developpements en séries de polynomes . . . . . 3
*Börnstein, R.* und *Marckwald, W.*, Aus Natur und Geisteswelt . . . . . 17
*Börnstein, R., Dr.*, Leitfaden der Wetterkunde . . . . . 62
*Borst, H., Dr.*; *Crantz, P.*; *Haentzschel, E., Dr.*, Mathematischer Leitfaden für Realschulen . . . . . 11
*Brillouin, Marcell*, Propagation de l'Électricité . . . . . 24
*Brioschi, Francesco*, Opere Matematiche . . . . . 21
*Brunn, Hermann*, Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie . . . . . 54
*Bucherer, A. H., Dr.*, Elemente der Vektoranalysis . . . . . 32
*Bucherer, A. H.*, Mathematische Einführung in die Elektronentheorie . . . 45
*Cantor, Moritz*, Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften . . . . . 37
*Chwolson, O. D.*, Lehrbuch der Physik . . . . . 44
*Cesàro, E.*, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung mit zahlreichen Übungsbeispielen . . . . . 23
*Classen, J.*, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus . . . . . 45
*Classen, J.*, Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes . . . . . 60
*Couturat, Louis*, L'algèbre de la logique . . . . . 49
*Danneel, Heinrich, Dr.*, Elektrochemie . . . . . 47
*Dassen, Claro Cornelio*, Étude sur les quantités mathématiques, grandeurs dirigées, quaternions . . . . . 34
*Dedekind, Richard*, Stetigkeit und irrationale Zahlen . . . . . 64
Die natürliche Entwicklung der Materie im Weltraum und die daraus hervorgehenden Weltgesetze . . . . . 30
*Doll, M., Dr.* und *Nestle, S.*, Lehrbuch der praktischen Geometrie . . . . 26
*Donle, Dr.*, Lehrbuch der Experimentalphysik . . . . . 13
*Dressel, Ludwig, S. J.*, Elementares Lehrbuch der Physik, nach den neuesten Anschauungen für höhere Schulen und zum Selbstunterricht . . . . . 29
*Ebert, H.* und *Wiedemann, E.*, Physikalisches Praktikum . . . . . 5
*Fisher, Irving*; *Pinkus, N.*, Kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung . . . . . 18
*Fraunhofer, J.*, Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Glasarten . . . . . 45
*Gans, Richard, Dr.*, Einführung in die Vektoranalysis . . . . . 38
*Gleichen, Alexander, Dr.*, Vorlesungen über photographische Optik . . . . 29
*Grimsehl, E.*, Sammlung Schubert XXXVIII. Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung . . . . . 31

Digitized by Google

Seite

*Haußner, Robert*, Darstellende Geometrie . . . . . 52
*Hermite* et *Stieltjes*, Correspondance . . . . . 21
*Hochschule, Technische, zu Aachen*, Festschrift Adolf Wüllner . . . . . 30
*Holzmüller, Gustav, Dr.*, Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik 10
*Jahnke, E., Dr.*, Vorlesungen über die Vektorenrechnung . . . . . 56
*Jäger, G., Dr.*, Theoretische Physik . . . . . 31
*Junker, F.*, Physikalische Aufgaben aus dem Gebiet des Magnetismus und der Elektrizität . . . . . 4
*Karrass, Th.*, Telegraphen- und Fernsprechtechnik in Einzeldarstellungen . 47
*Kayser, H.*, Handbuch der Spektroskopie . . . . . 31
*Koenigsberger, Leo*, Carl Gustav Jacob Jacobi, Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages . . . . . 8
*Kohlrausch, Friedrich*, Lehrbuch der praktischen Physik . . . . . 30
*Krüger, L.*, Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen . . . . . 27
*La Cour, Paul*, und *Appell, Jakob*, Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung . . . . . 40
*Laemmel, Rudolf, Dr.*, Die Methoden zur Ermittelung von Wahrscheinlichkeiten . . . . . 14
*Lehmann, Otto, Dr.*, Dr. J. Fricks Physikalische Technik . . . . . 40
*Leher, Ernst, Dr.*, Das Wasser und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe . . . . . 46
*Liebmann, Heinrich*, Nichteuklidische Geometrie . . . . . 57
*Lindelöf, Ernst*, Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions . . . . . 63
*Linders, Olof*, Zur Klarstellung der Begriffe: Masse, Gewicht, Schwere und Kraft . . . . . 61
*Lodge, Oliver*, Sur les Électrons . . . . . 62
*Mahler, G., Prof.*, Sammlung Göschen. Nr. 243 . . . . . 18
*Marcolongo, R.*, Meccanica razionale . . . . . 17
*Marcuse, Adolf, Dr.*, Handbuch der geographischen Ortsbestimmung . . . 45
*Müller-Pouillets* Lehrbuch der Physik und Meteorologie . . . . . 41
*Müller, H., Kutnewsky, M.*, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie . . . . . 11
*Neesen, Friedrich, Dr.*, Die Physik . . . . . 42
*Netto, Eugen, Dr.*, Elementare Algebra . . . . . 35
*Ostwalds* Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 147 . . . . . 44
*Pfaundler, Leop.*, Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie 62
*Picard, Émile*, Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences . . . . . 11
*Poincaré, H.*, Leçons de Mécanique céleste . . . . . 5
*Rogel, Fr.*, Das Rechnen mit Vorteil . . . . . 40
*Rooseboom, H. W. Bakhuis*, Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre . . . . . 25
*Salmon-Fiedler*, Analytische Geometrie der Kegelschnitte . . . . . 8
*Schloemilch, Oskar*; *Naetsch, E.*, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis . . . . . 13

Digitized by Google

Seite

*Schmehl, Ehr., Prof. Dr.*, Die Elemente der sphärischen Astronomie und der mathematischen Geographie . . . . . 26
*Schubert, Hermann, Prof. Dr.*, Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis . . . . . 47
*Schüßler, Rudolf*, Orthogonale Axonometrie . . . . . 19
*Schütte, Fritz*, Anfangsgründe der darstellenden Geometrie . . . . . 52
*Scott, Robert Forsyth*, The theory of determinants and their applications . 33
*Snyder, Karl*; *Kleinpeter, H., Dr.*, Das Weltbild der modernen Naturwissenschaft . . . . . 14
*Sturm, Ambros*, Geschichte der Mathematik . . . . . 36
*Tannery, Jules*, Introduction a la theorie des fonctions d'une variable . . 18
*Tapla, Theodor*, Grundzüge der niederen Geodäsie . . . . . 60
*Vonderlinn, J.*, Schattenkonstruktionen . . . . . 16
*Vonderlinn, J., Prof.*, Parallelperspektive . . . . . 39
*Wallentin, Ignaz, Dr.*, Grundzüge der Naturlehre . . . . . 48
*Walther, K.* und *Röttinger, M.*, Sammlung Göschen. Nr. 242 . . . . . 17
*Weber, Heinrich, Wellstein, Josef*, und *Jacobsthal, Walther*, Enzyklopädie der Elementarmathematik . . . . . 50
*Webster, A. G.*, The Dynamics of particles and of rigid, elastic und fluid bodies . . . . . 5
*Whittaker, E. T.*, A treatise on the analytical Dynamics of particles and rigid bodies; with an introduction to the problem of three bodies . . . 23
*Wien, W., Dr.*, Über Elektronen . . . . . 42
*Wilda*, Diagramm- und Flächenmesser . . . . . 43
*Zetzsche, K. Ed., Prof. Dr.*, Ebene und räumliche Geometrie . . . . . 49

Digitized by Google

# Literaturberichte.

Digitized by Google

Digitized by Google

**Leçons sur les fonctions de variables réelles et les developpements en séries de polynomes.** Par Émile Borel Rédigées par Maurice Fréchet. Avec des notes par Paul Painlevé et Henri Lebesgue. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel.) Gauthier-Villars, Paris 1905. VIII + 160 S. Preis Fr. 4.50.

Der Inhalt dieses Buches ist kurz der folgende. Kap. I bringt die wichtigsten Definitionen und Sätze aus der Theorie der Punktmengen. Besonders sei hingewiesen auf einen überaus einfachen, von Lindelöf herrührenden Beweis des Cantorschen Satzes, daß jede abgeschlossene Menge die Summe einer perfekten und einer abzählbaren Menge ist. Kap. II enthält das Wichtigste aus der Lehre von der Stetigkeit und Unstetigkeit, den Begriff der vier Du Bois-Reymondschen Abteilungen und den Begriff des bestimmten Integrals im Sinne von Riemann und in dem von Lebesgue. Kap. III behandelt die Reihen von stetigen Funktionen. Es wird in einfacher Weise Arzelas notwendige und hinreichende Bedingung dafür abgeleitet, daß die Summe einer solchen Reihe selbst eine stetige Funktion sei. Es folgt die notwendige und hinreichende Bedingung desselben Autors für die gliedweise Integrierbarkeit einer Reihe, deren Glieder integrabel im Riemannschen Sinne sind, und endlich wird die einfache Lösung desselben Problems im Sinne von Lebesgue gegeben. Kap. IV, das wichtigste des Buches, beschäftigt sich mit der Entwicklung einer stetigen Funktion in eine Reihe von Polynomen. Für das fundamentale Resultat von Weierstraß, daß jede stetige Funktion einer Veränderlichen einer solchen Darstellung fähig ist, werden mitgeteilt: der ursprüngliche Beweis von Weierstraß, der auf der Theorie der trigonometrischen Reihen basierte Beweis von Volterra, die elementaren Beweise von Runge (mit einer Modifikation von Mittag-Leffler) und Lebesgue. Es folgen die verschiedenen Methoden zur Ausdehnung auf Funktionen von mehreren Veränderlichen; sodann die zuerst von Borel gegebene Darstellung der unbeschränkt differenzierbaren Funktionen als Summe einer konvergenten Potenzreihe und einer gleichmäßig konvergenten trigonometrischen Reihe, aus der sich dieselben Darstellungen für die Ableitungen durch gliedweise Differentiation ergeben. Es wird weiter gezeigt, daß die durch die Lagrangesche Interpolationsformel gelieferten Polynome mit wachsendem Grade nicht immer in allen Punkten gegen die darzustellende Funktion konvergieren, und sodann eine andere allgemeingültige Interpolationsformel abgeleitet, die eine beliebig große Annäherung in allen Punkten liefert. Endlich wird im Sinne von Tchebicheff gezeigt, daß es von jedem Grade $n$ ein und nur ein Polynom größter Annäherung gibt, das, sobald irgend eine Entwicklung der Funktion in eine Reihe von Polynomen bekannt ist, auf algebraischem Wege gefunden werden kann. Kap. V handelt von der Darstellung unstetiger Funktionen durch Reihen von Polynomen.



Digitized by Google

Die hier auftretenden Fragen werden aber nur kurz gestreift, mit Rücksicht auf das gleichzeitige Erscheinen eines diesen Gegenstand betreffenden Buches von Baire. In einer umfangreichen Note entwickelt Painlevé ausführlich seine schon früher in den „Comptes rendus" angegebenen Resultate über die Polynomentwicklungen analytischer Funktionen. Er führt das Problem, Polynomentwicklungen zu finden, die im ganzen Holomorphiesterne konvergieren, zurück auf das, eine „serie génératrice" aufzufinden, d. h. eine Reihe die aus den Koeffizienten der Entwicklung von $f(t)$ nach Potenzen von t so zusammengesetzt ist, daß sie immer $f(1)$ darstellt, wenn $f(t)$ auf dem Segment $01$ der reellen Achse regulär ist. Es wird ein Verfahren auseinandergesetzt, welches theoretisch beliebig viele „series génératrices" liefert. Die Durchrechnung in einem speziellen Falle liefert eine schon von Fredholm aufgefundene Reihenentwicklung. Es wird weiter gezeigt, wie durch „reelle Transformation" aus einer solchen Reihe beliebig viele andere gefunden werden können, während die „imaginäre Transformation" den Übergang vom geradlinigen Holomorfiesterne zu krummlinigen Sternen ermöglicht. Diese letzteren liefern endlich durch einen Grenzübergang Reihen, welche nicht nur im ganzen geradlinigen Sterne konvergieren, sondern — bei sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Natur der singulären Stellen — auch noch auf den vom Sterne ausgeschlossenen Halbstrahlen. Bemerkenswert sind insbesondere die Anwendungen auf das reelle Gebiet, sowie die Verallgemeinerung auf Funktionen von mehreren Veränderlichen. In einer zweiten Note gibt Lebesgue eine neue Herleitung der notwendigen und hinreichenden Bedingung von Baire, daß sich eine unstetige Funktion durch eine Reihe von Polynomen darstellen lasse. In einer dritten Note behandelt Borel die Frage nach der Existenz von Funktionen, die keiner der $n$ ersten Klassen der Baireschen Klassifikation angehören. Die Existenz solcher Funktionen ergibt sich unmittelbar durch bloße Mächtigkeitsbetrachtungen. Doch bemerkt Borel, daß hiedurch nicht gezeigt ist, daß solche Funktionen auch definiert werden können, und, um diesem Übelstand abzuhelfen, gibt er ein Verfahren zur Definition einer solchen Funktion an.

Selbstverständlich ist in dieser knappen Inhaltsangabe nicht alles Wissenswerte aus dem vorliegenden Buche angeführt, immerhin dürfte sie genügen, um einen Begriff von dem hohen wissenschaftlichen Werte des Buches zu geben, der noch gesteigert wird durch die Eleganz der Darstellung, die man ja in jeder Publikation Borels zu finden gewohnt ist.

*Hans Hahn.*

**Physikalische Aufgaben aus dem Gebiet des Magnetismus und Elektrizität.** Von F. Junker. Teubner, Leipzig 1904. 48 S., 80 Pf.

Das Büchlein enthält eine hübsche Zusammenstellung von Übungsbeispielen aus dem genannten Gebiete, welche mit elementarer Mathematik gelöst werden können, und entspricht seinem Zwecke als Hilfsbuch für die höheren Klassen der Mittelschulen gewiß vollkommen. Jeder Paragraph enthält außer mehreren durchgeführten Beispielen eine Serie von Übungsbeispielen, bei denen nur das Resultat angegeben ist. Zweifellos wird der Schüler durch fleißige Benützung einer solchen Aufgabensammlung weitaus am besten gefördert. *Hl.*

Digitized by Google

**The Dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies.** A. G. Webster. Teubner, Leipzig 1904. XI + 588 Seiten.

Der Verfasser hat den Versuch gemacht, ein Lehrbuch zu schaffen, das in nicht zu breiter Darstellung dasjenige von der Mechanik enthält, was jeder Physiker (und auch jeder Mathematiker) zumindest wissen muß. Diese Kenntnisse soll sich der Studierende an der Hand dieses Buches in etwa einem Jahre erwerben können. Dieses Ziel ist von dem Verfasser in glänzender Weise erreicht. Sowohl die Anordnung und Auswahl des Stoffes, als auch die Darstellung ist als mustergültig zu bezeichnen. In bezug auf die letztere mag vor allem auf die glückliche Verbindung der analytischen Methode und der Anschauung aufmerksam gemacht werden, welche wie so manchen englischen Werken, so auch dem vorliegenden einen besonderen Charakter gibt. Das Werk ist in drei Teile geteilt. Der erste enthält die Dynamik des Punktes sowie die allgemeinen Prinzipien der Mechanik; der zweite die Mechanik der starren Systeme, wobei vor allem die Theorie der rotierenden Körper (Kreisel) ebenso anschaulich, wie gründlich behandelt ist. Der dritte Teil, die Mechanik der deformablen Körper, enthält neben einem ausführlichen Exkurs über Potentialtheorie die Lehre von der Elastizität und die Hydrodynamik. Nach dem Gesagten kann der Ref. das Werk dem Lehrer und dem Lernenden nur auf das wärmste anempfehlen. *Hl.*

**Physikalisches Praktikum.** E. Wiedemann und H. Ebert. 5. Aufl., 590 S. mit 366 eingedruckten Abbild. M. 10.—; geb. M. 11.—. F. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1904.

Das vorzügliche, im physikalischen Unterricht unentbehrliche Werk ist in der vorliegenden fünften Auflage durch einige kleine Zusätze bereichert worden. In der Mechanik wird das physische Pendel und die Reibung fester Körper hinzugenommen, in der Wärme Bestimmungsmethoden für das spezifische Gewicht und das Molekularvolumen von Flüssigkeiten beim Siedepunkt für die kritische Temperatur und für die Verbrennungswärme. In der Akustik wird die Bestimmung der Tonhöhe mit dem Monochord und durch Schwebungen besprochen. Die Optik ist nahezu unverändert geblieben. In der Elektrizitätslehre ist ein Kapitel über die Bestimmung des Nutzeffekts eines Gleichstromnebenschlußmotors, einer Dynamomaschine und die Aufnahme der Charakteristik hinzugekommen. Außerordentlich zweckdienlich erscheint die vor der Logarithmentafel eingefügte Empfehlung und Erörterung des logarithmischen Rechenschiebers, der ja wohl in keinem physikalischen Praktikum fehlen sollte. *Mc.*

**Leçons de Mécanique céleste.** Par H. Poincaré; Tome I. Paris 1905, Gauthier-Villars (365 Großoktav-Seiten).

Der Verfasser hebt in der Einleitung hervor, daß dieses Buch weder seine Werke über „Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste" noch Tisserands Traité de Mécanique céleste zu ersetzen bestimmt ist. In den Méthodes nouvelles seien die älteren Forschungsergebnisse als bekannt voraus-

Digitized by Google

gesetzt, ihr Zusammenhang mit den neueren nur angedeutet, die hauptsächlichsten Bestrebungen auf Erreichung analytischer Strenge gerichtet und die Annäherungen viel weiter getrieben, als die Praxis es verlangt; hier aber seien nur seine an der Sorbonne gehaltenen Vorträge wiedergegeben, das Problem von Anfang an behandelt, lediglich die Prinzipien der Analyse und Mechanik als bekannt angenommen und den Méthodes nouvelles nur einige wesentliche, unmittelbar anwendbare Resultate entlehnt worden.

Während Tisserand stets sich bemüht habe, den Gedanken der Begründer der Himmelsmechanik möglichst treu zum Ausdrucke zu bringen und daher nicht immer den kürzesten Weg zur Erreichung des Resultats einschlagen konnte, sei der Verfasser direkt auf das Ziel losgegangen und hiebei häufig interessanten Dingen ausgewichen, die von Tisserand bereits gezeigt worden sind und daher einer erneuten Vorführung nicht mehr bedurften.

Der erste Band enthält in 13 Kapiteln die allgemeine Theorie der planetarischen Störungen.

Im ersten Kapitel werden die Prinzipien der Dynamik auseinandergesetzt, worunter die in Jacobis Vorlesungen über Dynamik enthaltenen analytischen Transformationen verstanden sind, nämlich kanonische Gleichungen, Hamiltonsche Gleichungen, Methode von Jacobi etc. Schon hier bemerkt man manche Neuerung in den Ableitungen, welche Kürze die Darstellung mit Gründlichkeit der Beweisführung verbindet.

Das zweite, dem Dreikörperproblem gewidmete Kapitel enthält die Ableitung der bekannten Integrale, die Elimination des Schwerpunktes und den Knoten, den durch Einführung fiktiver Planeten vermittelten Übergang auf ein bewegliches durch den Zentralkörper gelegtes Koordinatensystem für den ersten und ein durch den Schwerpunkt beider Körper gelegtes System für den zweiten Planeten, außerdem die Spezialisierung für den Fall, daß eine Masse gleich Null ist und die Feststellung der Größenordnung der Komponenten der Störungsfunktion.

Im dritten Kapitel werden die Gleichungen der elliptischen Bewegung nach der Methode von Jacobi aufgelöst, die dieser Bewegung entsprechenden Formeln gegeben und die Beziehungen klargelegt, in welchen Koordinaten und Geschwindigkeiten zu den kanonischen Elementen stehen, für die Koordinaten auch unter Berücksichtigung der Reihenentwicklung.

Im vierten Kapitel werden die Prinzipien der Methode von Lagrange diskutiert und nur jene Änderungen der Variabeln näher in Betracht gezogen, welche der kanonischen Form der Gleichungen entsprechen; bezüglich der Verwendung elliptischer Elemente werden die Leser auf Tisserand verwiesen. Ferner wird auch die Berechnung der Störungsfunktion ($F = F_0 + \mu F_1$) eingegangen und gezeigt, wie die Störungen wegen der Kleinheit des Parameters $\mu$ durch fortgesetzte Annäherungen bestimmt werden können.

Das fünfte Kapitel „Über die Anwendung der Methode von Legrange" gibt Aufschluß über die Form Größenordnung der Glieder der Reihe, in welche die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunktion nach den kanonischen Elementen sich entwickeln lassen, und bringt einen Beweis des Theorems von Legrange über die Unveränderlichkeit der großen Achsen.

Im sechsten Kapitel werden einige Transformationen der höheren Entwicklungen vorgenommen, so daß die Unbekannten als Funktionen von drei

Digitized by Google

Variabeln auftreten; die Form der Entwicklung ist verschieden, je nachdem man als Integrationskonstanten die anfänglichen oder die mittleren Werte der Unbekannten nimmt.

Das siebente Kapitel über das Problème restreint zeigt zunächst den Weg zur Elimination der säkularen Glieder, enthält ferner ein Verfahren, wodurch unter Anwendung der Methode von Lagrange die periodischen und rein säkularen Glieder von den gemischt säkularen getrennt werden, so daß diese aus jenen sich unmittelbar bestimmen lassen, und behandelt sodann den besonderen Fall das Problème restreint (Bahn der drei Körper in einer Ebene Bewegung des einen Planeten im Kreise, Masse des anderen gleich Null), und die periodische Lösung desselben.

Im achten Kapitel wird der Weg zur Bestimmung der säkularen Störungen von Exzentrizität, Neigung und mittlerer Länge vorgezeichnet, die Entwicklungsform des säkularen Teiles der Störungsfunktion angegeben und des weiteren, bei Vernachlässigung der vierten Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen die Integration der kanonischen Gleichungen vorgenommen, welche die getrennte Berechnung der säkularen Störungen von Exzentrizität und Neigung gestatten. Im Anschlusse hieran werden die Grenzwerte von Exzentrizität und Neigung im Planetensystem untersucht.

Die vollständige Theorie der säkularen Störungen durch Einbeziehung der Glieder mit höheren Potenzen von Exzentrizität und Neigung wird im neunten Kapitel behandelt. Die Einführung neuer Veränderlicher gibt den kanonischen Gleichungen für die von Exzentrizität und Neigung abhängigen Variabeln die Form der im siebenten Kapitel diskutierten, zur Bestimmung der von den Achsen und mittleren Längen abhängigen Variabeln dienenden Gleichungen, so daß die dort abgeleiteten Gesetze auch hier anwendbar werden und die säkularen Glieder zum Verschwinden gebracht werden können, wodurch die Stabilität des Planetensystems, soweit sie von Exzentrizität und Neigung abhängt, ohne Einschränkung bewiesen erscheint. Erstere Gleichungen werden übrigens noch so transformiert, daß die aus dem Verschwinden des Nenners in den von den Neigungen abhängigen Gliedern entstehende Schwierigkeit umgangen wird. Es folgt noch die geometrische Deutung der transformierten Gleichungen und die Klarlegung ihres Zusammenhanges mit den ursprünglichen Gleichungen durch Einführung der Eulerschen Winkel zwischen den beweglichen und fixen Koordinatenachsen.

Im zehnten Kapitel, über den allgemeinen Fall des Problems der drei Körper, nimmt der Verfasser die Entwicklungen des sechsten Kapitels wieder auf, um zu zeigen, wie man die säkularen Glieder verschwinden machen kann, erläutert sodann die Form der Störungsfunktion sowie die Eigentümlichkeiten der einzelnen Störungsgleichungen und schließt mit der Berechnung der mittleren Bewegungen.

Die im elften Kapitel durchgeführte Vergleichung der Entwicklungen des vorigen Kapitels führt zur Kenntnis der Größen, nach deren Potenzen die einzelnen Reihen geordnet sind, sowie die Argumente, von welchen die verschiedenen säkularen Glieder abhängen, und vermittelt den Beweis des Satzes, daß in den Entwicklungen für die großen Achsen keine rein säkularen Glieder vom Range 1 vorkommen, wodurch eine Verallgemeinerung des Poissonschen Theorems über die Unveränderlichkeit der großen Achsen gegeben ist.

Digitized by Google

Im zwölften Kapitel werden die Folgerungen gezogen, welche sich an die Betrachtung der Symmetrie der Entwicklungen in den unmittelbar vorangehenden Kapiteln knüpfen und die allgemeinen Lösungen der Störungsgleichungen, je nachdem sie auf bewegliche oder fixe Achsen bezogen sind, in einfache Beziehung gebracht. Es wird noch der Spezialisierung gedacht, durch welche man zu periodischen strengen Lösungen gelangt und ein Verfahren skizziert, das auf den Inhalt des nächsten Bandes, der Transformation der Reihen behufs Vereinfachung ihrer numerischen Berechnung, vorbereitet.

Den Gegenstand des letzten Kapitels bildet die Methode von Delaunay durch welche man die kurz periodischen Glieder aus den Entwicklungen der Störungsfunktion ausschalten und die Summe der bei naher Kommensurabilität der mittleren Bewegungen mit sehr kleinen Nennern beteilten Glieder in einfacher Weise berechnen kann.

Herr H. Poincaré steht als Mathematiker und theoretischer Astronom zu hoch, als daß eines seiner Werke, vom wissenschaftlichen Standpunkte aus betrachtet, einer Empfehlung bedürfte; in diesen Leçons de Mécanique tritt uns der Meister der Analyse, aber auch als eminenter Lehrer entgegen, der mit sicherer Hand erstklassige Schüler auf den steilen Pfaden der Forschung bis zu den Höhepunkten der Wissenschaft zu führen weiß.

**Analytische Geometrie der Kegelschnitte.** Von Salmon-Fiedler. I. und II. Teil, sechste Auflage. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1903.

Es ist wohl überflüssig, über dieses Buch, von dem nunmehr auch der zweite Teil in sechster Auflage vorliegt, ein empfehlendes Wort zu sagen. Handelt es sich doch um ein standard work der Wissenschaft, an dem Generationen von Geometern sich herangebildet haben. Es sei nur bemerkt, daß Fiedler mit Erfolg bemüht ist, das Buch auf seiner wissenschaftlichen Höhe zu halten und seine Reichhaltigkeit zu mehren. Nicht nur Zusätze im Text, sondern auch insbesondere solche in den Aufgaben lassen deutlich erkennen, daß er die neueste geometrische Literatur aufmerksam verfolgt und für seine Zwecke verwertet.

**Carl Gustav Jacob Jacobi, Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages.** Von Leo Koenigsberger. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1904. (XVIII und 554 S.)

Nicht eine Gelegenheitsschrift, wie vielleicht der Titel vermuten ließe, sondern eine groß angelegte, auf reichem Material fußende Biographie des nächst Gauß größten deutschen Mathematikers haben wir vor uns. Um den Menschen und Gelehrten im richtigen Lichte zu zeigen, hat der Verf. Briefe und Mitteilungen der Angehörigen, der Freunde und der Schüler Jacobis Akten der preußischen Unterrichtsverwaltung, Vorlesungshefte und Briefe aus dem Jacobi-Archiv der Berliner Akademie ausgiebig herangezogen, von allem aber die lange Reihe seiner wissenschaftlichen Arbeiten. Von jeder einzelnen unter ihnen entwirft er eine in Form und Inhalt gleich ausgezeichnete Übersicht.

Digitized by Google

Wenngleich die inneren Lebensschicksale Jacobis von einfacher Art sind, folgen wir ihrer Erzählung doch mit gespanntem Interesse. Wir begleiten den 22jährigen Jüngling nach Königsberg, wo er 1826 als Privatdozent an der Universität seine Lehrtätigkeit beginnt und von 1828 an als außerordentlicher Professor fortsetzt. Von diesem Jahre angefangen hat er dann bis zu seinem 1851 erfolgten Tode als Akademiemitglied an der Berliner Universität Vorlesungen gehalten. Wir erfahren neben zahlreichen Einzelheiten seines Familienlebens und seines wissenschaftlichen Verkehrs Näheres über sein politisches Auftreten im Jahre 1849, das ihm die Ungnade seines Königs zuzog. Materiell durch den Verlust einer Personalzulage sehr empfindlich getroffen, entschloß er sich, einem Rufe nach Wien Folge zu leisten, den Graf Leo Thun, der Reorganisator der Universitäten Österreichs, auf Anregung Brückes an ihn ergehen ließ. Für einen österreichischen Mathematiker ist es verlockend, sich auszumalen, was für Folgen für den wissenschaftlichen Betrieb der Mathematik in Österreich es gehabt hätte, wenn sich Jacobi nicht noch im letzten Augenblick durch Bemühungen der Regierung und durch Zureden seiner Freunde in Berlin hätte festhalten lassen. Denn Jacobi war ein glänzender Lehrer, der nicht nur das Interesse seiner Hörer zu wecken und dauernd zu fesseln verstand, sondern ihnen auch die Bahnen zur Weiterführung der Wissenschaft zu weisen und sie anzueifern wußte, auf diesen Bahnen von Erfolg zu Erfolg zu schreiten.

Wenngleich der Lebenslauf und die Persönlichkeit Jacobis durch den Verfasser eine eingehende Darlegung erfahren, so liegt der Schwerpunkt des Buches doch in der Schilderung seiner Lebensarbeit, seiner schöpferischen wissenschaftlichen Tätigkeit. Um die Hauptgebiete seiner wissenschaftlichen Leistungen und deren Tragweite zu kennzeichnen und zu gleicher Zeit eine Stilprobe des Buches zu geben, überlassen wir dem Verfasser das Wort.

„Überall, wohin Jacobi seinen Scharfsinn lenkte, schuf er Bleibendes und es wurden seine Entdeckungen die Basis für die weitere Entwicklung der Wissenschaft. Als die Hauptgebiete, die er zum Teil neu geschaffen oder doch durch seine genialen Gedanken völlig umgestaltet und ihnen neue Bahnen gewiesen hat, müssen die Theorie der Transzendenten, die Lehre von den totalen und partiellen Differentialgleichungen, die Variationsrechnung und die analytische Mechanik bezeichnet werden; aber auch in der Algebra, der Theorie der Reihen und Integrale und der Anwendung dieser auf Probleme der Astronomie, in der Zahlentheorie, wie in der Geometrie, überall finden wir Jacobische Sätze von der weitesttragenden Bedeutung und alles mit einer Klarheit und Durchsichtigkeit aufgebaut und getragen von einer Kenntnis der historischen Entwicklung der Probleme, wie wir sie wohl sonst kaum wiederfinden."

Der Verfasser begnügt sich nicht damit, jede einzelne von den Abhandlungen eingehend zu analysieren, er bringt auch den Zusammenhang mit Forschungen anderer voll zur Geltung; so grenzt er z. B. innerhalb der Entdekkungen in der Theorie der Transzendenten die Prioritätsverhältnisse zwischen Jacobi und seinem berühmten Rivalen Abel sorgfältig ab. Dadurch wächst das Buch zu einer historisch-kritischen Geschichte der wichtigsten mathematischen Errungenschaften der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts empor.

Ein kongenialer Geist hat hier dem Andenken Jacobis ein würdiges Denkmal gesetzt, das noch künftigen Mathematikergenerationen das Andenken

Digitized by Google

an die Persönlichkeit eines ganz Grossen ihrer Wissenschaft lebendig erhalten und das Verständnis für seine Leistungen vermitteln wird. *G. K.*

**Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik.** Von Prof. Dr. Gustav Holzmüller. Erster Teil. Vierte Doppelauflage. Leipzig und Berlin. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1904.

Das Buch behandelt in seiner ersten Abteilung die Planimetrie in besonders eingehender Weise. Bei der Entwicklung der Grundbegriffe wird auf die entscheidende Wichtigkeit des Unendlichfernen aufmerksam gemacht, ohne daß aber auf Untersuchungen eingegangen würde, die mit Rücksicht auf die in Betracht kommende Altersstufe der Schüler — das Lehrbuch reicht bis zum Abschluß der Untersekunda — als zu weitgehend bezeichnet werden müßten. Dafür ist aber mit allem Fleiße darauf Bedacht genommen, dem Schüler an der Hand von Konstruktionen und einfachen Zahlenbeispielen richtige Begriffe zu vermitteln. Die Konstruktionen werden nicht bloß als Übungsstoff, sondern geradezu zur Gewinnung geometrischer Erkenntnisse verwendet. Die für die Ähnlichkeitslehre grundlegenden Sätze über das Strahlenbüschel sollten etwas schärfer gefaßt sein, da sonst für ihre Anwendung die Gefahr der Verwirrung droht. Die zweite Abteilung enthält die Grundlehren der Arithmetik einschließlich bis zu den Logarithmen und deren Anwendung in der Zinseszinsrechnung. Die dritte Abteilung bringt in aller Kürze die wichtigsten Grundlehren der Trigonometrie. In der vierten Abteilung wird zunächst behufs Wiederholung der stereometrischen Grundbegriffe auf den Vorkursus verwiesen und dann die konstruktive Ableitung der regelmäßigen Körper aus dem Würfel in eingehender Weise behandelt. Den Abschluß bildet die Berechnung des Rauminhalts einfach gestalteter Körper mit Hilfe des Satzes von Cavalieri.

*Dr. Karl Bruno.*

**Mathematische Hauptsätze.** Von Prof. Dr. Heinrich Barks. Ausgabe für Realgymnasien und Oberrealschulen. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Prof. Dr. Max Nath. Zweiter Teil. Pensum der Oberstufe (bis zur Reifeprüfung). Leipzig. Verlag der Dürrschen Buchhandlung 1904. Das Buch zerfällt in fünf Abteilungen.

In der ersten (Planimetrie) und insbesondere die Lehre von den Polen und Polaren eingehend behandelt und zur Lösung der Berührungsaufgabe des Apollonius verwendet. Der auf Seite 29 gebrachte Beweis des Satzes: „Der äußere Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise hat gleiche Potenzen für alle Kreise, von denen beide gleichartig berührt werden“ ist nicht stichhaltig, denn er setzt stillschweigend voraus, daß in dem einen der gegebenen Kreise der zu seinem Berührungspunkte mit dem dritten Kreise gezogene Durchmesser seinen zweiten Endpunkt im Berührungspunkte einer der den beiden Kreisen gemeinsamen äußeren Tangenten liegen hat. Das trifft aber im allgemeinen nicht zu. Der Beweis gelingt aber leicht, wenn man von den vier Schnittpunkten der Zentralen der beiden gegebenen Kreise etwa den zunächst beim äußeren Ähnlichkeitspunkt liegenden $H$, den am weitesten abliegenden $J$ nennt und bedenkt, daß die Dreiecke $ADH$ und $ACJ$ einander ähnlich sind.

Digitized by Google

Von der zweiten Abteilung (Arithmetik) ist besonders hervorzuheben, daß sie den Schüler auch über die unendlichen Reihen, vor allem mit Hilfe einfacher Beispiele, unterrichtet.

Die dritte Abteilung enthält eine eingehende Darstellung der Trigonometrie.

In der vierten Abteilung (Stereometrie) wird auch die sphärische Trigonometrie behandelt und ihrer Anwendung auf die mathematische Erd- und Himmelskunde ein eigener Abschnitt gewidmet.

Die fünfte Abteilung bringt die Erzeugung der Kegelschnitte als Durchschnittslinie einer Ebene mit der Fläche eines Kreiskegels, ferner die analytische und elementarsynthetische Behandlung der Kegelschnitte.

Bei der Gelegenheit sei auf einen störenden Druckfehler aufmerksam gemacht. Auf Seite 262 u. ff. ist wiederholt statt $\varphi \ldots \frac{\varphi}{2}$ zu lesen.

*Dr. Karl Bruno.*

**Mathematischer Leitfaden für Realschulen.** Von Dr. H. Borst, P. Crantz, Dr. E. Haentzschel. Vierte, verbesserte Auflage. Leipzig. Verlag der Dürrschen Buchhandlung. 1904.

In dem ersten Teile des Buches wird die Planimetrie und die Arithmetik einschließlich bis zur Zinseszins- und Rentenrechnung behandelt, in dem zweiten Teile Trigonometrie und Stereometrie. Die Darstellung des Behandelten ist klar und verständlich und wird durch recht hübsche Figuren, die namentlich bei den praktischen Anwendungen auf die Feldmeßkunst und im stereometrischen Teile zu finden sind, wesentlich unterstützt.

*Dr. Karl Bruno.*

**Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie.** Von Prof. H. Müller und M. Kutnewsky. Zweiter Teil. Ausgabe A, für Gymnasien. Zweite, verbesserte und stark gekürzte Auflage. Leipzig und Berlin. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1905.

Die Sammlung bietet auf 273 Seiten einen reichen Vorrat von Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten der angewandten Mathematik, so insbesondere auch schöne nautische Aufgaben und lehrreiche Anwendungen der ebenen und der sphärischen Trigonometrie auf die Erd- und Himmelkunde. Das Buch enthält auch eine stattliche Anzahl von Beispielen zur analytischen Geometrie der Geraden und der Kegelschnittslinien, wenngleich der Titel des Buches dies nicht zum Ausdruck bringt. *Dr. Karl Bruno.*

**Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences.** Conférences faites en Amérique par Émile Picard, membre de l'institut. Paris. Gauthier-Villars, 1905. 168 S.

Die erste Hälfte des Buches enthält drei im Jahre 1899 an der Clark-Universität gehaltene Vorlesungen: „Sur le développement depuis un siècle de quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique." Die erste behandelt „die Ausdehnung einiger mathematischer Begriffe, insbesondere der Funktionsbegriffe seit einem Jahrhundert", die zweite gibt einen Überblick über

Digitized by Google

die Theorie der Differentialgleichungen, die dritte handelt „von der Theorie der analytischen Funktionen und einiger speziellen Funktionen“. Die zweite Hälfte des Buches enthält einen auf dem Kongresse der Künste und Wissenschaften in St. Louis 1904 gehaltenen Vortrag, der dem ganzen Buche seinen Namen gegeben hat. Hier werden die Anregungen geschildert, die die Mathematik von den Anwendungen her erhalten hat, angefangen bei der Feldmeßkunst der alten Ägypter, bis herab zu den großartigen Theorien der Physik und der Himmelsmechanik, und es wird gezeigt, wie daneben die Mathematik des in ihr selbst liegenden philosophischen und ästhetischen Wertes bewußt werde. Zum Schlusse wird angedeutet, wie vielleicht das Aufgeben des Prinzips der „Nichtvererbbarkeit“ uns von den Differentialgleichungen weg zu Funtionalgleichungen führen könnte, die bestimmte Integrale enthalten, wie etwa die Fredholmsche Gleichung. Auch die Wissenschaften, die eben erst im Begriffe sind, ihre „prämathematische“ Epoche zu verlassen, wie Chemie und Nationalökonomie finden Erwähnung. — Einer ausdrücklichen Empfehlung bedarf dieses Buch nicht. Wenn ein Meister wie Picard gleich berühmt als Forscher wie durch die Kunst der Darstellung uns einen Überblick über einzelne Gebiete der Mathematik und über die Entwicklung der gesamten mathematischen Wissenschaft gibt, so weiß jeder Mathematiker, daß ihm dadurch Gelegenheit zu reichlicher Belehrung und tiefer Anregung gegeben ist und keiner wird diese Gelegenheit ungenützt lassen. *Hans Hahn.*

**Leçons sur les functions discontinues** professies au collége de France par René Baire. Rédigées par A. Denjoy. (Collections de monographies sur la théorie des fonctions, publiée par M. Emile Borel.) Paris, Gauthier-Villars, 1905. VIII und 128 Seiten. Paris. Frs. 3.50.

Das vorliegende Buch beschäftigt sich mit einer Frage, die vom Verfasser desselben im Laufe der letzten Jahre zum Abschluß gebracht worden ist: mit der Frage nach den Bedingungen, denen eine unstetige Funktion genügen muß, um durch eine Reihe stetiger Funktionen, und somit auch durch eine Reihe von Polynomen darstellbar zu sein. Die ersten drei Kapitel sind der Auseinandersetzung jener Teile der Mengenlehre gewidmet, die später zur Verwendung gelangen; insbesondere sind dies die Theorie der wohlgeordneten Mengen und der transsiniten Ordinalzahlen der zweiten Zahlklasse, sowie die Theorie der linearen perfekten Mengen. Das vierte Kapitel behandelt die Funktionen einer Veränderlichen; es bringt für diese Funktionen die Begriffe der Stetigkeit, der Schwankung etc. in bezug auf eine vorgegebene perfekte Menge, ferner die Definition der auf einer solchen Menge punktweise und total unstetigen Funktionen. Sodann wird gezeigt, daß eine zwischen endlichen Werten schwankende Funktion einer Veränderlichen, die als Grenze stetiger Funktionen darstellbar ist, nur punktweise unstetig ist auf jeder perfekten Menge. Die Umkehrung dieses Satzes wird zunächst nur für Funktionen bewiesen, die nur die beiden Werte 0 und 1 annehmen. Im fünften Kapitel werden alle Einschränkungen fallen gelassen; die bisherigen Definitionen werden auf Funktionen mehrerer Veränderlicher ausgedehnt, die behandelten Funktionen können über alle Grenzen wachsen, ja sogar die Werte $+\infty$ und $-\infty$ annehmen.

Digitized by Google

Das Schlußresultat lautet ganz allgemein: damit eine Funktion (einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen) durch eine Reihe stetiger Funktionen darstellbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie höchstens punktweise unstetig ist auf jeder perfekten Menge. — Die Darstellungsweise ist äußerst klar und ausführlich, so daß zu erwarten ist, daß diese schöne Theorie nunmehr weiteste Verbreitung finden wird. *Hans Hahn.*

**Kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung.** Von Fisher Irving. Nach der dritten englischen Ausgabe übersetzt von N. Pinkus. Leipzig, B. G. Teubner, 1904 (VI + 72 S., 8°).

Das Büchlein ist aus dem Bedürfnis hervorgegangen, den Studierenden der Nationalökonomie der Yale-Universität in New-Haven das Verständnis der mathematischen Betrachtungsweisen in der neueren Nationalökonomie zu vermitteln und der Verfasser hält es auch für ein geeignetes Mittel, den Studierenden überhaupt die Ideen der Infinitesimalrechnung zu vermitteln. Die Methode könnte man als eine psychologische bezeichnen, insofern als die einzuführenden Begriffe nicht auf logisch formale Weise, sondern durch Einleitung der zu ihrer Bildung nötigen Abstraktion vermittelt werden. Gerade dieser Weg scheint mir aber der pädagogisch einzig gangbare, wenn man nicht tiefere Fachstudien fordern will. Aber auch dann wird dieses Verfahren eine nützliche und für viele Leute, welche mehr zum gegenständlichen als zum formalen Denken veranlagt sind, vielleicht unentbehrliche Einführung darbieten. Die scharfe formale Festlegung der Begriffe knüpft dann von vornherein an bestimmte Vorstellungen an und bezieht sich auf Dinge, die im Bewußtsein vorhanden sind. Diese erste Begriffsbildung ist aber recht eigentlich eine pädagogische Aufgabe und gehörte auf eine frühere Stufe der Erziehung, als sie jetzt angesetzt wird. Bei der schwebenden Diskussion über die Einführung der Infinitesimalrechnung an Mittelschulen wird man das Büchlein nach Entstehung, Zweck und Durchführung eingehender Beachtung wert finden.

*Wirtinger.*

**Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis.** Von Oskar Schloemilch. I. Aufgaben aus der Differentialrechnung. Fünfte Auflage, bearbeitet von E. Naetsch. Leipzig, Teubner, 1904 (VIII + 372, 8°).

Dieses wohlbekannte Buch, welches nun seit 36 Jahren den Adepten der mathematischen Wissenschaften den Übungsstoff darbietet, ist nun neu aufgelegt, dabei aber Zusätze und Einschaltungen nur im bescheidenen Maße vorgenommen. Einerseits nämlich sind allgemeine Prinzipien, auf welche sich ganze Gruppen von Aufgaben zurückführen lassen, hervorgehoben, anderseits sind Aufgaben der darstellenden Geometrie mehr berücksichtigt.

Insbesondere ist der Gesichtspunkt der Punkttransformation und der Berührungstransformation hervorgehoben worden.

**Lehrbuch der Experimentalphysik.** Von Prof. Dr. Donle. 3. Aufl., VIII + 379 S. Stuttgart 1905. Verlag F. Grub. Preis: geb. M. 3.60.

Gegenüber der zweiten Auflage, über welche im 15. Jahrgang d. Zeitschrift, Seite 33, berichtet wurde, unterscheidet sich die vorliegende dritte nur durch einige kleine Verbesserungen und geringfügige Ergänzungen. *Mc.*

Digitized by Google

**Das Weltbild der modernen Naturwissenschaft** von Karl Snyder; autor. deutsche Übersetzung von Prof. Dr. H. Kleinpeter, Leipzig 1905, Verlag von Johann Ambr. Barth.

Snyder hat sich in dem vorliegenden, nunmehr auch in deutscher Übersetzung erschienenen Werke ein gewaltiges Ziel gesteckt. Nicht allein, daß er seine Leser mit den zum Teile ja so überraschend großen Fortschritten, die auf den Gebieten der Physik, Chemie, Biologie und Physiologie im letzten Jahrzehnt gemacht wurden, vertraut machen will, bemüht sich Suyder auch, sein Publikum auf den Standpunkt des modernen Erkenntnistheoretikers zu führen, der das einigende Band einer naturwissenschaftlichen Weltanschauung um alle Wissensgebiete zu schlingen sucht.

Snyder erreicht sein Ziel — trotzdem er sich nur der schlichten Sprache des Alltags bedient oder vielleicht auch eben deswegen — vollauf. Daß er hin und wieder in der Einschätzung mancher wissenschaftlichen Leistung der letzten Jahre — namentlich auf dem Gebiete der Biologie — etwas zu hoch greift und Ziele seinem Leser als nah bezeichnet, die noch recht ferne sein mögen, wollen wir ihm, im Interesse der guten Sache, gern verzeihen; gerade so, wie wir es einem wackeren Bergführer gern nachsehen, wenn er uns, die wir sehnsüchtig nach dem Gipfel auslugen, der so nah' scheint und doch noch so fern liegt, denselben in den Bereich eines Katzensprungs zu rücken sucht.

Die deutsche Übersetzung, obwohl von der fachkundigen Hand eines durch eigene Arbeiten auf erkenntniskritischem Gebiete bekannten Mannes, hinterläßt nicht ganz den frischen, mitreißenden Eindruck, den die erste Lektüre des Originals auf mich machte. *J. N.*

**Die Methoden zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten.** Von Dr. Rudolf Laemmel, Zürich. Zürich, E. Speidel, 1904. 8°. VI + 80 S. Ladenpreis 2 M.

Der Verfasser macht es sich zur Aufgabe, die Methoden, die bei der Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten zur Anwendung kommen, exakter zu begründen, als es gewöhnlich geschieht. Er kritisiert zunächst die von dem Philosophen Kries für ein Problem aufgestellten Bedingungen, unter denen der Begriff der Wahrscheinlichkeit ein bestimmter wird, und findet, daß diese Kriesschen Bedingungen höchstens bei den sogenannten Glücksspielen, und hier nur angenähert, erfüllt wären. Auch mit der Bertrandschen Forderung, ein Problem müsse so genaue Angaben haben, um nur eine einzige Lösung zuzulassen, ist der Verfasser nicht einverstanden; „es kommt nicht darauf an ein Problem eindeutig zu lösen; das wäre ein rein mathematisches Interesse sondern vielmehr darauf, daß man eine richtige, durch die Natur des Problems bedingte Lösung findet." — Der Verfasser unterscheidet drei Methoden, Wahrscheinlichkeiten zu bilden; die erste nennt er die „intensive", die zweite die Methode der „Hypothesenbildung" und die dritte die „statistische" Methode. — Die erste Methode kommt dann zur Anwendung, wenn man nach bloßem Gutdünken eine Wahrscheinlichkeit schätzt, so z. B., wenn man aus gleichem Wissen und Nichtwissen die Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{2}$ setzt. Die

Digitized by Google

zweite Methode, die der Hypothesenbildung, besteht in gewissen Annahmen über die Materie des Problems. Um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß ein gewisses Ereignis $A$ die Eigenschaft $x$ habe, hat man nach der Vorschrift des Verfassers folgende Schritte zu vollführen: 1. Man stelle die Menge derjenigen $A$ fest, die für das vorgelegte Problem in Frage kommen; 2. man ermittle diejenige Teilmenge der obigen Menge, die alle jene $A$ enthält, denen das Prädikat $x$ zukommt; 3. man ordne jedem $A$ ein in der Natur des Problems begründetes, elementares Gewicht zu (eine Valenz). Wie man sieht, ist hier der Mengenbegriff in die Wahrscheinlichkeitstheorie in viel präziserer Weise eingeführt, als dies bisher geschah. Was man gewöhnlich „günstige" und „mögliche" Fälle nennt, wird viel schärfer umgrenzt und als Wahrscheinlichkeit dann ein analoger Quotient definiert. Der Verfasser stellt nun nach der Beschaffenheit der beiden in Betracht kommenden Mengen gewisse Kategorien von Wahrscheinlichkeitsproblemen auf; je nachdem die Mengen abzählbar oder nicht abzählbar, überall dicht, stellenweise dicht oder nirgends dicht; Mengen mit oder ohne Inhalt sind, gestaltet sich die Natur des Problems verschieden. Den zwölf Kombinationen dieser Eigenschaften entsprechend, gibt es dann, da zwei Mengen in Betracht kommen, im ganzen 144 mögliche Typen von Wahrscheinlichkeitsproblemen, von denen einige aber praktisch unmöglich sind. Die nun folgende Aufzählung der einzelnen Typen enthält allerdings bloß vier derartige Typen, jedoch solche, die in der Praxis Bedeutung haben. Unter den Anwendungen ist besonders das von Bertrand aufgestellte Problem beachtenswert: Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine in einem Kreise beliebig gezogene Sehne größer ist als die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks? Der Verfasser kommt bei verschiedener Anwendung seiner Hypothesenbildung zwar auch zu zwei voneinander etwas abweichenden Werten für diese Wahrscheinlichkeit, schließt aber daraus nicht, wie Bertrand, auf eine Unklarheit des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, sondern betrachtet diese Abweichung als ein Zeichen dafür, daß auch noch der Entstehungsmodus der Sehnen in Betracht gezogen werden muß; „man definiert eben für jeden Typus von Problemen, was man unter Wahrscheinlichkeit verstehen will und achtet dabei bloß darauf, daß diese Definition zweckmäßig werde." — Die dritte der oben genannten Methoden, die statistische, kommt zur Anwendung „1. wenn es sich darum handelt, unter gleich berechtigt erscheinenden Hypothesenbildungen eine auszuwählen; 2. wenn die Hypothesenbildung an rein mathematischen Schwierigkeiten scheitert; 3. wenn eine Hypothesenbildung wegen der Kompliziertheit der Materie überhaupt unmöglich ist." Der Verfasser gibt den statistisch ermittelten Werten den unbedingten Vorzug vor allen anders ermittelten. Unter den Beispielen finden wir auch das folgende Problem behandelt: „Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei beliebige rationale und ganze Zahlen teilerfremd sind?" Der Verfasser beurteilt diese Wahrscheinlichkeit empirisch auf Grund einer die aus den ersten 40 Zahlen bestehender Paare enthaltenden Tabelle, während doch diese Wahrscheinlichkeit längst theoretisch bestimmt und gleich $\frac{6}{\pi^2}$ gefunden wurde. In diesen und ähnlichen Fällen muß nun doch der statistisch ermittelte Wert hinter den theoretischen entschieden zurücktreten. Den kleineren Zahlen eine größere Valenz aus dem Grunde beizulegen, weil ein tatsächlich etwa gewähltes Zahlenpaar meist aus kleineren Zahlen bestehen wird (und

Digitized by Google

wo hören die kleineren Zahlen auf?), scheint ein recht bedenklicher Vorgang zu sein; es liegt hier gar nicht in der Natur des Problems, die kleineren Zahlen gegenüber den größeren zu bevorzugen. — Die Schrift umfaßt noch einen zweiten Teil, in welchem drei spezielle Wahrscheinlichkeitsprobleme behandelt werden, nämlich: 1. Wahrscheinlichkeitsfragen der Kettenbruchentwicklungen; 2. das Gyldensche Problem; 3. Verallgemeinerung des Buffonschen Nadelproblems. Von diesen ist das unter 2. genannte Gyldensche Problem von besonderem Interesse, da es sich hier darum handelt, die Wahrscheinlichkeit zu beurteilen, daß eine bestimmte, in der Störungstheorie auftretende Reihe konvergent sei. — So enthält dann das vorliegende Büchlein eine Reihe sehr interessanter Untersuchungen. Die darin aufgestellten Gesichtspunkte und Methoden sind sowohl vom mathematischen wie auch vom erkenntnistheoretischen Standpunkte aus beachtenswert. Die Einführung mengentheoretischer Betrachtungen in die Wahrscheinlichkeitsberechnung erweitert unter allen Umständen das Gebiet der letzteren sehr wesentlich; anderseits bleibt wohl die Frage offen, ob gerade jene neuen, über gewöhnliche geometrische Wahrscheinlichkeiten hinausgehenden Probleme praktisch von Bedeutung sein können. *R. v. St.*

**Schattenkonstruktionen.** Von Prof. J. Vonderlinn in Breslau. Sammlung Göschen. Leipzig 1904. 118 Seiten mit 114 Figuren.

In dem Buche werden die Schattenkonstruktionen zunächst für Elementargebilde und dann für Polyeder, Zylinder, Kegel, Kugeln, Rotations-, Gesims-, Schrauben- und Röhrenflächen behandelt. Als Projektionsmethode wird dabei ausschließlich das Grund- und Aufrißverfahren mit Bildachse benützt; nur auf Seite 45 und 46 kommt ganz unvermittelt die Schattenbestimmung für einen in schiefer bezw. zentraler Projektion abgebildeten Drehzylinder vor. Für die Beleuchtung sind parallele Lichtstrahlen in der Richtung einer Würfeldiagonalen vorausgesetzt, wie es in technischen Zeichnungen üblich ist. Der praktische Vorteil dieser besonderen Annahme wird aber nicht angegeben; auch auf die metrischen Beziehungen und konstruktiven Vereinfachungen, welche sich bei derselben ergeben, wird nicht näher eingegangen. Die auf Seite 10 angegebene „allgemeine Regel" zur Bestimmung der Lichtgrenze ist nicht passend, da es sich um eine Berührungsaufgabe handelt. Man führt Polyeder (Seite 23) durch Zerlegung oder Ergänzung auf Pyramide und Prisma zurück, und für eine Fläche benützt man berührende Hilfsflächen, aber nicht ebene Schnitte, deren Konstruktion umständlich und ungenau ist. In der Folge wird übrigens von der angeführten „Regel" nur teilweise Gebrauch gemacht und zumeist die eigentlichen Methoden angegeben. Am ausführlichsten ist der Abschnitt über die Schraubenflächen behandelt, wo z. B. der Grundriß der Lichtgrenze in allen wichtigen Formen gezeichnet ist. Die 114 Figuren sind recht gut ausgeführt, mit Ausnahme der Figur 33, in welcher der Schlagschatten wesentlich unrichtig ist. Die zahlreichen angewandten Beispiele sind vorwiegend dem Hochbaue entlehnt, während der Maschinenbau weniger berücksichtigt ist. In technischen Kreisen, für welche das Büchlein bestimmt ist, wird es gute Dienste leisten. *Th. Sch.*

Digitized by Google

**Meccanica razionale.** I. von R. Marcolongo. Cinematica. — Statica. II. Dinamica. Principi di idromeccanica. (XII + 271; resp. VI + 324S. Manuali Höpli, Nr. 352—353; Nr. 354—355. Milano 1905.)

In den vorliegenden zwei Bändchen sind die wichtigsten Sätze der analytischen Mechanik in sehr klarer und eleganter Form dargestellt. Durchwegs ist von den Methoden der Vektorenrechnung ausgedehnter Gebrauch gemacht; die wichtigsten Begriffe derselben sind in einem einleitenden Kapitel zusammengestellt. Am Ende eines jeden Abschnitts finden sich Übungsbeispiele mit einer kurzen Andeutung ihrer Lösung. In dem ersten Teile „Kinematik" wurden die Bewegungen eines Punktes und eines festen Körpers analysiert. Der zweite Teil „Statik" enthält die Kapitel: Zusammensetzung von Kräften; Prinzip der virtuellen Verschiebungen; Kettenlinie. Der dritte Teil „Dynamik; Prinzipien der Hydromechanik" ist in die folgenden Kapitel eingeteilt: Die drei Grundgesetze der Bewegung von Newton; Dynamik des Punktes; Prinzip von d'Alembert, Gleichungen von Lagrange und Hamilton; allgemeine Theoreme; Dynamik der starren Systeme; Potential; Grundgesetze der Hydromechanik. Das Werk ist zum einleitenden Studium der Mechanik wärmstens anzuempfehlen. *Hl.*

**Aus Natur und Geisteswelt.** Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen. Sichtbare und unsichtbare Strahlen von R. Börnstein und W. Marckwald. Verlag von B. G. Teubner in Leipzig-Berlin.

Ein ganz ausgezeichnetes Werkchen. In klarer, gemeinverständlicher und zum Teile ganz origineller Form werden die charakteristischen Eigenschaften jeder Wellenbewegung entwickelt und zunächst an dem Beispiel der Wasserwellen erörtert, hierauf bei den verschiedenen Gattungen der Luft und Ätherwellen aufgezeigt und physikalisch interpretiert, wobei stets die Phänomene das täglichen Lebens besonders berücksichtigt werden. Daß der von Marckwald herrührende Abschnitt über Radioaktivität mit großer Sachkenntnis geschrieben ist, braucht wohl nicht erst betont zu werden. Bei der sonst außerordentlich reichen Auswahl des Gebotenen — wird doch sogar die Photographie in Farben behandelt — wäre wohl auch eine Erwähnung des Doppler schen Prinzips durch seine Bedeutung in der Astrophysik gerechtfertigt gewesen. Sonst läßt aber das mit guten Figuren und Abbildungen ausgestattete Werkchen wenig missen und ist jedem Freunde der Wissenschaft wärmstens zu empfehlen. *J. N.*

**Sammlung Göschen. Nr. 242.** Technische Wärmelehre (Thermodynamik) von K. Walther und M. Röttinger.

Das Büchlein soll offenbar dem Techniker die physikalischen Grundlagen seines Wissensgebietes liefern. Der Physiker vom Fach wird allerdings hin und wieder die von den Klassikern der Gastheorie und Thermodynamik gewohnte Präzision und Strenge des Ausdrucks und in der Verwendung gewisser Begriffe vermissen. Dafür entschädigt das Bändchen wiederum durch die Fülle der sauber und exakt konstruierten Diagramme und die Durchführung zahl-



Digitized by Google

reicher Beispiele aus der Praxis, so daß auch der Theoretiker der Thermodynamik — sofern er Anschluß an die praktische Verwertung seiner Lehren sucht — das Büchlein mit Nutzen zur Hand nehmen wird.

**Sammlung Göschen. Nr. 243.** Physikalische Aufgabensammlung von Prof. G. Mahler.

Die Sammlung umfaßt in zweckmäßiger Auswahl das gesamte Wissensgebiet und dürfte ohne Zweifel dazu beitragen, den physikalischen Mittelschulunterricht, dem es an praktischer Einübung der Gesetze und dem damit verbundenen tieferen Eindringen in das Wesen der physikalischen Phänomene ohnehin an den meisten Anstalten zurzeit noch arg gebricht, nutzbringender zu gestalten. *J. N.*

**Introduction a la theorie des fonctions d'une variable.** Von Jules Tannery. Deuxième édition entièrement refondue. Tome I. Paris, A. Hermann, 1904.

Die erste Auflage dieses Buches ist ja wohlbekannt als eine der ersten systematischen Darstellungen der neueren Auffassung der Grundbegriffe der höheren und niederen Analysis. Aber der Verfasser hat das Buch ganz neu geschrieben und im Vorwort ausführlich Rechenschaft von den Änderungen gegeben. Er hält es jetzt für richtig und gestattet, sich bei der Darstellung der Grundlagen der Analysis auch der Ausdrücke und Figuren der Geometrie zu bedienen, vorausgesetzt, daß man sie in die Sprache der Zahlen zu übersetzen verstehe und die Resultate logisch zu begründen vermöge. Die logische Grundlage wird immer der Begriff der ganzen Zahl bleiben, aber der Zweck der sukzessiven Erweiterungen des Zahlbegriffs ist die vollständige Anpassung an die stetige Größe.

Die Darstellung sucht nirgends die Allgemeinheit um ihrer selbstwillen, sondern eilt möglichst rasch zur Untersuchung der wichtigsten Spezialfunktionen. Die Mengenlehre ist in weiterem Ausmaß herangezogen worden, ohne jedoch als Selbstzweck aufzutreten. Die Einführung der irrationalen Zahlen geschieht im Anschluß an Dedekind, während die erste Auflage in dieser Hinsicht an Méray anschloß.

Der Verfasser denkt sich das Buch vor allem für solche Leser geschrieben, welche ihre mathematischen Studien durch Wiederholung vertiefen wollen. Wenn es auch möglich sei, bei einem ersten Studium mit der nötigen Ausdauer und Aufmerksamkeit den langen abstrakten Deduktionen zu folgen, so sei doch die Fähigkeit hiezu in der Regel erst ein Resultat längerer Beschäftigung mit Mathematik und erst damit erkenne man Zweck und Bedeutung dieser Abstraktionen richtig. Der vorliegende erste Band bringt die Einführung der Irrationalzahlen, unendlichen Mengen, Folgen, den Grenzbegriff. Sodann behandelt er die unendliche Reihen und Produkte. Der Funktionsbegriff und seine elementaren Spezialfälle, die rationalen Funktionen $a^x$, $lx$, $x^m$ bilden den Gegenstand eines weiteren Kapitels. Eine eingehende Darstellung erfährt die gleichmäßige Konvergenz und die Entwicklung und Definition der elementaren Transzendenten. Den Schluß bildet die Einführung der Derivierten, ihrer wichtigsten Anwendungen und das Weierstraßsche Beispiel einer stetigen nichtdifferenzierbaren Funktion. Die Klarheit und Eleganz der Darstellung, die

Digitized by Google

leichte Lesbarkeit des Buches und die trotz aller Strenge gegenständliche Ausdrucksweise darf man bei einem Autor vom Range Tannerys nicht erst hervorheben. *W.*

**Opere Matematiche.** di Eugenio Beltrami. Tomo II. Pubblicata per cura della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma. Ulrico Hoepli. Mailand 1904 (4°, 468 Pag.).

Der vorliegende zweite Band der Werke des berühmten italienischen Mathematikers enthält in würdiger Ausstattung und sorgfältigen Druck die Abhandlungen von 1867 bis 1873. Sie gehören in vieler Hinsicht zu den Quellenschriften der darin behandelten Gebiete, in deren Mittelpunkt für diese Zeit die Flächentheorie und ihre Verallgemeinerungen und Anwendungen stehen. An der Spitze finden wir die Abhandlung über Minimalflächen von 1867, sodann die Abhandlung über die allgemeine Theorie der Differentialparameter quadratischer Formen mit beliebig vielen Variablen, ferner verschiedene kleinere Abhandlungen, in welchen Beltrami seine Formeln mit der Geometrie auf Flächen konstanter Krümmung und anderen Fragen der Flächentheorie in Verbindung setzt.

Besonders hervorgehoben sei noch die umfangreiche von 1871 bis 1874 sich erstreckende Reihe von Abhandlungen Ricerche sulla cinematica dei fluidi, sowie die weitere über das Rollen einer Fläche auf einer anderen. Einer anderen Gedankenreihe gehört die Abhandlung über die Geometrie der binären kubischen Form an, in welcher die Lage der Wurzelpunkte der Form in der zugehörigen Kovarianten einer eingehenden geometrisch-analytischen Untersuchung unterzogen und eine Fülle von eleganten Resultaten erlangt werden. Die beiden Noten über elektrodynamische Probleme jedoch stehen mit der Differentialgeometrie wieder in unmittelbarem Zusammenhang. *W.*

**Orthogonale Axonometrie.** Ein Lehrbuch zum Selbststudium, von Rudolf Schüßler, Professor an der Technischen Hochschule in Graz. VII + 170 Seiten und 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. B. G. Teubner. 1905. Preis, geb. 7 M.

Das Buch bietet einen vollständigen Lehrgang der darstellenden Geometrie unter fast ausschließlicher Benützung derjenigen Projektionsmethode, welche man als „orthogonale Axonometrie, bezeichnet. Der Verfasser hat eben die Absicht, diese als selbständige Projektionsmethode erscheinen zu lassen, weshalb auch keine besonderen Vorkenntnisse aus der darstellenden Geometrie vorausgesetzt werden.

In dem ersten Abschnitte wird das Achsenkreuz behandelt, insbesondere eine ausführliche Anweisung für eine günstige Wahl desselben gegeben. Von den Umkehrungsaufgaben wird nur jene vorgeführt, bei welcher das Verhältnis der drei Einheitsverkürzungen gegeben ist. Dabei wird aber ausdrücklich hervorgehoben, daß auch diese Aufgabe praktisch ohne Wert ist, da die Wahl einfacher Verhältnisse weder für die Konstruktion noch für die Anschaulichkeit des Bildes einen Vorteil bringt. Nach Figur 3 ist bei „Übersicht“ ein negatives und bei „Untersicht“ ein positives Koordinatensystem vorausgesetzt. Der zweite Abschnitt enthält die Abbildung der Elemente, der dritte die projektiven Aufgaben über die letzteren. Hier wird das Konstruieren mit un-



Digitized by Google

erreichbaren Punkten nach zwei Methoden gezeigt; auch später wird häufig auf Konstruktionen bei beschränkter Zeichenfläche hingewiesen. Die beiden nächsten Abschnitte enthalten die Schattenkonstruktion an ebenflächig begrenzten Körpern, insbesondere Pyramiden und Prismen. Hier kommen neun Beispiele aus dem Hochbau vor; besonders hübsch ist jenes über die Schattenbestimmung an einem Gesimse mit Benützung der Gehrung. Der in II bis V behandelte Stoff ist freilich zumeist vom Achsenkreuze unabhängig; charakteristisch sind erst die in VI und VII behandelten metrischen Elementaraufgaben. Für das Konstruieren von normalen Graden in einer Koordinatenebene findet man fünf Lösungen, welche die Projektion eines Quadrats als gegeben voraussetzen (auch für schiefe Projektion geltend) und vier Lösungen, bei welchen bloß das Achsenkreuz benützt wird. Die letzte ist in sieben Variationen vorgeführt. In dem Abschnitte VIII über den Kreis wird zunächst bewiesen, daß die Orthogonalprojektion des Kreises die Brennpunktseigenschaft der Ellipse besitzt*), und im Abschnitte IX wird gezeigt, daß man durch jeden Kegelschnitt Rotationskegel legen kann. Aus diesen beiden Umständen werden zahlreiche Eigenschaften und Konstruktionen für Kegelschnitte gefolgert. Die Abschnitte X und XI behandeln die Zylinder- und Kegelflächen zweiten Grades und im Abschnitt XII wird die Schnittlinie derselben besprochen. Sonderbarerweise ist diesem Abschnitte gar keine Figur beigegeben, während die beiden folgenden über die Kugel und die Halbkugel wieder besonders reich mit Abbildungen versehen sind. Im letzten Abschnitte (XV) finden die Rotationsflächen recht gute Behandlung. Hier wird ausnahmsweise zuerst im Grund- und Aufrißverfahren die Bestimmung der Lichtgrenze für Parallelbeleuchtung gezeigt und dann auf die Umrißbestimmung für axonometrische Bilder angewandt. Die zahlreichen Angaben und Figuren über verschiedene Formen der Konturkurven sind sehr geeignet, dem Leser Klarheit über diese Sache zu verschaffen. Nur auf Seite 153, Z. 16, ist die Stelle „bei einem Wendepunkte" zu streichen. Es wird nämlich ein Punkt, in welchem sich zwei verschiedene Kurven berühren, auf S. 153 mit einem Wendepunkte und auf S. 156 mit einem Rückkehrpunkte als gleichwertig behandelt, was hinsichtlich der Krümmung, die hier in Betracht kommt, nicht passend ist. Den Abschluß bilden die Drehflächen zweiten Grades. Bei einigen Abschnitten wird der Leser durch die Fülle der Konstruktionen überrascht sein, welche für ein und dieselbe Aufgabe geboten wird. Damit verfolgt der Verfasser den Zweck, die schönen Untersuchungen von Karl Pelz**) auch weiteren Kreisen leicht zugänglich zu machen. Durch den klaren Ausdruck und die leichtfaßliche Behandlungsweise (keine Kenntnisse aus der projektiven Geometrie voraussetzend) wird dieser Zweck auch sicher erreicht.

Das ganze Buch ist in Wort und Bild mit der größten Sorgfalt ausgearbeitet und verdient daher die vollste Anerkennung aller Kreise, welche sich für darstellende Geometrie interessieren. *Th. Sch.*

---

*) Für diesen Beweis wird „Blaschke, Jahresbericht der Landesrealschule in Graz, 1897" zitiert; er ist aber mit dem vom Referenten in der „Zeitschrift f. Realschulwesen", XVII. Jahrg., 1892. mitgeteilten identisch.

**) Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wiss. in Wien, 1880, 1881, 1884 und böhm. Ges. d. Wiss. in Prag, 1885.

Digitized by Google

**Correspondance d'Hermite et de Stieltjes** publiée par le soins de B. Bailland et H. Bourget, avec une prèface de Emile Picard. Tome I. (8. Nov. 1882 bis 22. Juli 1889.) Paris, Gauthier (Villars, 1905. + 477 Pag.) mit den Bildnissen von Hermite und Stieltjes.

Es gehörte zu den letzten Wünschen Hermites, seinen Briefwechsel mit Stieltjes zu veröffentlichen und so eine Fülle von Anregungen, welche aus dem gegenseitigen Verkehr entsprungen waren, der Vergessenheit zu entreißen. Sie betreffen die verschiedensten Fragen der Analysis und führen jenen Kampf mit den Schwierigkeiten des Einzelproblems vor Augen, der in der Regel erst beginnt, wenn die großen Linien der Theorie bereits gezogen sind, dessen Preis aber dann die tieferen und interessanteren Resultate sind, wenn man so glücklich ist, sie zu erreichen.

Die Briefe enthalten so viele Einzelheiten, durch numerische Beispiele und oft ganze Tabellen erläutert, daß ich darauf verzichten muß, über die Resultate im einzelnen zu berichten.

Die Lagrangesche Interpolationsformel und die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in fünf Quadrate eröffnen den Briefwechsel, der dann auf mechanische Quadratur und Kettenbruchentwicklung bestimmter Integrale übergeht. Orthogonale Substitutionen und lineare Differentialgleichungen treten auf und bei dieser Gelegenheit auch die Ideen der bekannten schönen Note von Stieltjes (Acta Mat. VI), in welcher die Realität der Lösungen gewisser transzendenter Gleichungen aus einem mechanischen Problem erschlossen wird

Verschiedene Fragen und Formelgruppen aus der Theorie der elliptischen Funktionen werden erörtert, mit besonderer Ausführlichkeit aber die Theorie der Gammafunktion und der Riemannschen Transzendenten $\zeta(s)$. Die verschiedensten Entwicklungsformeln und Darstellungen werden untersucht und auf ihre Eignung zur numerischen Rechnung geprüft. Dabei wird ein Fehler in den Rechnungen Bourguet's (p. 247 ff.) aufgedeckt. Eingehend erörtert wird der Gebrauch der Laplaces schen Methode zur Berechnung von Summen und Integralen für große Werte der darin vorkommenden Parameter. Als Probe sei hervorgehoben, der wunderschöne Beweis von Stieltjes, daß die Gammafunktion nirgends verschwindet (p. 460 ff,) ferner die elegante Ableitung:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\delta = 0} \delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\delta} \sin n\delta = \lim \frac{\pi - \delta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Endlich die hochinteressanten asymptotischen Formeln, welche Stieltjes für die Differentialquotienten der elliptischen Thetanullwerte entwickelt (p. 474 ff.). Der Band schließt mit der Bitte Hermites an Stieltjes, ihm bei der Korrektur der Fragmente behilflich zu sein, welche den dritten Band von Halphens Werk über elliptische Funktionen bilden.

Daß Zitate und Eigennamen in deutscher Sprache häufig entstellt sind, ist nur ein kleiner Schönheitsfehler bei dem korrekten Druck der Formeln und des französischen Textes.

**Opere Matematiche**, pubblicate per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi (Ascoli, Cerruti, Colombo, Cremona, Negri, Schiaparelli). Ulrico Hoepli, Mailand 1904 (4°, 435 Pag.).

Digitized by Google

Niemand wird zweifeln, daß ein Mann, wie F. Brioschi, dessen Name mit der Entwicklung der Invariantentheorie, der Gleichung fünften Grades, der Theorie der elliptischen Funktionen so eng verknüpft ist, das Denkmal verdient, welches ihm durch Herausgabe seiner gesammelten Werke in würdiger Form und Ausstattung errichtet wird. Aber die vorliegende Ausgabe zeigt deutlich, wie notwendig es wäre, sich über die Gesichtspunkte, nach denen ein solches Sammelwerk geordnet wird, vorher zu einigen, damit die aufgewendeten bedeutenden Mittel auch dem Zweck, in leicht zugänglicher und übersichtlicher Form ein Gesamtbild der Tätigkeit eines Forschers zu liefern, entsprechen. Es ist ja allerdings oft mit Schwierigkeiten verbunden, die einzelnen Abhandlungen nach Materien zu ordnen, wie das bei der Gesamtausgabe von Jacobis und zum Teil der von Kroneckers Werken geschehen ist.

Läßt sich dies ohne Zwang durchführen, so wird es immerhin das empfehlenswerteste sein. Die chronologische Anordnung wird dabei subsidiär eintreten müssen. Auch die rein chronologische Anordnung hat ihre Vorzüge, da sie das Bild der Tätigkeit vor unseren Augen entwickelt. Die in gleichen Verlag erschienene Ausgabe der Werke Beltramis ist nach diesem Gesichtspunkt gemacht und hier, wo nicht, wie z. B. bei Gauß, weit auseinanderliegende Gebiete betroffen werden, gewiß am Platz. Warum aber hat man bei Brioschi den rein äußerlichen Gesichtspunkt gewählt, die Arbeiten nach den Journalen, in welchen sie erschienen sind, zu ordnen?

Der vorliegende Band enthält die Abhandlungen aus den Annali di Matematica von 1887 bis 1897, sodann die im R. Istituto Lombardo publizierten von 1847 bis 1894, sodann die in den wenig verbreiteten Memorie della Società italiana delle scienze residente in Modena erschienenen Arbeiten aus dem Jahre 1855, endlich die Publikationen in den Atti dei Lincei 1870—1884 und den Rendi conti dei Lincei 1884—1886. Dazu kommt am Schluß ein Register der Eigennamen. Diese Anordnung muß nun wohl auch in den folgenden Bänden beibehalten werden. Die Unannehmlichkeit, welche sie für den Gebrauch hat, läßt sich aber durch ein Verzeichnis der Abhandlungen, sei es in chronologischer Reihenfolge, sei es nach Materien geordnet, noch erheblich mildern und der Berichterstatter hofft sehr darauf, da gerade Brioschi die Entwicklung einer ganzen Reihe von Fragen fortlaufend mit sehr in rechnerische Einzelheiten gehenden Noten begleitet hat. Die vorliegenden 55 Abhandlungen sind von den Herren Bianchi, Capelli, Cerruti, Gerbaldi, Loria, Pascal, Pitarelli, Tonelli revidiert worden. Außerdem haben die Herren Gerbaldi und Pascal an dem Gesamtwerk erheblichen Anteil.

Interessant und wohl nicht allgemein bekannt ist, daß sich Brioschi auch als ein genauer Kenner der Literatur der angewandten Mathematik erweist, wie in den Prefazione ad una memoria die G. Piola (1852) (CIII), in welcher er eingehend die Literatur der Hydrodynamik bespricht oder in den Rapporto sopra un memoria del generale Cavalli (CXII) und in No. CXV, dem Nekrolog für Francesco Colombani. Auch die Abhandlung CV sopra un estensione del teorema di Abel (1856) scheint in Vergessenheit geraten zu sein.

Hoffen wir also, daß so viele interessante und sorgfältige Arbeit, so gute Ausstattung am Schlusse auch noch durch zuverlässige Register gekrönt wird.

*W.*

Digitized by Google

**Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung mit zahlreichen Übungsbeispielen.** Von E. Cesàro. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausgegeben von G. Kowalewski. Leipzig 1904. B. G. Teubner. VI + 894 S. Preis, geb. 15 M.

„Über die Prinzipien, auf die ich bei meinem Unterricht nicht so viel Gewicht lege wie auf die Anwendungen, kann sich der Leser, der es wünscht, in ausgezeichneten Werken eingehender unterrichten. Ich führe ihn hier schnell und sicher zu einer großen Ernte analytischer und geometrischer Tatsachen." Dem in diesen Worten der Vorrede ausgesprochenen Programme ist der Verfasser in hervorragender Weise gerecht geworden. In der Tat fehlte ein Lehrbuch, das — ohne oberflächlich und unstreng zu sein — das Hauptgewicht auf die Anwendungen legt; diese Lücke ist nun vollkommen ausgefüllt. Den Studierenden der Mathematik kann nicht genug empfohlen werden, durch Lektüre dieses Buches und Durchrechnen der ungemein geschickt ausgewählten Übungen, ihre theoretischen Kenntnisse nach der Seite der Anwendungen hin zu verwenden und zu erweitern. Das Buch beginnt mit einer ziemlich ausführlichen Theorie der Determinanten und ihre Anwendung auf lineare und quadratische Formen. Es folgt die Einführung der Irrationalzahlen, der Grenzwerte und der unendlichen Algorithmen. Sodann die wichtigeren Eigenschaften der Funktionen, ihrer Derivierten und Anwendungen derselben, Reihenentwicklungen etc. Hierauf Einführung der komplexen Zahlen (geometrisch) und der Quaternionen. Ein langes Kapitel ist den fundamentalen Fragen der Algebra gewidmet (Elimination, Wurzelexistenz. Separation und Approximation der Wurzeln, Algebraische Auflösung, Unmöglichkeitsbeweis). Unter dem Titel „Differentialrechnung" wird eine sehr originelle Theorie des Rechnens mit Infinitesimalen eingeführt. Wie wohl sie logisch vollkommen korrekt ist, würde ich hier Mißverständnisse seitens eines ungeübten Lesers nicht für ausgeschlossen halten. Ungemein reichhaltig und schön sind die Anwendungen auf Kurven und Flächen. Schließlich ist noch der Integralrechnung ein Kapitel gewidmet, in dem auch die Grundbegriffe aus der Theorie der Differentialgleichungen ihren Platz finden. Ein Anhang bringt u. a. einige Andeutungen über die Differentialrechnung und die Variationsrechnung.

Bei der ausgezeichneten Verwendbarkeit dieses Buches, ist wohl nicht daran zu zweifeln, daß bald eine neue Auflage nötig sein wird. Da wäre es sehr wünschenswert, wenn ihr ein ausführlicheres Sachregister mitgegeben würde, als diesmal; es käme erst dadurch die große Fülle des in den Übungen enthaltenen Stoffes voll zur Geltung. *Hans Hahn.*

**A treatise on the analytical Dynamics of particles and rigid bodies; with an introduction to the problem of three bodies.** Von E. T. Whittaker. 4°, XIV + 414 S. Cambridge. Univ. press., 1904.

Ziel des vorliegenden Werkes ist die eingehende Behandlung der Systeme mit endlicher Zahl von Freiheitsgraden, welche auch an die neueren diesbezüglichen Arbeiten unmittelbaren Anschluß gewinnen soll. Der reiche Inhalt gliedert sich in drei Teile, die sich allgemein am besten durch die drei Namen Lagrange, Jacobi, Poincaré charakterisieren lessen. Der erste Teil (Kap. I.—VIII) beginnt mit einer kurzen Kinematik des starren Körpers, wendet

Digitized by Google

sich dann zu den Lagrangeschen Gleichungen und ihren allgemeinen Integralen, worauf speziell die integrablen Probleme (Zentralbewegung Liouvillesche Systeme, Kreiselbewegung etc.) des näheren behandelt werden. Den Schluß bildet die nach Cauchy-Weierstraß gegebene Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme der kleinen Schwingungen. Im zweiten Teile (Kap. IX.—XII) tritt die Überlegenheit, der vorliegenden Darstellung, anderen gegenüber besonders klar zu Tage. Werden doch in solchen die Jacobi-Hamiltonschen Theoreme meist nur als besondere Rechenresultate abgeleitet, und die allgemeinen Begriffsbildungen, welche sie unmittelbar einzusehen gestatten, übergangen. Im Gegensatz hiezu entwickelt der Verfasser nach Herleitung des Hamiltonschen Prinzips und des kanonischen Differentialgleichungssystems zuerst die Grundlinien der von Lie und Poincaré betrachteten Integralinvarianten und stellt als charakteristische Eigenschaft eines kanonischen Systems:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$$ die Existenz der relativen Integralinvarianten

$$\int \Sigma\, p_i\, dq_i \text{ fest.}$$

Hierauf wird die kovariante Zuordnung des kanonischen Systems zu dem Differentialausdruk $\Sigma\, p_i\, dq_i - H\, dt$ besprochen und an diesen die Elemente der Theorie der Berührungstransformationen angeschlossen. Aus diesen beiden Gesichtspunkten ergeben sich dann mühelos die Äquivalenz des Systems und der partiellen Differentialgleichung die kanonischen Transformationen, das Poissonsche Theorem, das Liouvillesche Theorem etc. Die geometrische Auffassung dieser Dinge bleibt hiebei, wohl mit Rücksicht auf eine einheitliche Darstellung unerörtert. Der dritte Teil (Kap. XIII—XVI) ist neueren Resultaten der Himmelsmechanik gewidmet, welche größtenteils hier zum erstenmal in ein allgemeines Lehrbuch der Mechanik übergegangen sind. Hieher wurden aufgenommen die Reduktion des Dreikörperproblems auf die kleinstmöglichste Zahl von Freiheitsgraden, der Brunssche Beweis der Nichtexistenz weiterer algebraischer Integrale und der entsprechende Poincarés für allgemeinere eindeutige Integrale. Kap. XV beschäftigt sich vorzugsweise mit den Variationsgleichungen bei zwei Freiheitsgraden (Jacobische Gleichung des zugehörigen Variationsproblems), wobei nur zu bedauern ist, daß der Verfasser den diesbezüglichen Untersuchungen Poincarés keinen Platz eingeräumt hat. Endlich enthält das letzte Kap. XVI einen vom Verfasser herrührenden Beweis der Möglichkeit, die Koordinaten in der Umgebung eines in erster Näherung stabilen Gleichgewichtslage, wenigstens formal in trigonometrischer Form zu entwickeln. Er beruht auf einem der Delaunayschen Störungstheorie nachgebildeten sukzessiven Transformationsverfahren zur Berücksichtigung immer höherer Glieder in den Differentialgleichungen der kleinen Schwingungen. Zum Studium der Mechanik wird wohl in erster Reihe dieses Werk zu empfehlen sein, aber auch der mit ihr Vertraute wird darin eine ganze Reihe ihn interessierender Details finden. *G. Herglotz.*

**Propagation de l'Electricité.** Par Marcell Brillouin: Paris, Librairie scientifique A. Hermann, 1904. Preis Frs 15. Gr. 8°, IX + 395 S.

Digitized by Google

Dieses Werk, welches eine Wiedergabe der 1901—1902 vom Verfasser am Collège de France gehaltenen Vorlesungen darstellt, ist kein eigentliches Lehrbuch. Man könnte es als eine Sammlung von Skizzen bezeichnen, welche das Thema zum Teil in historisch-kritischer Weise behandeln. Nur die letzte derselben: Elektrische Schwingungen eines Rotationsellipsoids, fällt aus diesem Rahmen etwas heraus, um so mehr als ja die Eigentümlichkeit der Aufgaben, welche die durch Hertz inaugurierte Elektrodynamik der elektrischen Schwingungen stellt, von dem Verfasser bereits in dem vorletzten Kapitel an dem Beispiel der Kugel illustriert ist.

Der erste Teil des Werkes gibt eine historische Einführung. Hier sind die Arbeiten von Cavendish, Davy, Barlow, Bequerel, Ohm, Kirchhoff und Clausius dargestellt und gewürdigt. Der Verfasser hat die Entwicklung der Lehre von der Fortpflanzung der Elektrizität sichtlich mit großer Liebe studiert und die Freude, welche ihm diese Studien gemacht haben, spiegelt sich in dieser Einleitung wieder.

Der zweite Teil behandelt konstante oder variable Ströme mit Ausschluß der Induktion, welcher der dritte Teil gewidmet ist. Hier ist besonders ausführlich der Fall zweier paralleler Drähte dargestellt.

Den vierten Teil, welcher das elektromagnetische Feld behandelt, eröffnet ein historischer Überblick über die Zeit vor Maxwell, welchem sich dann eine Darstellung der Verdienste von Maxwell und Hertz anschließt. Die Arbeit von Hertz: „Über die Kräfte einer elektrischen Schwingung behandelt nach der Maxwellschen Theorie" ist referiert, auch die Abbildungen, welche Hertz dieser Arbeit beigegeben hat, sind reproduziert. Hieran schließt sich die Besprechung einer Untersuchung, von Pearson und Lee über das Feld eines periodischen Dipols mit Berücksichtigung der Dämpfung sowie der Bestimmung der Dämpfung von Bjerkness. Hier wäre wohl auch bei Besprechung der Versuchsanordnung Lecher zu nennen gewesen, mit dessen Anordnung die Versuche von Bjerkness ausgeführt wurden. Es folgen endlich die bereits erwähnten Fälle der Kugel und des Rotationsellipsoids.

Die Darstellung Brillouins zeichnet sich durch Klarheit sowohl in mathematischer als auch in physikalischer Beziehung, sein historisches Urteil durch Objektivität aus. Der deutsche Leser wird mit Vergnügen wahrnehmen, in welch hohem Maße Brillouin der deutchen Forschung Gerechtigkeit widerfahren läßt. So sei, alles in allem, das Buch, dem eine Fortsetzung betreffend die Elektronentheorie folgen soll, als genußreiche und instruktive Lektüre bestens empfohlen. *Lampa.*

**Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre.** Von H. W. Bakhuis Rooseboom. 2. Heft; Systeme aus zwei Komponenten. 1. Teil (XII + 467 S. — Braunschweig 1904).

Das vorliegende Heft gibt den ersten Teil der Gleichgewichte in binären Systemen. Es enthält eine vollständige Übersicht der Gleichgewichte zwischen festen flüssigen und gasförmigen Phasen solcher binären Gemische, worin nur die Komponenten als feste Phasen, eventuell in mehreren Modifikationen, auftreten. Graphische Darstellungen finden sich zahlreich in dem Werke; speziell die Darstellung durch eine Raumfigur, deren Koordinaten Temparatur, Druck

Digitized by Google

und Konzentration sind. Auch sonst ist die Anlage des Heftes dieselbe, wie bereits bei Besprechung der ersten Lieferung hervorgehoben wurde (XIII. S. 21).

*Hl.*

**Die Elemente der sphärischen Astronomie und der mathematischen Geographie,** nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbststudium bearbeitet von Prof. Dr. Ehr. Schmehl. Verlag v. Emil Roth in Gießen, brosch. 1·60 M., geb. 2 M. 108 pag.

Das vorliegende Werk hat den Zweck, eine systematische Sammlung aller Aufgaben zu bieten, welche in der sphärischen Astronomie und mathematischen Geographie vorkommen. Nach einem einleitenden ersten Abschnitte, in welchem ohne Ableitung die Formeln und Lehrsätze der sphärischen Trigonometrie in übersichtlicher Weise zusammengestellt sind, folgt im zweiten Abschnitte die Erklärung der Himmelskugel und ihrer scheinbaren Bewegung, der Sternzeit, der wahren und mittleren Sonnenzeit und der Parallaxe. Im dritten Abschnitte werden die Aufgaben behandelt, welche sich auf die Koordinatensysteme des Horizonts und des Äquators beziehen.

Der vierte, fünfte und sechste Abschnitt handelt von der Ekliptik und ihrem Verhältnisse zum Äquator, von der Sternzeit und den entsprechenden Aufgaben, der siebente und achte Abschnitt von jenen, die sich mit sphärischen Dreiecken auf der Erdoberfläche beschäftigen.

In jedem Abschnitte sind die Aufgaben nach der Form der sphärischen Dreiecke geordnet; die Fundamentalaufgaben werden theoretisch, so wie an der Hand von Beispielen behandelt. Hierauf folgt eine Sammlung von Aufgaben derselben Gattung, deren Lösung dem Leser überlassen bleibt. Die Resultate sind beigefügt.

Zum Schlusse wird die Theorie der Sonnenuhren kurz behandelt. Daß der Verfasser bei vertikalen Sonnenuhren nur solche behandelt, deren Ebene in der Ost-Westrichtung liegt, beeinträchtigt etwas die sonst überall gewahrte Vollständigkeit. Übrigens zeigt jede richtig konstruierte Sonnenuhr das ganze Jahr hindurch vollständig richtig die wahre Zeit, nicht nur an den Tagen des Äquinoktiums; die mittlere Zeit zeigt sie allerdings nur dann, wenn die Zeitgleichung gleich Null ist. Dies findet viermal im Jahre statt. Das Buch bildet in seiner Vollständigkeit ein sehr wertvolles Kompendium und dürfte sich sowohl zum Gebrauche an Lehranstalten als zum Selbststudium vortrefflich eignen.

*Dr. A. Prey.*

**Lehrbuch der praktischen Geometrie,** bearbeitet für den Unterricht an den Hoch- und Tiefbauabteilungen der Baugewerkschulen und technischen Mittelschulen, sowie für den Gebrauch in der Praxis von Dr. M. Doll und S. Nestle. (Mit 145 Figuren im Text.) Zweite, erweiterte und umgearbeitete Auflage. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1905. 164 pag.

Das Buch behandelt zunächst die bei der Horizontalaufnahme vorkommenden Methoden, die Einrichtung und den Gebrauch des Theodoliten, das Nivellieren und die dabei angewendeten Instrumente. Dies füllt die ersten

Digitized by Google

beiden Abschnitte und die erste Hälfte des dritten. Der übrige Teil des 3. Abschnittes ist der Besprechung der Nivellementarbeiten: der Bestimmung des Höhenunterschiedes, der Aufnahme von Quer- und Längenprofilen und dem Flächennivellement gewidmet. Der 4. Abschnitt befaßt sich mit dem Abstecken von Kreisbogen. Es werden die verschiedenen Methoden zur Bestimmung von Haupt- und Zwischenpunkten sowie zur Herstellung des Übergangsbogens bei Eisenbahnen dargelegt. Hierauf wird die Ausrundung des Neigungswechsels bei Eisenbahnen und Straßen besprochen.

Der letzte Abschnitt handelt von der Herstellung von Lattenprofilen und Schnurgerüsten.

Der Hauptwert des Buches liegt in den letzten drei Abschnitten, welche außer der Entwicklung der Methoden und ihrer geometrischen Begründung auch eine große Anzahl trefflicher Winke für den Praktiker enthalten. Besonders hervorheben möchte ich noch die schöne und leichtfaßliche Darstellung.

*Dr. A. Prey.*

**Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen** von L. Krüger. (Veröffentlichung des königl. preußischen Instituts, Neue Folge, Nr. 18.) Potsdam, 1905. 24 pag.

Der Verfasser entwickelt die Verallgemeinerung eines Gaußschen Gedankens. Die Bedingungsgleichungen für die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes bilden zwei Gruppen: Winkelgleichungen und Seitengleichungen, die zusammen aufgelöst werden sollen. Es wird nun gezeigt, daß sich die Seitengleichungen derart umformen lassen, daß die Verbesserungen, welche mit Rücksicht auf sämtliche Bedingungsgleichungen gewonnen werden, in zwei Teile zerfallen. Der erste Teil wird durch Auflösung der Winkelgleichungen allein gewonnen, der zweite durch Auflösung der umgeformten Seitengleichungen. Die Anwendbarkeit des Verfahrens zeigt der Verfasser an dem Gaußschen Fünfeck. Vergleichsweise wird auch das Gaußsche Verfahren sowie das Verfahren der abwechselnden Ausgleichung nach Winkel- und Seitengleichungen dargelegt.

Es zeigt sich, daß das neue Verfahren dann von Vorteil ist, wenn die Zahl der Seitengleichungen nicht größer ist, als die Zahl der Wiederholungen, die man bei abwechselndem Ausgleich vorzunehmen hat, also etwa bei 2—3 Seitengleichungen. Ist die Zahl der Seitengleichungen groß, so verschwindet der Vorteil. Das Verfahren bleibt also auf kleine Figuren beschränkt.

Der abwechselnde Ausgleich ist in der Praxis nicht zu empfehlen.

*Dr. A. Prey.*

**O. Bolza. Lectures on the calculus of variations** (Chicago. The unversity of Chicago Press, 1904).

Schon im Berichte über Knesers „Lehrbuch der Variationsrechnung“ wurde der mächtigen Wirkung gedacht, welche Weierstraß' an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesungen über diesen Gegenstand auf dessen Entwicklung übten. Sie unterwarfen nicht nur die älteren, früher allgemein geteilten Anschauungen einer scharfen Kritik, überall in die oft sehr verworrenen Begriffe Klarheit verbreitend und Strenge in die Beweise einführend, sondern brachen auch weiteren Untersuchungen neue Bahnen. Diese Bahnen wurden auch alsbald [illegible] dem die Vorlesungen, die bedauerlicherweise bis

Digitized by Google

heute nicht gedruckt sind, über den ursprünglichen Hörerkreis hinaus durch Abschriften zur Kenntnis des mathematischen Publikums gelangt waren. Auf diese Weise entstand eine große Reihe von Forschungen, die wenigstens den einfachsten Problemen der Variationsrechnung einen Abschluß gaben und ihre dem Stande der Forschung entsprechende Darstellung sehr wünschenswert erscheinen ließen. Diesem Bedürfnisse entsprangen Bolzas Lectures, deren Inhalt und Behandlungsweise am besten aus einer kurzen Inhaltsangabe ersichtlich werden dürfte. Die drei ersten Kapitel sind der Bestimmung des Extremums des Integrals $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$ gewidmet, wo also die Ordinate des gesuchten Kurvenstückes für seinen ganzen Verlauf als eindeutige Funktion der Abszisse vorausgesetzt wird. Im ersten Kapitel wird zunächst die Differentialgleichung der ersten Variation abgeleitet, und zwar nach dem Vorgange Dubois, ohne die Existenz von $y''$ schon im vorhinein anzunehmen; sodann werden die diskontinuierlichen Lösungen untersucht und Weierstraß' $E$-Funktion aufgestellt. Das zweite Kapitel befaßt sich mit der Legendreschen Transformation der zweiten Variation, der Jacobischen hiezugehörigen linearen Differentialgleichung, der Theorie der konjugierten Punkte und der Jacobischen notwendige Bedingung für das Eintreten eines Extremums. Im dritten Kapitel werden die hinreichenden Bedingungen entwickelt, zunächst für ein, wie es jetzt zumeist genannt wird, schwaches Extremum, obwohl der von Dubois hiefür gebrauchte Ausdruck, partielles Extremum, bezeichnender wäre. An einem Beispiele, das weit einfacher als das zu demselben Zwecke von Weierstraß verwendete Newtonsche Problem ist, wird sodann gezeigt, daß das Zutreffen der für ein partielles Extremum erhaltenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen, noch nicht den Schluß auf ein allgemeines sogenanntes starkes Extremum gestatten, sondern einer Ergänzung bedürfen. Zu dem Behufe wird der Begriff des Feldes, den wir Weierstraß verdanken, samt dessen $E$-Funktion herangezogen und gezeigt, daß sie die gewünschte Vervollständigung bieten. Zum Schlusse des Kapitels wird noch der Fall beweglicher Endpunkte erörtert.

Im nächsten, vierten Kapitel wird die frühere Einschränkung, daß im ganzen gesuchten Kurvenstücke die Ordinate eindeutige Funktion der Abszisse sei, fallen gelassen. Es werden nun beide Koordinaten als eindeutige Funktionen eines Parameters $t$ aufgefaßt, wodurch man nach dem Vorgange Weierstraß' zur Behandlung des Integrals $\int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\, dt$ gelangt. Für dieses werden nunmehr dieselben Fragen gelöst, die in den drei früheren Kapiteln für einfacheren Fall erledigt werden, das fünfte Kapitel bringt die mehr geometrische Herleitung, die Kneser der Weierstraßschen Theorie gab.

Vom größten Interesse ist das letzte sechste Kapitel, das wieder an eine Bemerkung Weierstraß' anknüpft. In seinen Vorlesungen hatte er darauf hingewiesen, daß der gewöhnliche Begriff des bestimmten Integrals für die Probleme der Variationsrechnung ein zu enger sei, wie schon das Integral für den Kurvenbogen zeigt, das $x$ und $y$ nicht bloß als stetige, sondern auch differenzierbare Funktionen postuliert und eine Erweiterung dieses Begriffes vorgenommen. Mit diesem erweiterten Integralbegriffe, den Osgood in Cambridge Mass. genauer untersuchte, lassen sich nun verschiedene Theorien, die Hilbert

Digitized by Google

in seinen Vorlesungen über Variationsrechnung in Göttingen vortrug und die darauf abzielen, seine allgemeine Behauptung zu erhärten. „Eine jede Aufgabe der Variationsrechnung besitzt eine Lösung, sobald hinsichtlich der Natur der gegebenen Grenzbedingungen geeignete Annahmen erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäße Erweiterung erfährt."

Die Darstellung ist nach allen Richtungen aufs sorgfältigste durchgeführt, überall ungemein klar und präzis, durchwegs äußerst ansprechend und mit vielen trefflichen Beispielen durchflochten. Das Buch verdient aufs wärmste allen empfohlen zu werden, die sich um die Variationsrechnung interessieren. Sie werden aus demselben eben so viel Nutzen als Genuß schöpfen.

*G. v. E.*

**Vorlesungen über photographische Optik** von Dr. Alexander Gleichen, Regierungsrat und Privatdozent. IX. 230 Seiten. Leipzig, Göschensche Verlagshandlung, 1905.

Diese Darstellung der photographischen Optik ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Verfasser im Wintersemester 1902/03 an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg gehalten hat. In den 14 Kapiteln wird behandelt: Die physikalischen und geometrischen Grundlagen der Bilderzeugung; die Bilderzeugung durch zentrierte Kugelflächen im paraxialen Gebiete; die Strahlenbegrenzung, die Achromasie, das Seidelsche Gebiet und die Petzvalbedingung; die Wellenfläche und die Hamiltonsche Funktion; Bedingung für die Aberrationsfreiheit von Punktepaaren bei endlichem Strahlengange, der Astigmatismus, die natürliche Blende und die Abbildung durch Fundamentalstrahlen; Orthoskopie und Helligkeit; die symmetrischen Objektive; geometrische Konstruktion gebrochener Strahlen und Strahlenbündel; historische Notizen und Konstruktionsdaten einiger Objektive; die Technik der Durchrechnung. Allen, die sich für geometrische Optik im allgemeinen und die Theorie der photographischen Objektive im besonderen interessieren, wird die klare, alles Wesentliche enthaltende Darstellung des Gegenstandes sehr willkommen sein.

*K. Prz.*

**Elementares Lehrbuch der Physik, nach den neuesten Anschauungen für höhere Schulen und zum Selbstunterricht,** von Ludwig Dressel S. J. Dritte, vermehrte und umgearbeitete Auflage. XV. 1063 Seiten. Freiburg i. B. Herdersche Verlagsbuchhandlung, 1905.

Dieses, in jeder Hinsicht empfehlenswerte Buch gibt eine durchaus moderne Darstellung der physikalischen Tatsachen und Anschauungen und berücksichtigt auch in ausgiebiger Weise die benachbarten Gebiete, wie Meteorologie, physikalische Chemie etc. Höhere Mathematik wird, dem Zwecke des elementaren Lehrbuches entsprechend, nicht verwendet. Wo ein Differentialquotient vorkommt, wie bei der elektromagnetischen Induktion, wird sein Wert auf einfache Weise abgeleitet. Der Verfasser war bemüht, überall das Neueste zu berücksichtigen. Die Kapitel über Ionen und Elektronen, Radioaktivität etc. werden, wenn sie auch nur eine vorläufige Übersicht geben können, sicher allen willkommen sein. Auch unter den praktischen Anwendungen werden die letzten technischen Errungenschaften besprochen; ein eigenes ausführliches Kapitel ist

Digitized by Google

der Funkentelegraphie gewidmet. Überhaupt ist Reichhaltigkeit des Stoffes ohne Beeinträchtigung der Klarheit der Darstellung ein hervorstechendes Merkmal des Buches. Die Figuren sind einfach und übersichtlich gehalten und man vermißt mit Vergnügen die altertümlichen Abbildungen von Apparaten etc., die oft solche Werke verunzieren. *K. Prz.*

**Die natürliche Entwicklung der Materie im Weltraum und die daraus hervorgehenden Weltgesetze.** 24 Seiten Leipzig, Teubner, 1904.

Wieder einer jener allzu vielen Versuche, auf Grund einiger nach Belieben gewählter physikalischer Sätze die Welt zu erklären. *K. Prz.*

**Festschrift Adolf Wüllner** gewidmet zum siebzigsten Geburtstage 13. Juni 1905 von der königl. Technischen Hochschule zu Aachen ihren früheren und jetzigen Mitgliedern. Mit dem Bildnis A. Wüllners in Heliogravüre, 8 Tafeln und 91 Figuren im Text, 264 S. Leipzig, B. G. Teubner 1905.

Als Mitarbeiter fungieren: W. Borchers, Aussichten auf Vereinfachung des Kupferhüttenbetriebes; J. Bredt, Studie über die räumliche Konfiguration des Kampfers und einige seiner wichtigsten Derivate; A. Hagenbach, Über Bandenspektra; L. Heffter, Über Anordnung und Aufbau der Geometrie; A. Hertwig, Beziehungen zwischen Symmetrie und Determinanten in einigen Aufgaben der Fachwerktheorie; W. Hinrichsen und T. Watanabe, Über die Abscheidung von Silber aus Schwefelsilber bei Gegenwart von Quecksilber; K. R. Koch, Eine optische Methode zur direkten Messung des Mitschwingens bei Pendelbeobachtungen; H. v. Mangoldt, Über eine Lücke der Elektronentheorie; R. Schuhmann, Potenzreihenentwicklung und Methode der kleinsten Quadrate; F. Schur, Über die Zusammensetzung von Geschwindigkeiten; A. Sommerfeld, Lissajous-Figuren und Resonanzwirkungen bei schwingenden Schraubenfedern, ihre Verwertung zur Bestimmung des Poissonschen Verhältnisses; M. Wien, Ein Bedenken gegen die Helmholtzsche Resonanztheorie des Hörens; W. Wien, Über die Energie der Kathodenstrahlen im Verhältnis zur Energie der Röntgen- und Sekundärstrahlen; A. Winkelmann. Über die Diffusion naszierenden Wasserstoffes durch Eisen; F. Wüst, Beitrag zur Kenntnis der Eisenkohlenstofflegierungen höheren Kohlenstoffgehaltes.

Der vielseitige Inhalt wird nicht nur dem Jubilar zur Freude gereicht haben, vielmehr das Buch von niemand der auf vollständige Literaturkenntnis Bedacht nimmt, übersehen werden dürfen. *St. M.*

**Lehrbuch der praktischen Physik** von Friedrich Kohlrausch. Zehnte, vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. 656 S. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1905.

Es muß fast Wunder nehmen, daß das vortreffliche Buch, das kein Physiker entbehren kann, noch verbesserungsfähig ist, trotzdem hat der Verfasser es abermals verstanden, den Benützern desselben eine Freude zu machen, indem neben anderweitigen kleinen zeitgemäßen Veränderungen in den Zahlentabellen einige praktische Ergänzungen und eine Tafel mit den für den Alltagsgebrauch des Physikers wichtigsten Formeln eingefügt wurde. Auch für diese 10. Auflage ist also Verfasser und Herausgeber wieder besonders zu danken. *St. M.*

Digitized by Google

**Sammlung Schubert XXXVIII. Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung** von E. Grimsehl, Prof. an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst in Hamburg. 1. Band. Mit 74 Fig., 219 S. Leipzig, G. J. Göschen, 1905. Preis M. 6.—.

Der vorliegende Band behandelt die allgemeinen Grundlagen der Potentialtheorie und deren Anwendungen auf Probleme der Gravitation und Elektrostatik. Die Art der Darstellung ist ungezwungen und anschaulich und das Buch somit zweifellos ein trefflicher Lehr- und Studienbehelf. Es ist auch anzuerkennen, daß die neueren Anschauungen über die atmosphärische Elektrizität wenigstens andeutungsweise am Schlusse des Bandes Platz gefunden haben.

*St. M.*

**H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie.** III. Bd. M. 38.—, geb. M. 40.—. Leipzig, 1905.

Seine ursprüngliche Absicht im dritten Bande seines Handbuches das ganze die Absorptionserscheinungen betreffende Material zusammenzustellen, konnte der Verfasser nicht durchführen und sah sich genötigt, den ganzen Stoff auf zwei Bände zu verteilen, deren erster vorliegt. Das erste der fünf Kapitel bespricht die Apparate und Methoden zur Untersuchung der Absorption. Im zweiten wird der Einfluß des Lösungsmittels, der Temperatur, der Konzentration bei wäßrigen Lösungen auf die Absorptionsspektren, Einfluß der Dichte und Temperatur bei Gasen, der Dichroismus der Kristalle, der Zusammenhang zwischen Färbung der Salze und ihrem Atomgewicht behandelt.

Das dritte Kapitel ist von Prof. W. N. Hartley in Dublin verfaßt und bezieht sich auf den Zusammenhang zwischen Absorption und Konstitution organischer Stoffe.

Vielleicht der dankenswerteste Teil des ganzen Bandes ist das 4. Kapitel, das eine Aufzählung und Beschreibung sämtlicher Absorptionsspektren der anorganischen und künstlichen organischen Stoffe umfaßt; gerade hier macht sich das Prinzip des Verfassers überall Kritik anzulegen im Sichten des Wustes an Beobachtungsmaterial wohltätig bemerkbar. Den Schluß des Bandes bildet ein alphabetisches Verzeichnis sämtlicher Absorptionsspektren für das jeder Benutzer des Werkes dem Verfasser Dank wissen wird.

Die Absorptionserscheinungen der natürlichen organischen Farbstoffe aus dem Pflanzen- und Tierreich, Dispersion, Fluoreszenz und Plusphoreszenz sind dem nächsten Bande vorbehalten.

*Bdf.*

**Theoretische Physik** von Dr. G. Jäger, Nr. 76, 77, 78 der Sammlung Göschen, Leipzig, 1905.

Das Werkchen, das nun mehr in dritter verbesserter Auflage erschienen ist, bedarf wohl heute keiner empfehlenden Worte mehr. So sehr hat es sich in die Kreise unserer Studenten bereits Eingang zu verschaffen gewußt, daß wohl kaum ein Physiker heute zum Rigorosum oder zur Lehramtsprüfung schreitet, der sein Wissen in der theoretischen Physik nicht aus den genannten Bändchen abgerundet und vervollständigt hätte. Ja es soll sogar angehenden Privatdozenten, denen in letzter Stunde vor dem Colloquium bange Zweifel ob des Umfanges und der Vollständigkeit ihrer Kenntnisse aufstiegen, gute Dienste geleistet haben. Der Plan eines auf so engem Raume beschränkten

Digitized by Google

Werkes bringt es natürlich mit sich, daß Resultate, die nur mittels längerer Ableitungen gewonnen werden können, vielfach unter teilweisen oder vollständigem Verzicht auf die Herleitung gegeben werden müssen, ein Umstand, den gerade der junge Student meist unbefriedigend empfindet. Wäre es da nicht doch vielleicht möglich, wenigstens auf dem Gebiete, das am meisten darunter leidet, nämlich in der Gastheorie, ein wenig Abhilfe zu schaffen? So ließe sich z. B. der wichtige Satz von der Gleichheit der lebendigen Kraft der Moleküle bei gleicher Temperatur wohl ziemlich einfach beweisen; auch das Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz würde einen Platz in dem Büchlein verdienen, etwa unter Beibehaltung des ursprünglichen kurzen Maxwellschen Beweises. Ist derselbe auch mangelhaft, so wird das den angehenden theoretischen Physiker wenig stören und ein Hinweis auf die Mängel des Beweises vielleicht manchen zu tieferem Eingehen in das Studium der statistischen Mechanik reizen.

Doch wollen wir wegen dieser, zum Teil nicht zu umgehenden Schwierigkeiten nicht mit dem Verfasser rechten, vielmehr ihm, der ja beim Ausbau der Gastheorie selber so vielseitig tätig war, allfällige Vervollständigungen vertrauensvoll überlassen und uns der drei Bändchen auch weiterhin freuen. *J. N.*

**Leçons de mécanique élémentaire** par P. Appell et J. Chappuis. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Das Buch, für die oberen Klassen der Mittelschulen als Lehrbuch bestimmt, weist die traditionellen Vorzüge der französischen Lehrbücher auf und bemüht sich einen Übergang zur hochschulmäßigen Behandlung der Mechanik zu bilden. Auch die technische Seite der Probleme wird entsprechend gewürdigt und das erste Kapitel ist eigentlich eine kurzgefaßte technische Mechanik. Die übrigen Kapitel behandeln dann: das Gleichgewicht eines freien und unfreien Punktes, die Statik fester freier und unfreier Körper, die einfachen Maschinen und endlich die Dynamik. An jedes Kapitel schließen sich einige Übungsaufgaben nebst ihren Lösungen an. Die Behandlung der Probleme ist im allgemeinen elementar, schreckt aber doch nicht davor zurück dort, wo es die Klarheit und Präzision der Darstellung fordert, Differentialquotienten einzuführen, die am Begriffe der Geschwindigkeit erläutert werden. Ein Vorgehen, das gewiß nur zu billigen und dem mehr oder minder verstecktem Einschmuggeln des Differentialquotienten, wie es in den Oberklassen unserer Mittelschulen Brauch, entschieden vorzuziehen ist.

Wenn das Buch nun auch allzuweit über die Grenzen unseres Mittelschullehrstoffes hinausgeht, um ein Lehrbuch für die Schüler zu bilden, so kann es doch dem angehenden Mittelschullehrer nicht genug empfohlen werden; er wird viel Anregendes darin finden. *J. N.*

**Elemente der Vektoranalysis.** Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. Von Dr. A. H. Bucherer. 2. Auflage, 103 S. Leipzig, B. G. Teubner, 1905.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten (siehe Monatsh. XV, S. 51) wesentlich nur durch Veränderungen der Bezeichnungsweise, indem im großen und danzen diejenigen der Enzyklopädie angenommen wurde und nur in wohlbegründeten Fällen andere Buchstaben verwendet werden. Das rasche Erscheinen der zweiten Auflage spricht für sich selbst. *St. M.*

Digitized by Google

**The theory of determinants and their applications** by Robert Forsyth Scott, M. A. Second edition, revised by G. B. Mathews, M. A., F. R. S. Cambridge, at the university press 1904. 8°. XI. 288 S. Preis 9 sh.

Das vorliegende Handbuch der Determinantentheorie gibt eine sehr erschöpfende Darstellung dieses Zweiges der Algebra. Zur Ableitung der fundamentalen Eigenschaften der Determinanten wird von den „alternierenden" Zahlen Graßmanns Gebrauch gemacht; es werden n Einheiten $e_1, e_2, \ldots e_n$ mit den Eigenschaften $e_i e_k = -e_k e_i$, $e_i^2 = 0$, $e_1 e_2 \ldots e_n = 1$ angenommen und durch Multiplikation derselben mit „skalaren" Größen alternierende Zahlen der Form $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n = A$ gebildet, die dann gleichfalls den Gesetzen $AB = -BA$, $A^2 = 0$ genügen. Die Determinante n-ten Grades ergibt sich als ein Produkt vor $n$ alternierenden Zahlen: $\prod_{i=1}^{n} (a_{i_1} e_1 + a_{i_2} e_2 + \ldots + a_{in} e_n)$, eine Darstellung, aus welcher sich sehr einfache Beweise der fundamentalen Determinantentheoreme ergeben. Sodann geht der Verfasser über zur Theorie der Minoren und den verschiedenen Entwicklungen der Determinanten und beweist zunächst das Laplacesche Theorem samt wesentlichen Verallgemeinerungen sowie die Sätze über die Differentialquotienten der Determinanten. Es folgt ein Abschnitt über die Zusammensetzungen von rechteckigen Systemen und das Multiplikationstheorem; dann werden Determinanten komponierter Systeme behandelt, d. h. Determinanten, deren Elemente selbst wieder Determinanten sind und eine Reihe von Theoremen, von Sylvester, Netto, Kronecker mitgeteilt. Ein folgender kurzer Abschnitt ist den arithmetischen Eigenschaften der Determinanten gewidmet; er enthält die wichtigsten Sätze über die Elementarteiler. Unter den Determinanten spezieller Form werden namentlich die symmetrischen und schiefen Determinanten, Determinanten mit zyklisch angeordneten Elementen sowie diejenigen, deren Elemente Binomialkoeffizienten sind (mit denen sich besonders v. Zeipel beschäftigt hat) besprochen. Nicht besonders ausführlich werden die Determinanten höheren Ranges behandelt, obwohl sich gerade bei diesen die Graßmannsche Darstellungsweise sehr nützlich erweist. Schließlich werden noch die Determinanten unendlich hoher Ordnung besprochen und dann eine Reihe sehr wichtiger Anwendnungen der Determinantentheorie behandelt. Vor allem in ausführlicher Weise die Theorie der Gleichungen und der Elimination: das System linearer Gleichungen, die Theorie der Resultante und Diskriminante, das Bézoutsche Theorem und spezielle Eliminationsprobleme. In einem folgenden Abschnitte werden die Eigenschaften des Differenzenprodukts und allgemein solche Determinanten behandelt, deren Elemente rationale Funktionen sind. Eine recht eingehende Darstellung ist den Jacobischen und Hesseschen Determinanten gewidmet. Den Höhepunkt der theoretischen Untersuchungen des ganzen Buches bildet das Kapitel über die Anwendung der Determinanten auf bilineare und quadratische Formen; hier werden die formentheoretischen Untersuchungen Kroneckers und Frobenius' in sehr eleganter Weise dargestellt und dann die Darbouxschen Untersuchungen über die Reduktion quadratischer Formen in die Summe von Quadraten, sowie die gleichzeitige Reduktion zweier solcher Formen mitgeteilt und mit der Cayleyschen Theorie der orthogonalen Transformationen dieser interessante



Digitized by Google

Abschnitt abgeschlossen. Es folgen dann noch ein Kapitel über die Determinanten aus Funktionen derselben Variablen und deren Anwendungen auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen und eines über die Anwendungen auf die Theorie der Kettenbrüche. Endlich werden auch einige geometrische Anwendungen der Determinantentheorie besprochen und mit einer Sammlung sehr hübscher Aufgaben das interessante Buch abgeschlossen. — Was in der vorliegenden zweiten Auflage des Scottschen Buches neu hinzugefügt ist, ist die Theorie der unendlichen Determinanten, die Theorie der bilinearen Formen und der Elementarteiler. Dagegen findet sich hier nicht mehr das Verzeichnis der Bücher und Abhandlungen aus der Determinantentheorie, da unterdessen die ausführliche Bibliographie Muirs über diesen Gegenstand erschienen ist. — Die vorstehende Skizze möge genügen, um von dem ungeheuer reichen Inhalte des Buches eine ungefähre Vorstellung zu geben. Mit dieser Reichhaltigkeit des gebotenen Stoffes verbindet das vorliegende Werk aber noch eine Reihe anderer Vorzüge, in erster Linie die knappe, aber dabei doch sehr klare Darstellung, die auch die schwierigeren Partien recht leicht verständlich macht. Immerhin setzt die reichliche Verwendung von Symbolen eine gewisse mathematische Bildung beim Leser voraus, so daß das Buch nicht gerade für Anfänger bestimmt ist; derjenige aber, der bereits über einige Vorkenntnisse verfügt, wird in dem Werke eine reiche Quelle von Belehrung und Anregung finden. *R. v. St.*

**Étude sur les quantités mathématiques, grandeurs dirigées, quaternions** par Claro Cornelio Dassen, docteur ès sciences mathématiques, ingénieur civil, lauréat et professeur de l'université de Buenos Aires. Paris, A. Hermann, 1903. 8° VI. + 135 S. Preis 5 Franken.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die Begriffe, die in der Theorie der Vektorgrößen eingeführt werden, einer eingehenden logischen Analyse zu unterwerfen. Der erste Teil des Buches ist dem Begriffe der Quantität (Größe) gewidmet. In diesem wird auseinandergesetzt, daß der mathematische Größenbegriff im wesentlichen aus der Erfahrung gewonnen sei und in zwei verschiedenen Formen erscheint: erstens der Anzahlbegriff (oder überhaupt der Begriff diskontinuirlicher Größen), der von einer Reihe solcher Objekte abstrahiert wird, die ihrer Natur noch nicht in Teile zerlegbar sind; zweitens der Begriff kontinuierlicher Größen abstrahiert von solchen Gegenständen der Erfahrung, die einer beliebigen Zerlegung in Teile fähig sind, derart, daß der Begriff der zu Grunde liegenden Einheit nicht von vornherein feststeht, sondern erst Gegenstand einer speziellen Festsetzung sein muß. Es werden nun für diese zwei Arten von Größen in der allgemein üblichen Weise die Rechnungsregeln hergeleitet, nach welchen dieselben miteinander kombiniert werden können. Die Mathematik bleibt aber bei diesem ursprünglichem Größenbegriff der positiven Größe nicht stehen, sondern nimmt verschiedene Verallgemeinerungen desselben vor. Was die Berechtigung derselben anlangt, steht der Verfasser auf dem Standpunkte, daß hiefür einzig und allein die praktische Verwendbarkeit der betreffenden Ver allgemeinerung ausschlaggebend ist, da sonst die Mathematik leicht zu einem nutzlosen Spiel mit Begriffen herabsinken könnte. Diese Verallgemeinerungen, insofern es sich um sogenannte „gerichtete" Größen handelt, werden im zweiten

Digitized by Google

Teile des Buches ausführlich besprochen. Vor allem die bloß nach zwei entgegengesetzten Richtungen (etwa auf einer Geraden) gerichteten Größen, die man als positive und negative bezeichnen kann. Nach der Meinung des Verfassers hätten negative Größen an sich, ohne Beziehung auf irgend welche zwei entgegengesetzte Richtungen, überhaupt keinen Sinn, wie denn der Verfasser überhaupt rein formalen Begriffsbildungen möglichst aus dem Wege gehen will. Dann werden die Richtungsgrößen einer Ebene behandelt, was wesentlich mit einer Theorie der Größen $a + bi$ zusammenfällt. Bei den bis jetzt besprochenen Größen konnten noch immer die gewöhnlichen Rechnungsregeln aufrecht erhalten bleiben; beim Übergang in den Raum ist dies nicht mehr möglich. Es wird dargetan, wie Hamilton im Jahre 1843 die Theorie der Vektoren im Raume durch Schaffung der sogenannten Quaternionen begründete, indem er bei der Multiplikation auf das Fortbestehen des kommutativen Gesetzes verzichtete. Es werden die Grundgesetze der Rechnung mit Quaternionen abgeleitet und dann noch die von Graßmann in seiner Ausdehnungslehre (1844) aufgestellten verwandten Begriffe kurz besprochen. In drei Anhängen werden ferner noch einige mit dem Begriffe der Vektorgrößen zusammenhängende Fragen behandelt: 1. Ob man die gesamte Analysis auf den Begriff der ganzen Zahl aufbauen kann (womit der Verfasser nicht ganz einverstanden ist). 2. Über den Begriff imaginärer Winkel. 3. Über den vierdimensionalen Raum und seine Beziehungen zur Theorie der Quaternionen. — Das Buch ist sehr klar geschrieben, setzt keine Vorkenntnisse voraus und ist als erste Einführung in die Theorie der Vektorgrößen recht warm zu empfehlen. Das Interesse der Lektüre wird erhöht durch die vom Verfasser mit großer Sorgfalt gesammelten historischen Daten über das erste Auftreten der einzelnen Begriffe und die hiefür verwendeten Zeichen. *R. v. St.*

**Elementare Algebra.** Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester von Dr. Eugen Netto, o. ö. Professor an der Universität Gießen. Mit 19 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner, 1904. 8°. VIII. 200 S.

Während die neuere mathematische Literatur verhältnismäßig viele streng wissenschaftliche Handbücher der Algebra aufweist, ist die Zahl der diesem Gegenstande gewidmeten elementaren Lehrbücher eigentlich recht gering. Das elementarste neuere Werk dürfte wohl das im Jahre 1903 erschienene Lehrbuch von G. Bauer: „Vorlesungen über Algebra“ sein. Das vorliegende Nettosche Werk verfolgt gleichfalls den Zweck, den Studierenden der ersten Semester beim Studium der Algebra als Leitfaden zu dienen. Es ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die in jedem Sommersemester an der Universität Gießen unter dem Titel: „Einleitung in die Algebra“ gehalten werden. Was den behandelten Stoff betrifft, so beschränkt sich das Buch im großen und ganzen auf die Theorie der Gleichungen der ersten vier Grade; doch wird keine Gelegenheit versäumt, um dem Studierenden von den gewonnenen speziellen Theoremen aus lehrreiche Einblicke in das Gebiet der Gleichungen höheren Grades zu bieten. Bei der Behandlung dieses Lehrstoffes wird mit großer Ausführlichkeit in viele Details desselben eingegangen, ohne daß dadurch die Darstellung etwa breit oder weitschweifig würde; im Gegenteil, kann man



Digitized by Google

die Art der gewählten Darstellung eher als knapp bezeichnen. Mit großem Geschick werden allgemeine Theoreme bereits in den allereinfachsten Spezialfällen aufgezeigt, um dadurch den Studierenden schrittweise zum Verständnis des allgemeinen Satzes zu führen; so wird beispielsweise die Ausdrückbarkeit der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung durch die Koeffizienten, bei den quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen jedesmal von neuem behandelt.

In vollkommener Allgemeinheit ist die Theorie der Determinanten und des Systems von n linearen Gleichungen, die Theorie der Einheitswurzeln, sowie am Schlusse des Werkes der Sturmsche Lehrsatz behandelt, wobei allerdings der Hilfssatz über die Wegschaffung vielfacher Wurzeln durch Division mit dem größten gemeinsamen Teile, den die Funktion mit ihrer Ableitung hat, bloß angeführt, aber nicht bewiesen wird. Ferner werden einige Gegenstände ziemlich ausführlich dargestellt, die nicht zur Algebra im engsten Sinne des Wortes gehören, aber doch mit algebraischen Untersuchungen in direktem Zusammenhange stehen; so gelegentlich der Theorie der linearen Gleichungen die Kettenbrüche und die Lösung der unbestimmten linearen Gleichungen; ein Anschluß an die Gleichuugen 2. Grades die Verwandlung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch und die Auflösung der Pellschen Gleichung; endlich ist ein größeres Kapitel der Kombinatorik und dem binomischen Satze gewidmet, in welchem auch die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und der Fermatsche Satz behandelt werden. Die Lösungsmethoden der Gleichungen 3. und 4. Grades werden besonders eingehend besprochen. Bei den kubischen Gleichungen werden drei wesentlich verschiedene Methoden (wozu noch die trigonometrische des Casus irreducibilis kommt), bei den biquadratischen Gleichungen sogar vier verschiedene Methoden mitgeteilt. Wiederholt macht der Verfasser Gebrauch von dem Begriff der Ableitung einer ganzen Funktion, den er zwar nicht sehr streng, aber vollständig klar und dem Verständnis des Anfängers angepaßt, einführt; in erster Reihe bei den Untersuchungen über mehrfache Wurzeln und die Diskriminante. Über das elementare Gebiet ragt auch nach der gegen den Schluß zu eingeführte Invariantenbegriff hinaus, der speziell an dem anharmonischen Verhältnis von vier Größen illustriert wird. Bei dem geringen Umfange des Werkes ist der im vorstehenden kurz skizzierte Inhalt jedenfalls als ein sehr reicher zu betrachten. Daß die Darstellung, trotzdem sie eine ziemlich gedrängte ist, sich demnach durch einen hohen Grad von Klarheit und besonders leichte Verständlichkeit auszeichnet, beweist von neuem die seltene Meisterschaft des Verfassers, der mit dem vorliegenden Werke der studierenden Jugend ein wertvolles Geschenk gemacht hat. Möge dasselbe dankbar entgegengenommen und recht eifrig benützt werden. *R. v. St.*

**Geschichte der Mathematik** von Ambros Sturm, Professor am k. k. Gymnasium in Seitenstetten. Mit 7 Figuren. Leipzig, G. J. Göschen, 1904. 8°. (Sammlung Göschen.) 152 S. Preis 80 Pf.

Prof. A. Sturm, der sich bereits durch eingehende Spezialforschungen auf historisch-mathematischem Gebiete, so namentlich durch seine Untersuchungen über das delische Problem, bleibende Verdienste erworben hat, unternimmt es nun in diesem kleinen, in der Göschenschen Sammlung

Digitized by Google

erschienenen Büchlein die wichtigsten Phasen der Geschichte der Mathematik, auf einem möglichst kleinen Raume zusammengedrängt, zur Darstellung zu bringen. Auf wissenschaftlichen Wert will und kann die vorliegende Arbeit natürlich gar keinen Anspruch machen; sie mag aber immerhin jenen, die nicht Gelegenheit haben, eines der großen mathematischen Geschichtswerke zur Hand zu nehmen, zu einer ersten flüchtigen Orientierung ganz gute Dienste leisten. Übrigens muß man staunen, wie viele Tatsachen der Verfasser auf diesen wenigen kleinen Oktavseiten (doch dazu bei Verwenoung eines ziemlich großen Druckes) unterzubringen wußte. Das Büchlein umfaßt Altertum, Mittelalter und die Neuzeit bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Um von der reichen Gliederung, die die mathematische Forschung im 19. Jahrhundert erfuhr, ein Bild zu geben, ist am Schlusse das Inhaltsverzeichnis der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften" kurz wiedergegeben.

*R. v. St*

**Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften** mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVIII. Heft. Mit 34 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner, 1904. 8°. 196 S.

Mit dem vorliegenden Hefte erfährt diese wertvolle Serie von Beiträgen zur historisch-mathematischen Forschung wieder eine wesentliche Bereicherung. Das Heft enthält drei Abhandlungen, deren Inhalt in aller Kürze hier skizziert werden soll. I. Mathematisches zu Aristoteles. Von J. L. Heiberg. (Mit 30 Figuren im Text.) Durch eine Reihe von Schlüssen kommt man zu der Annahme, daß der Mathematiker Theudios, der ein zu seiner Zeit ziemlich verbreitetes geometrisches Lehrbuch verfaßte, als unmittelbarer Vorgänger Euklids zu betrachten ist; es ist deshalb von großem Interesse, einiges über dieser Lehrbuch des Theudios zu erfahren. Heiberg entschloß sich nun zu der mühsamen Arbeit, die Schriften des Aristoteles in dieser Hinsicht zu untersuchen, von der Annahme ausgehend, daß dasjenige, was Aristoteles von der elementaren Mathematik als bekannt voraussetzt, einem seinen Zuhörern geläufigen Lehrbuche entnommen sein mußte, das nach den Zeitverhältnissen nur das Werk des Theudios sein konnte. II. Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Von Konrad H. Müller aus Göttingen. In der Einleitung: „Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik" wird hervorgehoben, daß die bisherigen Monographien auf mathematisch-historischem Gebiete sich fast ausschließlich mit der sogenannten produktiven Mathematik befassen, während es nun auch nötig wird, die angewandte Mathematik in die historische Betrachtung hineinzuziehen. Außerdem sollen auch noch die Grenzgebiete zwischen Mathematik und Philosophie, die Organisation der wissenschaftlichen mathematischen Arbeit und der mathematische Unterricht Gegenstand historischer Forschung werden. Schließlich hat sich der Historiker der Mathematik die allgemeine Frage vorzulegen: Was bedeutet und was hat zu den verschiedenen Zeiten die Mathematik für die Kultur bedeutet? Von dem Gedanken ausgehend, daß infolge der eigenartigen Stellung der Universitäten im deutschen Geistesleben die Universität in ihrer Art die gesamte Kultur widerspiegelt, reicht es vielleicht

Digitized by Google

hin, eine bestimmte Universität auszuwählen und über einen bestimmten Zeitraum zu verfolgen, um, wie der Verfasser sich ausdrückt, „ein richtiges Bild von dem Leben und Wirken des Organismus Mathematik“ zu bekommen. Als ein solches Beispiel wählt der Verfasser die Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Die eigentliche Arbeit zerfällt in folgende vier Kapitel. 1. Die Universitäten des Rationalismus Halle und Göttingen und die Mathematik des Rationalismus. 2. Die Mathematik des Rationalismus in Göttingen (J. A. Segner und J. F. Penther). 3. Die Mathematik der Aufklärung in Göttingen (A. G. Kästner und A. L. Fr. Meister). 4. Die Mathematik des Neuhumanismus in Göttingen (A. G. Kästner, C. F. Seyffer etc.). Von jedem einzelnen dieser Gelehrten wird nun in der ausführlichsten Weise der Lebensgang, die wissenschaftlichen Arbeiten, die Unterrichtstätigkeit und die organisatorische Tätigkeit geschildert, alles dies auf Grund eingehenden Studiums des vorhandenen Aktenmaterials. III. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, seine Beweise und die Unmöglichkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffes „Gleichgewicht eines Massensystems“. Von Richard Lindt in Charlottenburg. (Mit 4 Figuren im Text.) In einer Einleitung werden zunächst die in der Überschrift stehenden Worte genau erläutert. Unter Prinzip sollte man strenggenommen nur einen Satz verstehen, der überhaupt keines Beweises fähig ist. Das P. d. v. G. bedarf aber eines Beweises, nämlich dann, wenn irgend ein anderes Prinzip als Grundlage der Mechanik angesehen wird. Es werden nun der Reihe nach die im Laufe der Zeit für das P. d. v. G. gegebenen Beweise sehr eingehend besprochen und dann die Frage der Umkehrbarkeit des Prinzips behandelt. Der Verfasser zeigt an Beispielen, daß das P. d. v. G. in der gewöhnlichen Fassung nicht umkehrbar ist, sondern nur dann, wenn man nicht vom Gleichgewicht eines Massensystems“, sondern vom „Gleichgewicht eines Kräftesystems an einem Massensystem“ spricht. Hier befindet sich der Verfasser in Übereinstimmung mit Föppl, dessen „Technische Mechanik“ in der Zeit zwischen der Abfassung und der Drucklegung der vorliegenden Arbeit erschienen ist. In diesem Werke scheidet Föppl gleichfalls scharf die Begriffe „Gleichgewicht eines Kräftesystems“ und „Gleichgewicht eines Massensystems“. Nach einer kurzen Darlegung, welche Allgemeinheit das P. d. v. G. zu verschiedenen Zeiten besaß und welche ihm etwa in der Zukunft beschieden sein könnte, wird die Arbeit mit einigen Beispielen für die Anwendungen des Prinzips auf Statik, Dynamik und die Fachwerkstheorie abgeschlossen. *R. v. St.*

**Einführung in die Vektoranalysis** mit Anwendungen auf die mathematische Physik von Dr. Richard Gans. Mit 31 Textfig., 98 S. B. G. Teubner, Leipzig, 1905.

„Da durch die Entwicklung der Elektrodynamik für bewegte Körper und der Elektronentheorie immer mehr Anforderungen an den Leser gestellt werden, was die Beherrschung der vektoranalytischen Methoden anbetrifft, schien es dem Verfasser angebracht, ein Buch zu schreiben, welches gerade auf die Bedürfnisse dieser Wissenszweige zugeschnitten wäre.“ Es ist zu hoffen, daß dieses klar geschriebene Büchlein beitragen werde, die noch immer vorhandene Scheu vor der Vektorrechnung zu überwinden. Auf die Bezeichnungs-

Digitized by Google

weise kommt es naturgemäß weniger an und man muß dem Verfasser unbedingt zustimmen, wenn er sagt: „Solange man sich nicht die Vektoroperationen ihrem Wesen nach vorstellt, so lange man nicht mit Vektoren rechnet, ist die Bezeichnungsweise keinen Pfennig wert.“ Das Buch behandelt die elementaren Operationen der Vektoranalysis, die Differentialoperationen und Integralsätze der Vektoranalysis; krummlinige Koordinaten, Vektorzerlegungen, mechanische Deformationen, sowie Anwendungen aus der Hydrodynamik und aus der Elektrodynamik. *St. M.*

**Theorie der Elektrizität.** Zweiter Band: **Elektromagnetische Theorie der Strahlung** von Dr. M. Abraham. Mit 5 Textfig., 404 S. 8°. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1905.

Über den ersten Band dieses Werkes wurde XVI., S. 68, berichtet. Im vorliegenden Buche werden die „Konvektionsstrahlung“ und die „Wellenstrahlung“ behandelt. Der erste Abschnitt: Das Feld und die Bewegung der einzelnen Elektronen führt zunächst die Tatsachen auf, welche die Annahme einer atomistischen Struktur der Elektrizität nahelegen. Auch werden die allgemeinen Lösungen der Grundgleichungen mit Hilfe der elektromagnetischen Potentiale gegeben. Es folgt die Thorie der Wellenstrahlung einer bewegten Punktladung und die Mechanik der Elektronen, wobei an der Annahme eines starren kugelförmigen Elektrons festgehalten wird.

Der zweite Abschnitt: Elektromagnetische Vorgänge in wägbaren Körpern enthält die Hauptgleichungen für ruhende (Maxwell) und bewegte Körper (Lorentz). Es werden hier auch einige Probleme behandelt, die mit der atomistischen Hypothese nur lose zusammenhängen. Auch die drahtlose Telegraphie und die Antennentheorie haben Platz gefunden. Spezielles Interesse widmet der Verf. dem Problem der Reflexion des Lichtes an einem bewegten Spiegel. Die Lösung ist innigst mit dem thermodynamischen Gesetz der strahlenden Wärme verknüpft. Auch auf die Schwierigkeiten, die der Elektronentheorie aus dem Mangel eines nachweisbaren Einflusses der Erdbewegung auf das Licht irdischer Lichtquellen erwachsen, ist hingewiesen. Das Werk, das einen Rückblick auf den gegenwärtigen Stand der Forschung geben soll, wird nicht verfehlen, wesentlich zur Klärung der Begriffe beizutragen.

*St. M.*

**Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1906.** Paris, Gauthier-Villars. 16°, 900 pag., 1 Frcs. 50.

Das neue Jahrbuch enthält nach dem neuen Plan außer dem astronomischen Teil vorwiegend physikalische und chemische Daten, dagegen sind die Angaben aus Geographie und Statistik für 1907 zurückgestellt, so daß von nun an diese Gebiete abwechselnd im Annuaire zur Geltung kommen sollen. Im astronomischen Teil sind die barometrische Höhenbestimmung, die Fixsternparallaxen, die Eigenbewegung und die Spektroskopie unterdrückt, dafür aber sind die Elemente der kleineren Planeten vollständig aufgenommen. Auch das Verzeichnis der veränderlichen Sterne ist kompliziert. Im chemischen Teil sind die thermochemischen Angaben wieder publiziert, welche seit einiger Zeit zurückgestellt werden mußten.

Digitized by Google

Beigegeben sind drei Aufsätze über Sonnenfinsternisse, und zwar zwei von G. Bigourdau, von denen der erste über die Beobachtungen, die man während einer Sonnenfinsternis machen kann, unterrichtet, der zweite die totale Finsternis am 30. August 1905 behandelt. Der dritte von J. Janssen berichtet über die Beobachtungen dieser Finsternis in Spanien.

**Fr. Rogel, Das Rechnen mit Vorteil.** Leipzig, Bd. 9, Teubner, 1905, 38 S.

Eine kurze Zusammenstellung der bekannten Rechnungsvorteile bei Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division, Potenzieren und Radizieren mit vollständigen und unvollständigen Zahlen sowie Angaben von Proben.

**Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung** für weitere Kreise in Wort und Bild dargestellt von Paul La Cour und Jakob Appell. Autorisierte Übersetzung von G. Siebert, I. Band. Mit 799 eingedruckten Abbildungen und 6 Tafeln. XII + 496 S. und II. Bd. VIII + 491 S. mit 380 Textfig. und 4 Kartentafeln. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1905.

Es ist leider eine Tatsache, die von den Verfassern des vorliegenden Buches richtig erkannt wurde, daß gar viele, die sich einige allgemeine Kenntnisse in der Physik erworben haben, sehr wenig Verständnis für die Naturerscheinungen zeigen, wenn sie diesen im Leben begegnen. Die Verfasser glauben, daß vielfach die Lehrmethoden an diesem bedauerlichen Übelstand Schuld tragen und hoffen durch eine historisch dargestellte Entwicklungsgeschichte der einzelnen physikalischen Probleme das Interesse des Lesers und Lernenden höher steigern, das Verständnis desselben, der gleichsam selbst gedanklich alles wieder zu entdecken angeregt wird, zu heben. Das vorliegende Buch ist streng genommen keine Geschichte der Physik, es ist ein Versuch, den Anfänger in die Physik auf einem Wege einzuführen, der von der geschichtlichen Entwicklung der Wissenschaft vorgezeichnet ist. Man könnte es auch als ein physikalisches Bilderbuch mit Text bezeichnen, wesentlich aber es als eine Ergänzung zur Kulturgeschichte auffassen. Das Werk kann von jedermann gelesen werden und wird von allen, die es in die Hand bekommen, mit Vergnügen betrachtet werden. *St. M.*

**Dr. J. Fricks Physikalische Technik** oder Anleitung zu Experimentalvorträgen sowie zur Selbstherstellung einfacher Demonstrationsapparate. Siebente, vollkommen umgearbeitete und stark vermehrte Auflage von Dr. Otto Lehmann, Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Erster Band, zweite Abteiluung. Mit 1905 in den Text eingedruckten Abbildungen, XX + (1631—630) S., 8°. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn, 1905. Preis 24 M.

Der vorliegende Teil bringt den ersten Band des ausgezeichneten Werkes über dessen ersten Teil Bd. XVI., S. 68, berichtet wurde, zum Abschluß. Es ist abermals zu betonen, daß nicht nur was den Umfang und die außergewöhn-

Digitized by Google

lich große Zahl von Abbildungen anbelangt, sondern auch mit Rücksicht auf die ganzen modernen Anschauungen Lehmanns, hier weniger eine Neuauflage als ein ganz neues Werk geboten wird — ein Werk, das einfach in keinem gut geleiteten Institut fehlen darf. In dem zweiten Halbbande des I. Bandes beginnen die eigentlichen Anleitungen zu Demonstrationen: „Allgemeines über Messungen, Versuche zur Statik, das Wichtigste über die festen Körper, die Hydrostatik und die Flüssigkeiten, die Aerostatik und die Gase, die Behandlung der Temperatur und Wärmemenge; dann die Dynamik, Hydrodynamik, Aerodynamik sowie die Thermodynamik werden in ausführlichster Weise besprochen und zahlreiche Literaturhinweise geben die Möglichkeit auch die theoretischen Seiten der Einzelgebiete heranzuziehen. Ein erfreulicher Satz des Verlages stellt in der Ankündigung das Erscheinen des zweiten Bandes in baldige Aussicht. *St. M.*

**Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie** in 4 Bänden. Zehnte, umgearbeitete und vermehrte Ausgabe, herausgegeben von Leop. Pfaundler, Prof. d. Phys. an der Universität Graz. I. Band, 1. Abteilung, XIV + 544 S., 8°. Verlag von F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1905.

Die 10. Auflage des bekannten Lehrbuches ist nicht mehr das Werk eines einzelnen. War schon für die neunte, Lummer für das Gebiet der Optik gewonnen worden, so figurieren diesmal außer Pfaundler und Lummer noch Kaufmann für Magnetismus und Elektrizität, Pernter für Meteorologie, Nippoldt für den Erdmagnetismus, Wassmuth für Thermodynamik und Wärmeleitung und Drucker für die Molekularphysik als Mitarbeiter. Höhere Mathematik ist wie bisher mit Rücksicht auf die mangelnde Vorbildung, welche durch die herrschenden Gymnasialvorschriften verursacht wird, vermieden.

Durch geeignete Formatvergrößerung der Neuauflage ist es gelungen, die Seitenzahl der 1. Abt. des I. Bandes, die vorliegt, trotz beträchtlichen Inhaltszuwachses fast unverändert zu erhalten. Dieser 1. Teil hat den alten Verfasser, der allerdings auch noch ein hinterlassenes Manuskript H. v. Wilds teilweise mitbenützen konnte. Dadurch ist dem vorliegenden Bande im großen und ganzen der gleiche Charakter geblieben, den die vorige Auflage zeigte. Im Detail ist gar manches geändert und modernisiert. Mit Freude werden wohl viele schon in der philosophischen Einleitung die Stellungnahme gegen die Bilderstürmer und das Verwerfen der übertriebenen Angst vor Hypothesen lesen. Die Messungen von Längenflächen, Volumen etc. sind aus der Anleitung in die Mechanik übertragen, wo ihnen ein ausführliches Kapitel gewidmet ist und nunmehr alle modernen Hilfsmittel für genaue und bequeme Bestimmungen der Fundamentalgrößen gefunden werden können. Das nächste Kapitel von den Bewegungen und Kräften im allgemeinen hat schärfere Formulierungen für die Maße, Ausführlicheres über die Dimensionen, Hinzufügung der Zykloidenpendelbehandlung gegenüber der letzten Auflage aufzuweisen, für den nächsten Abschnitt, der vom Gleichgewicht und den Bewegungen fester Körper handelt, sei besonders die Einschaltung über die mittlere Dichte der Erde und die Gravitationskonstante hervorgehoben. Die drei folgenden Abschnitte zeigen

Digitized by Google

schon in den Überschriften Mechanik nicht starrer fester Körper, Mechanik flüssiger Körper und Mechanik gasförmiger Körper, wo das Wort Mechanik an die Stelle von Molekularkräften der letzten Auflage getreten ist, eine prinzipielle Wandlung. Das 5. Kapitel der alten Auflage, das speziell von Kapillarität, Kohäsion, Endosmose, Diffusion etc. handelte, fehlt hier ganz, die Molekularkräfte der flüssigen und gasförmigen Körper sollen in der Wärmelehre besprochen werden. Hier wäre die Aufnahme der Wirbelbewegungen hervorzuheben, so wie im letzten Kapitel die ausführliche Besprechung der modernen Luftpumpen. Man wird sich darüber einig sein, daß der alte treue und gute Bekannte, der sich im neuen Gewande stattlich und würdig repräsentiert, seine alten Freunde sich so wahren und zahlreiche neue finden wird.

*St. M.*

**Über Elektronen.** Vortrag gehalten auf der 77. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran von Dr. W. Wien, Professor an der Universität Würzburg. Leipzig, Teubner, 1905, 28 Seiten.

Den ungeheuren Komplex von Tatsachen und Hypothesen, den heute die Elektronentheorie umfaßt, in einigen zwanzig großgedruckten Seiten allgemein verständlich darzustellen ist, wie der Verfasser selbst hervorhebt, eine schwierige Aufgabe; sie erscheint in dem Vortrag, wie er nun mit einigen Anmerkungen versehen vorliegt, in glücklicher Weise gelöst. Die Schrift kann einem weiten Kreise wissenschaftlich Gebildeter zur Orientierung über das bisher geleistete dienen. Es werden alle wichtigeren experimentellen und theoretischen Ergebnisse in historischer Reihenfolge vorgeführt, wobei aber auch die noch offenen Fragen und Schwierigkeiten der Theorie nicht unberührt bleiben.

*K. Prz.*

**Die Physik** in gemeinfaßlicher Darstellung für höhere Lehranstalten, Hochschulen und zum Selbststudium von Dr. Friedrich Neesen, Professor an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule und an der Universität Berlin. Zweite, vermehrte Auflage, Braunschweig, Friedrich Viewej & Sohn, 1905, 383 Seiten.

Die rasche Entwicklung einzelner Zweige der Physik und das wachsende allgemeine Interesse an den Ergebnissen der physikalischen Forschung bewirkt, daß in immer kürzeren Zeiträumen die bestehenden Lehrbücher einer Neuauflage und Erweiterung bedürfen. Nun liegt auch die Neesensche Physik nach fünf Jahren in einer neuen Auflage vor. Das Buch ist charakterisiert durch die Beschränkung mathematischer Ableitungen auf ein Minimum; umständlichere Beweise, wie der des Pendelgesetzes, werden nicht gegeben. Dadurch wird es dem Verfasser möglich, mehr Erscheinungen und praktische Anwendungen in den knappen Raum aufzunehmen. Besondere Berücksichtigung fand in der neuen Auflage die Radioaktivität. Auf Seite 268 wäre es wohl richtiger gewesen, auf die Elektronentheorie der Metalle hinzuweisen, als zu sagen: „Für Leiter erster Klasse fehlt eine entsprechende Vorstellung ganz.“ Auf Seite 345 ist ein Druckfehler dahin richtig zu stellen, daß die Masse des Elektrons 1000mal, nicht 100mal kleiner ist als die des Wasserstoffatoms. Ein Anhang enthält eine Anzahl von Übungsbeispielen.

*K. Prz.*

Digitized by Google

**Die Mechanik fester Körper.** Lehrbuch in elementarer Darstellung für höhere technische Fachschulen und zum Selbstunterricht nebst einer Sammlung von 250 aufgelösten Beispielen, von Ingenieur Ernst Blau, Hannover, Dr. Max Jänecke, Verlagsbuchhandlung, 1905, 263 Seiten.

Dieses Buch ist für den angehenden Techniker bestimmt und dementsprechend waren bei der Auswahl des Stoffes und der Anwendungen praktische Gesichtspunkte maßgebend. So enthält der Abschnitt Phoronomie eine Ableitung der Gesetze des Kurbeltriebes, welche im Abschnitt Dynamik bei der Behandlung des Beschleunigungsdruckes und der Schwungradberechnung angewendet werden. Der Abschnitt Statik bringt unter anderem rechnerische und graphische Methoden zur Bestimmung der Spannungen in Fachwerkträgern etc. Höhere Mathematik wird überall vermieden, was allerdings den unvermeidlichen Übelstand etwas weitschweifiger Rechnungen mit sich bringt, wie bei der Bestimmung von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten. Die Elastizitätslehre ist nicht aufgenommen worden, wohl aber die Reibung und der vollkommen und unvollkommen elastische Stoß. Der Anhang gibt eine Zusammenstellung der abgeleiteten Formeln und der technischen und absoluten Maßeinheiten inklusive der elektromagnetischen. *K. Prz.*

**Wilda, Diagramm- und Flächenmesser.** Vollständiger Ersatz für das Planimeter zum schnellen und genauen Ausmessen beliebig begrenzter Flächen, Dampfdiagramme u. s. w. Mit Gebrauchsanweisung. Hannover, Gebrüder Jänecke. Preis 2 Mark.

Die Meßvorrichtung besteht aus einer rechteckigen, 18·5 *cm* hohen und 12 *cm* breiten durchsichtigen Zelluloidtafel mit einem auf der unteren Seite angebrachten Teilungsnetze. Dieses wird von 39, in Abständen von je 0·25 *cm* voneinander parallel zum Höhenrande und von 71 im Abstande von je 0·2 *cm* voneinander parallel zum Breitenrande gezogenen Geraden gebildet. Bei den ersteren ist jede zweite, bei den letzteren, von der untersten abgesehen, jede fünfte Parallele dicker angezogen. Die Breitenzählung läuft unten und oben bloß bei den dicker angezogenen Geraden von 1 bis 19, die Höhenzählung jedoch an sämtlichen Breitenparallelen von unten nach oben, und zwar links von 0 mit 0·1 bis 7 und rechts von 0 mit 0·2 bis 14.

Jede der dicker ausgezogenen 19 Geraden kann als Mittellinie eines von den benachbarten zwei Parallelen begrenzten rechteckigen Flächenstreifens von 0·5 *cm* Breite angesehen werden. Der Abschnitt eines Streifens von der Länge *l cm* hat demnach den Flächeninhalt $^1/_2\ l\ cm^2$ und diesen erhalten wir sofort, wenn wir am linken Rande die dort bloß zur Hälfte angegebene Längenzahl des zugehörigen Mittellinienabschnittes ablesen.

Legt man nun die Tafel so auf die auszumessende Fläche, daß sie der Breite nach von der ersten und von einer anderen, dünner ausgezogenen Höhenlinie eingeschlossen erscheint, so wird sie zugleich in Streifen zerlegt, deren Inhalte nach entsprechender Verschiebung der Tafel längs eines links angelegten Lineals durch die zugehörigen linken Ablesungen leicht gefunden werden kann. Die Summe dieser Ablesungen gibt dann den gesuchten Flächeninhalt in $cm^2$. Man kann aber auch den Inhalt mehrerer oder in manchen

Digitized by Google

Fällen aller Streifen auf einmal ablesen, wenn man den ersten Mittellinienabschnitt mittels einer Nadel und passender Tafelverschiebung an den zweiten Abschnitt, deren Summe an den dritten Abschnitt u. s. w. anreiht und die zuletzt erhaltene Abschnittsumme bei der Ablesung benützt.

Ähnlichen Planimetern gegenüber darf der besprochene Flächenmesser seiner zweckmäßigen Einrichtung, guten Ausführung und seines Preises halber empfohlen werden. *Mc.*

**Astronomischer Kalender für 1906.** Herausgegeben von der k. k. Sternwarte zu Wien, Wien, Verlag von Carl Gerolds Sohn. 2 K 40 geb.

Der Kalender enthält neben den üblichen Angaben und den astronomischen Angaben auch noch das Fixsternverzeichnis und die Liste veränderlicher Sterne und insbesondere ausführliche Angaben über das Sonnensystem Als Beigaben sind diesmal ein Aufsatz von J. Holetschek über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse der veränderlichen Sterne und ein weiterer von Hofrat Weiss über neue Planeten, Kometen und Satelliten angefügt. Jupiter hat jetzt sieben und Saturn zehn bekannte Satelliten, welche der theoretischen Astronomie neue und ziemlich schwierige Aufgaben stellen.

**Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften.** Nr. 147. Beitrag zur physiologischen Optik von Johann Benedikt Listing. Herausgegeben von Prof. Dr. Otto Schwarz, Leipzig, Verlag von W. Engelmann, 1905, 52 Seiten, mit einem Bildnis und zwei Tafeln.

Die in diesem Bändchen wiedergegebene Abhandlung Listings ist im Jahre 1845 in den Göttinger Studien erschienen und enthält die Beschreibung, Abbildung und Erklärung einer Anzahl von „Gesichtserscheinungen, bei welchen Teile des Auges selbst oder in ihm mehr oder weniger zufällig vorhandene Körper gewissermaßen als Objekte auftreten und wahrnehmbar werden", und für die Listing den Namen „entoptische Erscheinungen" in die Wissenschaft eingeführt hat. Dem eigentlichen Thema hat Listing eine kurze, äußerst übersichtliche Darstellung der von ihm so wesentlich geförderten Dioptrik des Auges vorangeschickt.

Das Bändchen enthält eine kurze biographische Skizze und ein Bildnis des Forschers. *K. Prz.*

**O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik.** Dritter Band. Die Lehre von der Wärme, 988 S. Mk. 16, in Halbfrz. Mk. 18. Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1905.

Es ist ein überaus angenehmes Gefühl, ein Buch vor sich zu haben, das man nur loben kann. So ein Buch ist unstreitig ebenso wie der erste und zweite auch der vorliegende dritte Band von Chwolsons Lehrbuch der Physik. Derselbe behandelt die Lehre von der Wärme in ebenderselben reichhaltigen, guten und angenehmen Weise wie in den vorhergehenden Bänden die Mechanik und Optik geboten wurde. Wiederum ist auf den experimentellen Teil, Beschreibung der Apparate u. dgl. das Hauptgewicht gelegt, doch ist auch aus der Theorie eine sorgfältige Auswahl getroffen worden. So finden wir das Wesentliche über die Theorie der Wärmeleitung, die Thermodynamik,

Digitized by Google

die Theorie der Lösungen u. s. f. Es ist ein besonderer Paragraph „über den Temperaturursprung an der gemeinsamen Oberfläche zweier Körper“ vorhanden. Was immer wieder erwähnt werden muß, ist das reichhaltige Literaturverzeichnis, welches wohl kaum ein zweites Lehrbuch in dieser Art aufweist. Es wird auch die Chwolsonsche „Lehre von der Wärme“ eine weite Verbreitung im deutschen Leserkreise erringen. *G. J.*

**J. Fraunhofer, Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Glasarten.** Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 150. 36 S.. geb. Mk. 120. Leipzig, Wilh. Engelmann, 1905.

Vorliegendes 150. Bändchen von Ostwalds Klassikerbibliothek enthält Fraunhofers berühmte Arbeit über die Messung der Brechungsexponenten verschiedener Spektrallinien. Die beigegebene gut reproduzierte Tafel des Sonnenspektrums erfüllt den Beschauer von neuem mit Staunen, daß es Fraunhofer schon möglich war, etwas Derartiges herzustellen. *G. J.*

**J. Classen Theorie der Elektrizität und des Magnetismus.** II. Bd. Magnetismus und Elektromagnetismus. Leipzig, G. J. Göschen, 1904, IX u. 251 S. Mk. 7.

Wir finden hier in eben derselben klaren und vollständigen Art wie im ersten Band auf Grund der Faraday-Maxwellschen Vorstellungsweise die Erscheinungen des Magnetismus und des Elektromagnetismus dargestellt. Ohne schwierige mathematische Behelfe werden alle notwendigen rein physikalischen Beziehungen abgeleitet, desgleichen deren Anwendung in der Praxis genügend gewürdigt. Ist es sonach ein ausgezeichnetes Buch zum Selbststudium, so darf nicht zu erwähnen vergessen werden, daß auch dem Lehrer hier eine sehr brauchbare Unterlage für den Unterricht geboten wird. *G. J.*

**A. H. Bucherer, Mathematische Einführung in die Elektronentheorie.** Leipzig, B. G. Teubner, 1904. 148 S.

Bei dem großen Umfang, den heute schon die Literatur über die Theorie der Elektronen annimmt, ist es eine äußerst dankbare Aufgabe gewesen, einen kurzen Abriß davon in einer dem Fachmann sowie dem eifrigen Studierenden leicht verständlichen Weise zu geben nnd vor allem das zu bieten, was bereits gesicherter Besitzstand der Wissenschaft ist. Daß dazu die Vektoranalysis mit bekanntem Erfolg verwendet wird, ist um so dankenswerter, als dadurch Gelegenheit geboten wird, diese auch auf dem Kontinent immer mehr zur Anwendung kommende Darstellungsweise mit Erfolg zu üben. Es wird jeder gern zu dem Buche greifen, der einen sicheren Einblick in die Elektronentheorie gewinnen will.

**Handbuch der geographischen Ortsbestimmung** für Geographen und Forschungsreisende von Dr. Adolf Marcuse, Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1905. Preis 10 M.

Dieses Buch ist, wie das Vorwort besagt, in erster Linie für Geographen, Forschungsreisende (auch Aeronauten) bestimmt, soll aber auch Studierenden der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer und Lehrern des mathematisch-geographischen Unterrichts zur Einführung in den sich mit Zeit- und Orts-

Digitized by Google

bestimmung beschäftigenden Teil der Astronomie dienen. Es ist sicherlich keine leichte Aufgabe, aus der reichhaltigen Literatur über diesen Gegenstand die Auswahl und Behandlung der Methoden in einer Weise vorzunehmen, daß ohne zu große Weitschweifigkeit den wechselnden Bedürfnissen des erhofften Leserkreises nach Möglichkeit Rechnung getragen werde. Die vom Verfasser gegebene Lösung dieser Aufgabe ist, wenn auch nicht einwandfrei, doch immerhin sehr befriedigend.

Im ersten Teile (60 S.) werden die Grundbegriffe der astronomischen Geographie in ausführlicher Weise auseinandergesetzt und die durch verschiedene Ursachen bewirkten Veränderungen der Sternörter besprochen. Der zweite Teil (30 S.) beschäftigt sich mit der Einrichtung und Benützung der gebräuchlichsten astronomischen Ephemeriden und Tafeln. Der dritte Teil (80 S.) behandelt die instrumentellen Hilfsmittel (Chronometer, Universalinstrument und Libellenquadrant) und enthält eine detaillierte, durch zahlreiche Abbildungen anschaulich gemachte Beschreibung dieser Instrumente nebst gründlicher Anweisung zu derem Gebrauche mit Berücksichtigung der durch Instrumentalfehler bedingten Korrekturen der Messungen.

Den Methoden der Ortsbestimmung ist der vierte Teil (120 S.) gewidmet. Nach Auseinandersetzung der Zeitbestimmung aus einzelnen und korrespondierenden Zeitdistanzen eines Sternes in der Nähe des ersten Vertikals werden die Methoden erläutert, welche eine zuverlässige Bestimmung der Breite bei genauer oder genäherter Kenntnis der Ortszeit aus Messungen von Zenitdistanzen allein und durch Einbeziehung der Ablesungen des Azimutalkreises bei mangelnder Kenntnis der Zeit gestatten.

Von den Methoden der Längenbestimmung werden besonders jene ausführlich besprochen, die sich auf Zeitübertragung, Beobachtung von Sternbedeckungen und Mondhöhen beziehen. Schließlich wird auch eine genäherte und eine genaue Methode der Azimutbestimmung gegeben. Im Anhange wird nach Wesen und Verwendbarkeit der Merkatorfunktion, Breiten- und Zeitbestimmung ohne winkelmessende Instrumente mittels Fadendreieck und Ortsbestimmung im Luftballon mittels Libellenquadranten behandelt.

Das Handbuch birgt eine staatliche Sammlung erprobter Methoden, deren Anwendung überdies durch zahlreiche Beispiele (auf Seite 223 stimmen mehrere Stundenwinkel mit den angegebenen Zeiten nicht überein) erläutert ist: Etwas störend wirkt eine Ungleichförmigkeit der Behandlung des Stoffes, welche darin gelegen ist, daß die theoretische Ableitung der Formeln, aus denen die gesuchten Größen erhalten werden, nicht überall gegeben ist und meist dort fehlt, wo sie schwierig oder umständlich wird. Als Ganzes betrachtet ist aber das Handbuch eine treffliche, von Sachkenntnis und Lehrtüchtigkeit zeugende Arbeit, auf welche Freunde der höheren Geodäsie hiemit aufmerksam gemacht sein sollen.

**Das Wasser und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe** von Dr. Ernst Leher, diplom. Ingenieur, Saalfeld in Th. G. J. Göschensche Verlagshandlung in Leipzig. Preis 80 Pf. gbd.

Der Verfasser gibt nach einer kurzen Besprechung der wichtigsten physikalischen und chemischen Eigenschaften des Wassers und seiner Untersuchungsmethoden eine Zusammenstellung der verschiedenen Verfahren zur Reinigung der Trinkwässer und Abwässer. Im Anhang werden dann noch

Digitized by Google

einige Maschinen für künstliche Eisbereitung erklärt. Bei dem allgemeinen Interesse, das den hier behandelten, hygienisch so wichtigen Fragen entgegengebracht wird, ist zu erwarten, daß der Band rasch Verbreitung finden wird.
*F. v. L.*

**Elektrochemie** I. Theoretische Chemie und ihre physikalisch chemischen Grundlagen von Dr. Heinrich Danneel, Priv.-Doz. an der kgl. technischen Hochschule zu Aachen. Preis, in Leinwand gebunden 80 Pf. G. J. Göschensche Verlagshandlung in Leipzig.

Den Inhalt des ersten Bandes bildet eine außerordentlich klare Ableitung der für die Elektrochemie grundlegenden physikalisch chemischen Gesetze. In den Text sind zahlreiche Beispiele eingefügt, soweit sie zur Veranschaulichung des Gesagten dienen. Trotz der großen Prägnanz und Kürze der Darstellung dürfte keine wichtigere Frage unberührt geblieben sein. Der zweite Band soll die Meßmethoden, experimentellen Resultate und Anwendungen, der dritte die technische Elektrochemie bringen. *F. v. L.*

**Telegraphen- und Fernsprechtechnik in Einzeldarstellungen,** herausgegeben von Th. Karrass. Nr. I. Maschinen-Telegraphen von A. Kraatz, Telegrapheningenieur im Reichspostamt. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1906, X u. 136 Seiten.

Dieser erste Band einer Reihe von Monographien, in denen nach und nach das ganze Telegraphen- und Telephonwesen dargestellt werden soll, behandelt diejenigen Erfindungen, welche ein rascheres Zeichengeben und daher eine intensivere Ausnützung der Telegraphenleitungen gestatten, als dies beim gewöhnlichen Telegraphieren mit der Hand möglich ist. Nach einer kurzen Erläuterung des fast durchwegs verwendeten Betriebes mit Doppelstrom folgt an der Hand zahlreicher klarer Abbildungen die Beschreibung einer Reihe von Maschinentelegraphen, vom Wheatstoneschen angefangen. Besonders erwähnt sei hier nur der Schnelltelegraph von Pollak & Virág mit seinem „Spiegelindikator" (Telephon mit beweglichem Spiegel), durch dessen sinnreich kombinierte Bewegungen das Telegramm sofort in gewöhnlicher lateinischer Schrift aufgezeichnet wird. Für den Physiker ist auch die Art und Weise von Interesse, wie der bei einigen dieser Apparate erforderliche Synchronismus zwischen Sender und Empfänger hergestellt wird. Wer sich über den heutigen Stand der telegraphischen Technik orientieren oder ein spezielles Kapitel eingehend studieren will, wird ein baldiges Erscheinen der weiteren Nummern dieser Sammlung wünschen. *K. Prz.*

**Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis** von Prof. Dr. Hermann Schubert, Leipzig, Göschen, 1905. (Zwei Bände.)

Der Verfasser will nach dem Vorwort vereinfachende Darstellungen und übersichtlichere Gestaltungen der Beweise mitteilen, die sich ihm im Laufe einer langen Vorlesungs- und Schulpraxis dargeboten haben. Seine Vorträge über elementare Mathematik waren für Lehrer bestimmt und für diese ist wohl auch das Buch in erster Linie verfaßt. Er behandelt im ersten Band der Reihe nach die elementare Berechnung der Logarithmen auf der untersten Stufe (Untersekunda), die Siebzehnteilung des Kreises, die Kreisteilungsgleichung, die Zahl der von zwei Planspiegeln entworfenen Bilder, das Volumen des Obe-

Digitized by Google

lisken, elementare Abteilung sehr enger Grenzen für die Schwingungszahl des mathematischen Pendels, die Konstantenzahl der Polyeder, eine Einführung in die neuere Geometrie und die Lage der Ähnlichkeitspunkte sowie das Apollonische Problem. Eingeschoben ist ein Aufsatz über eine beim Aufbau des absoluten Maßsystems begangene Inkonsequenz. Gerade bei diesem Aufsatz scheint mir der im Titel enthaltene Vorwurf nicht gerechtfertigt. In der Tat kommt der Vorschlag des Verfassers darauf hinaus, die Masseneinheit aus der Newtonschen Gravitation abzuleiten, wodurch eine weitgehende Vereinfachung der Dimensionsformeln erzielt wird. Dem steht jedoch das theoretische Bedenken gegenüber, daß damit die spezielle Newtonische Gravitation als Fundamentaleigenschaft der Masse gesetzt wird, während doch das Trägheitsgesetz allein in Verbindung, z. B. mit der Fliehkraft bei einer Rotationsbewegung begrifflich zur Massenvergleichung ausreicht. Massen, welche dem Trägheitsgesetz unterworfen sind, brauchen ja darum noch nicht gravitierende Massen zu sein. Das Bedürfnis nach einem konkreten Etalon, der zur Prüfung der Gültigkeit des Gravitationsgesetzes dienen kann, ist hier gewiß ein wichtigerer Gesichtspunkt, als umgekehrt die durch die hypothetische Annahme der Gravitation als allgemeine Eigenschaft der Körper erzielte Vereinfachung der Dimensionsformeln. Auch finden sich diese Betrachtung eingehend und lebhaft dargestellt bei Lord Kelvin, Constitution of Matter. Die scharfsinnige Methode zur Berechnung der Logarithmen wird man schwerlich Untersekudanern, also etwa in Österreich Sextanern zumuten. Der Weg ist trotz der rein elementaren Hilfsmittel zu künstlich und das Resultat verhältnismäßig weniger wertvoll, als eine Diskussion der Logarithmen an der Hand des Funktionsbegriffes. Sehr hübsch ist die exakte Darstellung der Anzahl der Bilder in zwei zueinander geneigten Spiegeln und die Berichtigung des gewöhnlich falsch angegebenen Resultats.

Der zweite Band beginnt mit einem Abschnitt über Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie und führt zu dem Resultat, alle Dreiecke mit ganzen Zahlen als Seitenlängen anzugeben, deren Inhalt wieder eine ganze Zahl ist mit weiteren Ausführungen über rationale Transversalen, quadratische und sechsseitige Pyramiden mit ganzzahligen Seiten und Volumen und ähnliches.

Sodann folgt ein Abschnitt über Kettenbrüche und Zahlentheorie, quadratische Reste, die Pellsche Gleichung und die Darstellung von Zahlen als Summe zweier Quadrate.

Ein Abschnitt über vielstellige Berechnung von Logarithmen ohne Zuziehung der Reihen, in welchem die in erstem Bande begonnenen Methoden erweitert werden, bildet den Schluß. *W.*

**Grundzüge der Naturlehre** für die unteren Klassen der Realschulen von Regierungsrat Dr. Ignaz Wallentin. Preis 1 K 80 h. Verlag von A. Pichlers Witwe & Sohn, Wien 1905. Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der Mittelschulen und verwandter Lehranstalten, von demselben, ebenda 1905; Preis 3 K 50 h. Ausgabe für Realschulen.

Die beiden bewährten Schulbücher liegen in vierter beziehungsweise elfter Auflage vor. *St. M.*

Digitized by Google

**Ebene und räumliche Geometrie** von Prof. Dr. K. Ed. Zetzsche: Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage, bearbeitet von Franz Zetzsche. Mit 242 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig Verlagsbuchhandlung von J. J. Weber 1905. — (XI + 408 Seiten).

Das vorliegende Buch bildet den 63. Band in der Sammlung illustrierter Katechismen von Weber; es setzt sich zum Zweck, die Grundbegriffe und wichtigsten Sätze der elementaren Geometrie und des Raumes darzustellen und wendet sich an Leser, welche ein gewisses Maß von geometrischen Kenntnissen durch Selbstunterricht sich aneignen wollen. Was den Umfang des behandelten Stoffes anlangt, so dürfte dieser im großen ganzen mit dem an mittleren Schulen (Gymnasien, Realschulen, Gewerbeschulen) normierten Lehrziele übereinstimmen, mit der Beschränkung, daß Trigonometrie und analytische Geometrie hier nicht mit einbezogen werden. Es sei erwähnt, daß unter anderem das Berührungsproblem des Apollonius, der Feuerbachsche Kreis, die harmonischen Gebilde, das vollständige Vierseit, Pol und Polare beim Kreise behandelt werden; auch der Inversion am Kreise wird ein Paragraph gewidmet unter dem Namen „Kreisverwandtschaft". Die verwendete Terminologie stimmt nicht durchwegs mit der sonst gebräuchlichen überein, so z. B. wenn in dem Kapitel über das Viereck der Ausdruck „Rhomboid" als gleichbedeutend mit dem Ausdrucke „Deltoid" verwendet wird. Die Art der Behandlung des Stoffes entspricht nicht überall den Anforderungen, welche vom wissenschaftlichen Standpunkte auch an ein elementares Lehrbuch gestellt werden müssen; der Aufbau des Lehrgebäudes entbehrt der logischen Durchbildung, indem ein Unterschied zwischen Axiomen und Postulaten einerseits und beweisbaren Sätzen anderseits nirgends gemacht wird. Als besonders krasse Versündigung gegen den wissenschaftlichen Geist muß es bezeichnet werden, daß in § 33 jener Satz, der sonst in den Lehrbüchern ausdrücklich als Euklidsches Parallelenpostulat formuliert zu werden pflegt, durch einen Scheinbeweis eingeführt oder richtig eingeschmuggelt wird. Abgesehen von den genannten Mängeln mag das Buch bescheideneren Ansprüchen immerhin genügen, indem es dem mit Volksschulbildung ausgerüsteten Leser eine gewisse, nicht unbedeutende Summe von geometrischen Kenntnissen vermittelt.

**L'algèbre de la logique.** Par Louis Couturat. Verlag von Gauthier-Villars, 1905 (100 Seiten).

Das in der bekannten Sammlung „Scientia" als Nummer 24 erschienene Bändchen entwickelt die Grundzüge des von Boole und Schröder begründeten und seither von verschiedenen Autoren weiter ausgebauten „Logik kalküls". Das Substrat des Kalküls bilden „Dinge", welche als Begriffe (interprétation conceptuelle) oder als Urteile (interprétation propositionelle) gedeutet werden können (neben diesen dem eigentlichen Gebiete der Logik angehörigen Deutungen wird als dritte mögliche Deutung die Deutung der Dinge als Mengen erwähnt). Der Aufbau des Kalküls erfolgt ohne Benützung der beiden Deutungen in völlig abstrakter und formaler Weise durch Axiome und Postulate, wobei natürlich der Sinn und die Berechtigung der letzteren durch beständige Hinweisung auf ihre Bedeutung in der I. C. (interprétation conceptuelle) und I. P. (interprétation propositionelle) erläutert wird. Den



Digitized by Google

Ausgangspunkt bildet die durch das Zeichen $<$ dargestellte Relation zwischen zwei „Dingen“: $a < b$, welche in der abstrakten Theorie eben wegen ihres fundamentalen Charakters als undefinierbar erscheint, in der I. C. und I. P. aber eine sehr einfache Bedeutung besitzt; anschließend wird die Gleichheit zweier Dinge $a = b$ durch das gleichzeitige Bestehen der Relationen $a < b$ und $b < a$ erklärt. Es werden gewisse Axiome (das Prinzip der Identität und das des Syllogismus) eingeführt und dann auf Grund zweier Postulate die Addition und Multiplikation zweier „Dinge“ definiert, die zwei fundamentalen Operationen des Kalküls, deren Bedeutung in der I. C. und I. P. sehr leicht verständlich ist. Nun folgen Gesetze und Rechnungsregeln für die Umformung von Relationen, die Ableitung des distributiven Gesetzes für die Multiplikation hinsichtlich der Addition und für die Addition hinsichtlich der Multiplikation, die Definition der uneigentlichen Dinge (0) und (1), das Gesetz der Dualität. Als dritte fundamentale Operation wird in § 15 die Negation eingeführt (auf Grund eines Postulats). Mit § 20 ist der Grundstock des Kalküls gewissermaßen vollendet und der Leser mit den eigentümlichen Ausdrucksmitteln des Kalküls vertraut gemacht; bis zu dieser Stelle erscheinen die Formeln im Grunde genommen als Darstellung der gewöhnlichen Denkprozesse in einer eigens geschaffenen symbolischen Sprache und ihr Inhalt ist — in die gewöhnliche Sprechweise übersetzt — unmittelbar einleuchtend. Von § 20 ab dringt die Darstellung tiefer in den eigentlichen Problemkreis des Logikkalkuls ein; es werden Methoden entwickelt, die es ermöglichen, mit Hilfe der geschaffenen Symbolik verwickeltere Denkprozesse durch Rechnung zu ersetzen und die betreffenden Aufgaben auf beinahe mechanische Weise der Erledigung zuzuführen. Ohne näher ins Detail zu gehen, seien erwähnt: die Auflösung von Gleichungen, die Elimination, die Methoden von Poretsky, als markante Hauptpunkte in den Entwicklungen dieses Teils. Am Schlusse wird in § 60 die Stellung des Logikkalküls zur Mathematik und Logik besprochen und die Grenzen seiner Leistungsfähigkeit bezeichnet.

Das vorliegende Bändchen enthält in dem knapp bemessenen Raume von 100 Seiten eine recht ansehnliche Fülle von Inhalt. Da es sich auch durch Klarheit der Darstellung und Übersichtlichkeit auszeichnet, wird es gewiß die Kenntnis des Logikkalküls in weitere Kreise tragen und viele zum Studium der einschlägigen Literatur (hiezu ist das auf Seite 96, 97 des Werkes befindliche Verzeichnis zu vergleichen) anregen. *J. Grünwald.*

**Enzyklopädie der Elementarmathematik.** Bd II. Geometrie. Bearbeitet von Heinrich Weber, Josef Wellstein und Walther Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner 1905.

Dieses Buch, das den zweiten Band der Enzyklopädie der Elementa-Mathematik, ein Handbuch für Lehrer und Studierende von H. Weber und J. Wellstein bildet, reiht sich würdig dem bereits besprochenen ersten Bande an. Es hat zum eigentlichen Vorwurfe die Elementar-Mathematik, doch mußten, wie in der Vorrede erwähnt wird, mit Rücksicht auf den dritten Band, der die Anwendungen bringen wird, auch die Kegelschnitte, die ebene und sphärische Trigonometrie, sowie die Anfangsgründe der analytischen Geometrie in die Darstellung einbezogen werden und räumlich fiel diesen Materien der größere

Digitized by Google

Teil zu. Zur Bearbeitung dieses umfangreichen Stoffes, der einen stattlichen Band von mehr als 600 Seiten erfüllt, haben die beiden Verfasser noch W. Jacobstal herangezogen, der die sphärische Trigonometrie und Sphärik behandelte.

Der Band zerfällt in drei Bücher: I. „Grundlagen der Geometrie" II. Trigonometrie und III. Analytische Geometrie und Stereometrie.

Das interessanteste unter ihnen ist zweifellos das erste. Bildet es doch den ersten Versuch die mannigfachen, tiefgehenden neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie einem größeren Lesekreise zu vermitteln. Die großen Schwierigkeiten, die ihm entgegenstanden, zu überwinden ist dem Verfasser (J. Wellstein) durch eine geistreiche, lebhafte Darstellung in trefflicher Weise gelungen. Doch soll nicht verschwiegen werden, daß sie durch vielfache Anregungen und neue Gesichtspunkte an die Selbsttätigkeit des Lesers nicht unbeträchtliche Anforderungen stellt, für welche Mühen er schließlich durch eine tiefere Einsicht in das Wesen unserer geometrischen Erkenntnisse sich reichlich belohnt sieht.

Um einen genaueren Einblick in die Behandlungsweise des Stoffes zu geben, mag hier das Inhaltsverzeichnis dieses ersten Buches in Kürze angeführt werden. Es zerfällt in drei Abschnitte, von denen das erste eine „Kritik der Grundbegriffe" bringt, die sich gliedert in § 1 Geschichtliches, § 2 die Begriffe „Punkt", „Linie", „Fläche", § 3 die Begriffe „Gerade", „Ebene", „parallel"; § 4 die Bewegung und die Kongruenz; § 5 die Steinerschen Linealkonstruktionen; § 6 Natürliche Geometrie.

Nachdem in diesem Abschnitte dem Leser klar gemacht wurde, daß selbst die einfachsten geometrischen Begriffe keineswegs so selbstverständlich sind als sie der naiven Anschauung erscheinen, entwickelt der Verfasser im zweiten Abschnitte „die natürliche Geometrie als eine der unendlich vielen Erscheinungsformen einer rein begrifflichen Geometrie (Metageometrie)". Ihr sind acht Paragraphe gewidmet, und zwar § 7 Natürliche und Approximations-Geometrie, Analysis situs, Metageometrie. — § 8 Euklidsche Geometrie im parabolischen Kugelgebüsch. — § 9 Kugelgebüsch. — § 10 Teilweise Verwirklichung der Euklidschen Geometrie im Kugelgebüsch, die beiden Nichteuklidschen Geometrien. § 11 Metrik der beiden Nichteuklidischen Geometrien. — § 12 Die Euklidsche Geometrie in einer linearen Zahlenmenge dritter Stufe. — § 13 Das Wesen der Grundbegriffe. — § 14 Die Anschauung.

Im dritten Abschnitte, betitelt „Grundlegung der projektiven Geometrie", wird sodann versucht, die Cayleysche Maßbestimmung einzuführen und damit zugleich den Beweis zu erbringen, daß die Euklidische Geometrie, die im zweiten Abschnitte zum Ausgangspunkte der Betrachtungen gewählt wurde, keineswegs in dieser Hinsicht einen Vorzug vor den beiden anderen genießt.

Nach diesen Vorbereitungen erst, die uns zur Einsicht von der Notwendigkeit einer gewissen Anzahl Axiome, ihrer Verträglichkeit und Unabhängigkeit führten und einen festen Grundriß für den weiteren Aufbau der Geometrie ergaben, wird im vierten Abschnitte „Planimetrie" an die Entwicklung der Euklidischen Geometrie geschritten. Sie wird in sechs Paragraphen (§ 20 bis § 25) abgehandelt, von denen durch ihre von der üblichen abweichende Darstellung besonders § 20 „die grundlegenden Sätze", § 21 „die Ähnlichkeit" und § 22 „die Flächenvergleichung" auffallen. Doch auch § 24 „Sätze und Aufgaben über den Kreis", der unter anderem auch das Apollonische Problem be-



Digitized by Google

handelt, enthält mancherlei neue Wendungen und Gesichtspunkte (z. B. § 24, 12) die man nicht ohne Genuß lesen wird. Auch die beiden anderen Bücher enthalten viel des Interessanten und Neuen. So sei aus der Sphärik und sphärischen Trigonometrie des zweiten Buches erwähnt, daß sie sich nicht auf den Eulerschen Dreiecks-Begriff beschränkt, sondern auch den allgemeineren Moebiusschen und den noch weiteren Gauß-Studyschen einbezieht. Ein besserer Einblick in die entwickelten Formeln und eine bessere Übersicht über sie wird eröffnet, durch einige gruppentheoretische Betrachtungen.

Aus dem dritten Buche mag hier hervorgehoben werden der neunte Abschnitt; Rauminhalt und Flächeninhalt, zumal § 88 Inhaltsmaß und der zehnte Abschnitt; Dehnungsgruppen und reguläre Körper.

Schon aus diesen wenigen Bemerkungen wird zur Genüge hervorgehen, daß das Buch ganz auf der Höhe der heutigen Forschung steht und allen ihren Anforderungen gerecht wird. Es bringt viele alte Kapitel in einem ganz neuen Gewand und manche neue, den Handbüchern bisher ganz fremde, den Lehrern unserer Mittelschulen und den strebsameren Studenten der Mathematik kann es nicht warm genug empfohlen werden. Aber auch der Beachtung der Philosophen ist es nicht unwert. Wer von ihnen unseren geometrischen Grundbegriffen, die ja die Basis für unsere Naturerkenntnis bilden, das gebührende Interesse entgegenbringt, wird aus dem ersten Buche vielfache Belehrung und Anregung schöpfen. *G. v. E.*

**Darstellende Geometrie**, Erster Teil (Elemente; ebenflächige Gebilde) von Robert Haußner, Prof. a. d. techn. Hochschule in Karlsruhe. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 207 S. mit 110 Figuren i. Text. Sammlung Göschen. 1904.

Die Anlage ist dieselbe geblieben (Rohn-Papperitz ist Vorbild). Der erste Abschnitt behandelt „die Parallelprojektion ebener Figuren und die Affinität", der zweite „die schiefe Projektion", aber nicht bloß für „ebenflächige Gebilde", sondern auch für „Kegel, Zylinder und Kugel". Neu hinzugefügt sind hier Bemerkungen über das Zeichnen einer Ellipse, die Ableitung der Brennpunktseigenschaft des ebenen Schnittes eines Drehungszylinders und des Umrisses einer Kugel. Die Konstruktion der Achsen aus konjugierten Durchmessern einer Ellipse ist durch eine andere ersetzt (S. 44) die entschieden umständlicher ist. Die mangelhafte Stelle auf Seite 58 der ersten Auflage ist verbessert. Das Weitere, enthaltend das Grund- und Aufrißverfahren unter vorwiegender Benützung des „Zweispurensystemes" bis zur Aufsuchung der Schnittfigur zweier Polyeder, ist fast unverändert geblieben.

Das baldige Erscheinen einer zweiten Auflage beweist, daß sich das Büchlein zur Einführung in den behandelten Gegenstand ganz brauchbar erwiesen hat. *Th. Sch.*

**Anfangsgründe der darstellenden Geometrie** für Gymnasien von Fritz Schütte. 42 S. B. G. Teubner, 1905.

Da die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie durch die Lehrpläne von 1901 in den Lehrstoff der preußischen Gymnasien eingeführt sind und die mathematischen Lehrbücher noch wenig oder gar keine Rücksicht darauf nehmen, will der Verfasser ein Ergänzungsheft zu diesen Büchern bieten. Der Versuch ist als gelungen zu bezeichnen; das Heft wird seinem Zwecke voll-

Digitized by Google

kommen entsprechen. Es behandelt die orthogonale, schiefe und zentrale Projektion oder, wie der Verfasser sagt, die Herstellung von „Lotbildern", „Schrägbildern" und „Schaubildern". Die erste Methode betrachtet der Verfasser mit Recht als die wertvollste; freilich werden zur Erklärung derselben bereits Schrägbilder benützt. Die gestellten Aufgaben sind nicht zahlreich, aber recht gut gewählt. *Th. Sch.*

**Lezioni di Geometria proiettiva.** dettate nella R. Università di Napoli dal Prof. Federigo Amodeo. Terza edizione (I[a] ed. tipografica) migliorata e aumentata, con 420 figure intercalate nel testo e molti esercizi. Napoli 1905, L. Pierro; 8°. XIV u. 456 S. Preis: Lire 12.

Die beiden ersten Auflagen dieses (V. Cerutti gewidmeten) Werkes sind als Autographien herausgegeben worden und haben deshalb im Ausland kaum Verbreitung gefunden. Umso freudiger ist es zu begrüßen, daß nun diese aus langer Lehrerfahrung und eingehenden Spezialuntersuchungen hervorgegangenen Vorlesungen in einer sehr hübschen Ausgabe weiten Kreisen zugänglich gemacht werden. Zur allgemeinen Charakteristik diene, daß die Grundlagen der projektiven Geometrie, von einer vollkommen abstrakten Auffassung dieser Wissenschaft ausgehend, streng entwickelt, zugleich aber viele Einzelheiten unter Benützung zahlreicher Figuren schulgemäß behandelt sind; ferner daß der Verfasser die projektiven Koordinaten einführt und damit manche Sätze auch in analytischer Form darlegt.

Die Grundlagen werden in der Einleitung (63 S.) und im ersten Kapitel des I. Teiles entwickelt, der den „Formen 1. Ordnung", d. h. den projektiven Verwandtschaften in den Grundgebilden der drei ersten Stufen, gewidmet ist. Die nach und nach eingeführten neun Postulate sind im Wesen mit den sechs Axiomen identisch, auf Grund deren F. Enriques in seinem bekannten Werke die projektive Geometrie aufbaut,[1]) womit aber keineswegs eine Abhängigkeit beider Autoren behauptet werden soll. Im einzelnen treten gar manche Verschiedenheiten auf, deren Besprechung zu weit führen würde.

Besonders eigenartig ist das zweite Kapitel des ersten Teiles, das sich mit Sätzen über Projektivitäten in Grundgebilden erster Stufe beschäftigt, die sich zum Teil bei H. Wiener, C. Segre, u. a. finden, zum andern Teil jedoch Eigentum des Verfassers sind und bisher kaum Aufnahme in ein Lehrbuch gefunden haben. Hier sei nur der Einführung der imaginären Elemente gedacht. Der Verfasser geht von der Betrachtung aus, daß eine hyperbolische Projektivität $P$, etwa auf einer Geraden, jedem Punkte $a$ die Reihe von Punkten $a_1 = a\,P$, $a_2 = a\,P^2$, ... $a_n = a\,P^n$, ... zuordnet, die einen der Doppelpunkte zur Grenze hat. Vier aufeinanderfolgende dieser Punkte bestimmen in dieser Folge $P$ und eines ihrer Doppelelemente, in der entgegengesetzten Folge $P^{-1}$ und das andere Doppelelement von $P$. Für eine elliptische Projektivität definieren analog vier solche Elemente durch ihre Reihenfolge das eine oder andere imaginäre Doppelelement. Die imaginären Elemente sind demnach auf eine auch für reelle Elemente gültig bleibende Art definiert. Es gibt nun eine einzige Involution $I$, die $P$ in sich selbst transformiert; sucht man zu einem

[1]) Vgl. Monatsh. Math. Phys. 16 (1905), p. 13.

Digitized by Google

beliebigen Punkt $x$ bezüglich $xP$ und $xP^{-1}$ den harmonisch konjugierten Punkt $x^1$, so ist $xx^1$ ein Punktepaar von $I$. $I$ und $P$ besitzen dieselben Doppelelemente und heißen vereinigt. Zu jeder Involution gehört ein Büschel vereinigter Projektivitäten. Ist $I$ elliptisch, so gibt es in dem Büschel unendlich viele zyklische Projektivitäten, insbesondere auch eine solche dritter Ordnung, die durch drei aufeinanderfolgende Elemente $a_1\ a_2\ a_3$ bestimmt wird. Jeder imaginäre Punkt kann also durch einen solchen Zyklus definiert werden. Diese zuerst von F. Klein erwähnte Definition eines imaginären Punktes (Elementes) wendet der Verfasser gewöhnlich an.

Die Projektivitäten in den Grundgebilden zweiter und dritter Stufe behandelt das III. Kapitel, wobei die projektiven und metrischen Sonderfälle eingehende Berücksichtigung finden. Durch Einführung der projektiven Koordinaten werden zugleich die Grundlagen für die analytische Behandlung der Geometrie der Ebene und des Raumes geschaffen und davon zum Nachweise der Doppelelemente vereinigter projektiver Ebenen oder Räume Gebrauch gemacht.

Der zweite Teil des Buches beschäftigt sich mit den „eindimensionalen Formen zweiter Ordnung", d. h. mit den Kurven und Kegelflächen zweiter Ordnung und Klasse, die als Erzeugnisse projektiver Grundgebilden erster Stufe eingeführt werden. Das dritte Kapitel dieses Teiles ist den Projektivitäten zwischen den eindimensionalen Formen zweiter Ordnung, also z. B. zwischen Büscheln von Kegelschnitten, gewidmet.

Auf die metrische Geometrie in der euklidischen Ebene oder im euklidischen Raume wird immer Bezug genommen. Literaturangaben sind spärlich vorhanden, hingegen wird wohl für viele Leser das am Schlusse angefügte Verzeichnis der vom Autor bisher veröffentlichten Arbeiten von Interesse sein.

*E. Müller.*

**Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie.** Eine mathematische Studie von Hermann Brunn-Berlin, Druck und Verlag von Georg Reimer, 1905. (X + 138 Seiten.)

Es ist ein sehr begrenztes Gebiet, welches in diesem Buche zum Gegenstand eines eindringenden systematischen Studiums gemacht wird. Ausgangspunkt der Untersuchung ist das bekannte Abelsche Lemma, welches in folgender Fassung zu Grunde gelegt wird: „Wenn $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ eine Reihe nicht zunehmender, positiver oder auch nullwerdender Zahlen und: $A_0 = a_0, A_1 = a_0 + a_1, \ldots A_n = a_0 + a_1 + \ldots . a_n$ eine Reihe über $H$ und unter $K$ fallender reeller Zahlen ist, so fällt $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots \varepsilon_n a_n$ über $\varepsilon_0 H$ und unter $\varepsilon_0 K$." An dieses Lemma als Thema, — um einen vom Verfasser selbst gebrauchten treffenden musikalischen Vergleich zu verwenden —, wird eine Reihe von Variationen geknüpft, welche „drei, nach steigender Mannigfaltigkeit und Feinheit der Gliederung geordnete Sätze einer einheitlichen Komposition bilden". Dementsprechend zerfällt das Buch in drei Teile: I. Von der Summe: $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \ldots \varepsilon_n a_n$. II. Von der Reihe: $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots\ldots$ III. Vom Integral $\int f(x, y)\, g(x, y, i)\, d(x + iy)$.

Der Teil I. des Buches ist der Ausdehnung des Abelschen Lemmas gewidmet. Es werden nämlich die Größen $a_i$ und also auch die $A_i$ als höhere

Digitized by Google

komplexe Zahlen, oder — nach der Graßmannschen Terminologie — als „extensive Größen“ vorausgesetzt, welche aus einer gewissen Anzahl, etwa $m$, von einander unabhängiger Einheiten $e_1, e_2 \ldots e_m$ linear ableitbar sind. Man kann sich derartige Zahlen in bekannter Weise durch die Punkte eines $m$ dimensionalen, Euklidischen Raumes dargestellt denken, indem man der Zahl: $x^{(1)} e_1 + x^{(2)} e_2 + \ldots x^{(m)} e_m$ jenen Punkt dieses Raumes als Bildpunkt zuweist, dessen Koordinaten in bezug auf irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Werte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(m)}$ haben. An die Stelle der früheren Annahme, daß die $A_i$ über $H$ und unter $K$ fallen sollen, tritt jetzt — da die $A_i$ extensive Größen sind — die entsprechende Annahme, daß die $A_i$ oder genauer gesprochen ihre Bildpunkte einem bestimmten „Eigebiete“ $E$ angehören sollen; als Eigebiet wird hiebei ein solches, zwischen endlichen Grenzen gelegenes Gebiet des Bildraumes definiert, welches die gerade Verbindungsstrecke irgend zweier seiner Punkte vollständig enthält (und zwar wird fast durchgängig das Eigebiet als abgeschlossenes Punktgebiet angenommen, so daß die Begrenzung $E$ des Eigebiets $E$ als zu $E$ gehörig zu betrachten ist). Die Summe: $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \ldots \varepsilon_n a_n$, oder genauer ihr Bildpunkt gehört dann dem Eigebiete $\varepsilon_0 E$ an, welches aus $E$ entsteht, wenn man die Koordinaten der sämtlichen Punkte von $E$ mit dem Faktor $\varepsilon_0$ multipliziert: Dies ist die Form, welche das Abelsche Lemma unter den verallgemeinerten Bedingungen annimmt. — Weiterhin wird in diesem Teile die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß der Punkt: $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \ldots \varepsilon_n a_n$ auf die Begrenzung des Eigebiets $\varepsilon^0 E$ zu liegen kommt, aufgeworfen und erschöpfend beantwortet. Die angestellten Betrachtungen werden dann verallgemeinert, indem von der Reihe der reellen Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ nur mehr vorausgesetzt wird, daß sie monoton sei, die früheren Annahmen bezüglich der $\varepsilon_i$ aber fallen gelassen werden. Von der Summe: $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \ldots \varepsilon_n a_n$ wird dann gezeigt, daß ihr Bildpunkt einem Eigebiete $F = (\varepsilon_0 - \varepsilon_n) E + \varepsilon_n E$ angehört, dessen Punkte dadurch erzeugt werden können, daß man die Koordinaten irgend zweier Punkte von $E$ beziehlich mit $(\varepsilon_0 - \varepsilon_n)$ und $\varepsilon_n$ multipliziert und summiert; [d. h. die Koordinaten $z^{(k)}$ der Punkte von $F$ (und nur dieser Punkte) sind in der Form $(\varepsilon_0 - \varepsilon_n) x^{(k)} + \varepsilon_n y^{(k)}$ darstellbar, wenn unter $x^{(k)}$ und $y^{(k)}$ die Koordinaten irgend zweier Punkte von $E$ verstanden werden. Auch hier wird dann die Frage nach den Bedingungen dafür, daß das Bild der mehrerwähnten Summe auf die Begrenzung des Eigebiets $F$ zu liegen kommt, vollständig erledigt.

Der II. Teil bezieht sich auf die unendliche Reihe: $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots$ in infinitum, wobei vorausgesetzt wird, daß $\varepsilon_n$ mit wachsendem Stellenzeiger $n$ einer bestimmten Grenze sich nähert, und daß die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ in infinitum konvergiert. Für diese Reihe werden dann die nämlichen Betrachtungen angestellt, wie im I. Teile hinsichtlich der dort untersuchten Summe.

Der III. Teil hat zum Gegenstand das Integral:

$\int_{t_0}^{t'} f(x, y)\, g(x, y, i)\, d(x + y i)$, wobei der Integrationsweg ein Kurvenstück $t_0 t'$ in der $x y$-Ebene ist (von endlicher Länge) und $i$ die gewöhnliche imaginäre Einheit bedeutet. Den Größen $a_i$ im I. und II. Teile entsprechen hier die Differentialausdrücke $[g(x, y, i)\, d(x + y i)]$, den Größen $\varepsilon_i$ die Funktionswerte $f(x, y)$, welche den verschiedenen Stellen $t$ des Integrationsweges entsprechen. Die

Digitized by Google

Funktion $f$ und $g$ werden auf dem Integrationswege als eindeutig und integrierbar vorausgesetzt; und von dem Integrale $\int_{t_0}^{t} g(x, y, i)\, d(x + y i)$, welches vom Anfangspunkte $t_0$ des Kurvenstückes zu irgend einem beliebigen Punkte $t$ desselben zu erstrecken ist, wird angenommen, daß die den verschiedenen Werten dieses Integrals entsprechenden Bildpunkte einem Eigebiet $E$ der $xy$-Ebene angehören. Von der Funktion $f(x, y)$ wird zunächst vorausgesetzt, daß sie beim Durchlaufen des Integrationsweges von $t_0$ nach $t'$ nirgends zunimmt und positiv ist; weiterhin wird an Stelle dieser Voraussetzung die allgemeinere gesetzt, daß $f(x, y)$ auf dem Integrationswege sich monoton verhält.

Von dem Werte des Integrals $\int_{t_0}^{t'} f(x, y)\, g(x, y, i)\, d(x + y i)$ wird nun gezeigt, daß sein Bildpunkt einem gewissen anderen Eigebiet der $xy$-Ebene angehört, und es werden wieder die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß dieser Bildpunkt auf die Begrenzung des genannten Eigebiets zu liegen kommt. Durch Spezialisierung, indem $g(x, y, i)$ als eine Funktion $g(z)$ des komplexen Arguments $x + y i = z$ vorausgesetzt wird, ergibt sich ein Satz, der als Verallgemeinerung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung (in der Form von Weierstraß und Du-Bois-Reymond) auf das komplexe Gebiet angesehen werden kann.

Im voranstehenden ist der Gedankengang und wesentliche Inhalt des Buches kurz skizziert. Der Beweisapparat ist sehr sorgfältig und eingehend ausgearbeitet und der Forderung nach größtmöglicher Präzision und Genauigkeit in vollem Maße Rechnung getragen. Allerdings ist auf der anderen Seite nicht zu verkennen, daß zwischen den im Grunde so einfachen Sätzen, um die es sich handelt, und dem großen Apparate, der zu ihrer Begründung aufgeboten wird, ein gewisses Mißverhältnis besteht. Es dürfte wohl nicht zu gewagt sein zu glauben, daß sich ein viel kürzerer Weg müßte finden lassen.

Um zum Schlusse die Eigenart des Buches zusammenfassend zu charakterisieren, möge es gestattet sein, einen Vergleich aus der Optik heranzuziehen: Es wird in dem Buche gewissermaßen ein kleiner und schmaler Streifen aus einem Spezialgebiete der Analysis unter die Lupe genommen und in mikroskopischer Vergrößerung — vor dem Auge des Lesers aufgerollt.

*Josef Grünwald.*

**Vorlesungen über die Vektorenrechnung.** Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Von Dr. E. Jahnke, etatsmäßiger Professor an der königl. Bergakademie zu Berlin. Mit 32 Figuren im Text. XII. u. 235 S. gr. 8. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Preis: geb. M. 5·60.

Das Buch beschäftigt sich nicht allein mit dem, was man gewöhnlich Vektorenrechnung nennt, sondern hat als eine Einführung in die Graßmannsche Ausdehnungslehre zu gelten, in die das Rechnen mit Vektoren sich ja bekanntlich einordnen läßt. Dabei geht der Verfasser offenbar von dem Grundsatze aus, daß der Wert einer Methode sich am besten in der Anwendung auf besondere Aufgaben zeigt. In der Tat beruht der Hauptwert des Buches in der Fülle der gebotenen Anwendungen der Ausdehnungslehre auf die verschiedensten Teile der Geometrie (insbesondere auch neuere Dreiecksgeometrie),

Digitized by Google

Mechanik und mathematischen Physik. Der Leser wird freilich manchmal nur mit Schwierigkeit die aus großen Gebieten herausgegriffenen, durchaus nicht immer elementaren Aufgaben völlig verstehen, da die hiezu nötigen Begriffe selbstverständlich nur ganz kurz erläutert werden konnten; aber die große Auswahl bietet sicherlich jedem Interessantes. Die Arbeit, welche diese verdienstvolle Zusammenstellung erforderte, verdient alle Anerkennung.

Das Buch besitzt aber bei seinen sonstigen Vorzügen einen Fehler, von dem ich fürchte, daß er auf manchen Leser abschreckend wirken wird: der Aufbau der Theorie ist undurchsichtig und läßt an Strenge sehr viel zu wünschen übrig. Fast nirgends sind Annahmen und Folgerungen klar auseinandergehalten, notwendige Beweise werden durch Definitionen ersetzt u. s. w. Beispiele dafür bietet jedes einzelne Kapitel. Ich verstehe, daß der Verfasser in dem löblichen Bestreben, Anwendung zu bringen, auf eine breite Ausarbeitung der theoretischen Grundlagen in den Vorlesungen, denen dieses Buch entsprossen, nur wenig Zeit aufwenden wollte und konnte. Aber so hätte er es im Interesse der Ausdehnungslehre nicht machen sollen. Denn jeder mit einigem kritischen Geiste begabte Hochschüler wird das Unlogische dieses Verfahrens erkennen und nun glauben, diese Unklarheiten lägen in der Graßmannschen Schöpfung selbst, die doch, mit ganz geringen Ausnahmen, ein Muster logischen Denkens ist. Nur um gegen diese Meinung anzukämpfen, mußte ich diesen Fehler des Buches hervorheben.

Dadurch daß der Verfasser den in der Physik üblich gewordenen verschiedenartigen Bezeichnungen Rechnung getragen, hat die ursprünglich Graßmannsche Bezeichnung an Einfachheit gar manches verloren. Mir dünkt es z. B. sonderlich, wenn man ein Gebilde, das sich als Differenz zweier anderer darstellen läßt, nun mit einem neuen Zeichen versieht (Punkt-Strecke). Aber dies ist schließlich unwesentlich. Bedenklicher für das Verständnis ist das Vermeiden von Zwischenklammern; bei einer neuen Auflage sollten sie statt der jetzigen, vom Auge nicht immer beachteten Zwischenräume gesetzt werden, wenn auch die Formeln dadurch ein scheinbar weniger einfaches Aussehen erhalten.

Das weitere Eingehen auf Einzelheiten würde zu weit führen. Erwähnen möchte ich nur noch, daß der auf S. 125 (unten) angemerkte Determinantensatz in dieser Form unrichtig ist, da die zwischen den $\alpha_{ik}$ bestehenden Relationen wohl quadratisch sind, aber nicht die angegebene Form haben.

Das Buch kann also allen jenen bestens empfohlen werden, die sich, ohne Bedürfnis nach stichhaltigen Begründungen, mit den Begriffen und Rechnungsregeln der Ausdehnungslehre (unter besonderer Berücksichtigung der Vektorenrechnung) rasch bekannt machen oder hübsche Anwendungen dieser Disziplin kennen lernen wollen. *E. Müller.*

**Nichteuklidische Geometrie.** Von Heinrich Liebmann, a. o. Prof. a. d. Universität Leipzig. G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1905. Sammlung Schubert XLIX. VIII + 248 S. u. 22 Textfiguren. Preis: geb. M. 6·50.

Die nichteuklidische Geometrie wurde von Gauß, Lobatschefskij und J. Bolyai rein logisch aufgebaut, ohne daß ihnen eine Realisierung vorschwebte. Sie erregte jedoch die Aufmerksamkeit weiterer Kreise erst dann,

Digitized by Google

als E. Beltrami, F. Klein, H. Poincaré u. a. verschiedene Interpretationen dieser Geometrie gaben, wodurch jeder ihrer Begriffe und Sätze eine reale Bedeutung erhielt. Hierdurch verlor sie den Charakter einer sich bloß mit Hirngespinsten beschäftigenden Disziplin, wurde vielmehr ein lehrreiches Beispiel zur Ökonomie des Denkens.

Eine der schönsten und elementarsten Interpretationen der nichteuklidischen Geometrie bildet die Geometrie im „Kugelgebüsch" oder für die Ebene die Geometrie im Kreisbündel. Jenachdem die Orthogonalkugel des Gebüsches bei reellem Zentrum einen reellen, rein imaginären oder verschwindenden Radius besitzt, liefert die Geometrie im Kugelgebüsch eine Interpretation der hyberbolischen, elliptischen oder parabolischen Geometrie in dem Sinne, daß die Kreise und Kugeln des Gebüsches als Geraden und Ebenen der nichteuklidischen Geometrie gelten und die Spiegelungen (Inversionen) in Bezug auf die Kugeln des Gebüsches als nichteuklidische Spiegelungen an Ebenen betrachtet werden.

An solche Vorstellungen knüpft das vorliegende Buch an, sie begleiten es in allen Teilen, hätten aber meines Erachtens zur völligen Klarheit noch eingehender behandelt werden müssen, besonders hinsichtlich der verschiedenen geometrischen Formen. Unter der weitgehenden Berücksichtigung, die die selbständige synthetische Behandlung der nichteuklidischen Geometrie und ihre verschiedenen Richtungen erfuhr, litt die Einheitlichkeit des Buches und in dem Bestreben, die Fülle des Stoffes auf engem Raum zusammenzudrängen, die leichte Verständlichkeit, da Erläuterungen und Beweise sehr kurz gehalten, letztere sogar teilweise ganz unterdrückt sind. Insbesondere erscheint mir die Anzahl der Figuren viel zu gering.

Was den Inhalt anbelangt, so wird in den zwei ersten Kapiteln nach Besprechung des Parallelenpostulats und seiner Scheinbeweise sowie der Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, auf analytischem Wege die Kreisgeometrie der Ebene kurz entwickelt und die hyperbolische Geometrie nach Poincaré als Geometrie in einem Kreisbündel gedeutet, dessen Orthogonalkreis eine Gerade ist. Als hyperbolische Ebene erscheint dabei nur die eine Halbebene der euklidischen Ebene; die Punkte jener Geraden sind als unendlichfern anzusehen. Im III. Kapitel wird die synthetische Geometrie der hyperbolischen Ebene entwickelt, wobei aber auch Sätze aus der Raumgeometrie auftreten; auf die Ausführung von Konstruktionen wird dabei ein besonderes Augenmerk gerichtet. Die nächsten Kapitel beschäftigen sich mit der Trigonometrie in der hyperbolischen Ebene, mit Längen- und Inhaltsbestimmungen in der Ebene und im Raum, dann ziemlich ausführlich mit der analytischen Geometrie der Ebene (Kurven 2. Ord.) unter Verwendung der Weierstraßschen Koordinaten.

Die sphärisch-elliptische Geometrie des Raumes wird im VII. Kapitel ziemlich kurz als Geometrie auf einer Kugel des $R_4$ oder als Geometrie in einem Kugelgebüsch (der Verfasser sagt entgegen dem sonstigen Gebrauche dieses Wortes „Kugelbündel") mit imaginärer (nullteiliger) Orthogonalkugel behandelt. Da dieses Gebüsch alle Kugeln und Kreise enthält, die eine reelle Kugel in Hauptkreisen bezw. Gegenpunkten schneiden, so sind die darin auftretenden Figuren der Anschauung leicht zugänglich. Besonders beachtenswert erscheinen mir hier die §§ 45 und 46, die von der Cliffordschen Fläche

Digitized by Google

und den Cliffordschen Parallelen handeln. Erstere ist der Ort aller Punkte des sphärischen dreidimensionalen Raumes, die von einer Geraden einen bestimmten Abstand haben. Wählt man in der obigen Interpretation die elliptische Gerade als euklidische Gerade $A$ des Gebüsches, so wird die Cliffordsche Fläche jetzt ein Torus mit $A$ als Drehachse. Die beiden Kreise auf dieser Fläche, die außer Meridian und Parallelkreis durch einen ihrer Punkte gehen, sind als Repräsentanten von Geraden die beiden Cliffordschen Parallelen zu $A$ durch den gewählten Punkt.

Das Schlußkapitel behandelt noch einige Punkte aus der nichteuklidischen Mechanik.

Diese kurze Übersicht deutet freilich nicht die Reichhaltigkeit des Buches zur Genüge an.

Zum Schlusse erlaube ich mir noch auf folgende sinnstörende Druckfehler oder Versehen aufmerksam zu machen, die mir bei der Durchsicht auffielen.

S. 37, Z. 17 v. o. müßte es statt „$O$ zum Mittelpunkte hat“ etwa heißen „den Schnittpunkt von $k_1'$ und $k_2'$ zum Mittelpunkt hat“.

Auf S. 38, letzter Abschnitt, sollte nicht $P$ sondern der andere Schnittpunkt von $h_1$ und $h_2$ als Inversionszentrum verwendet werden.

S. 41, ließ im Nenner des zweiten Bruches der ersten Gleichung $+ 1$ statt $- 1$.

S. 45, Z. 19 v. u. lies: $E_1\ O$ statt $E\ O_1$.

S. 94, 95 sollte nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche „Flächenwinkel“ statt „Kantenwinkel“ stehen.

S. 96, Z. 7 v. o., nach $A\ A'$ lies: auf Ebene $A\ B\ C$.

S. 118, Fußnote, lies: Hyperbelfunktionen statt Hyperbelformationen.

*E. Müller.*

**Parallelperspektive.** Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. Von Prof. J. Vonderlinn in Breslau. Mit 121 Figuren. Leipzig 1905. (Sammlung Göschen Nr. 260). 112 S. Preis: 80 Pf.

Der verdiente Verfasser einiger ziemlich verbreiteter Lehrbücher hat hier für solche Leser, die mit der Auf- und Grundrißmethode vertraut sind, das Wichtigste über recht- und schiefwinklige Axonometrie sowie schiefe Projektion zusammengestellt. Da die zahlreichen Figuren bei dem bekannten kleinen Format der Sammlung Göschen schon einen bedeutenden Raum einnehmen, so mußte der Text sehr kurzgehalten werden. Vielleicht hätte der Verfasser durch Weglassung weniger wichtiger Dinge, insbesondere auch einiger nichts Neues bietender Figuren, Raum für eine eingehendere Besprechung gewinnen können.

Die Figuren sind hübsch und klar gezeichnet. Bemerkt seien jedoch die Sichtbarkeitsfehler im Grundriß der Figur 1 und im Aufriß der Figur 2, ferner einige Fehler in den Schlagschatten der Figur 110. Im Text wird manche ungenaue Ausdrucksweise einem denkenden Leser unnütze Zweifel erregen. Mir ist z. B. unklar geblieben, was in der Überschrift des II. Abschnittes das Wort „Kegelkreis“ bezeichnen soll. *E. Müller.*

Digitized by Google

**Grundzüge der niederen Geodäsie.** Von Theodor Tapla. III. Kartierung, mit 14 lithographierten Tafeln 107 pg. (Franz Deuticke, Leipzig u. Wien).

Das vorliegende Werk bildet den dritten Teil der „Grundzüge der niederen Geodäsie" desselben Verfassers, deren erster Teil bereits erschienen ist. Daß dieser dritte Teil vor dem zweiten erscheint, hat darin seinen Grund, daß derselbe als Neuauflage der „Geodätischen Konstruktionen und Berechnungen" (Wien 1890) gedacht ist, welch letztere schon vergriffen sind.

Ein Vergleich mit der alten Auflage zeigt sofort, daß das ganze Material einer gründlichen Neubearbeitung und Umstellung unterzogen wurde. Die Einleitung bildet die Besprechung der gewöhnlichen Zeichenrequisiten, besonders Kartierungsapparate und Behelfe, sowie der wichtigsten Prinzipien der Ausgleichsrechnung. Hierauf werden die Kartierungsmethoden beschrieben, und zwar ausgehend von einfachen Netzteilen und Polygonen, fortschreitend zur Kartierung von Gebieten, die einen großen Teil der Aufnahmssektion, eventuell die ganze oder auch deren mehrere umfassen. Innerhalb dieser Abteilungen werden die Methoden behandelt, die zur Anwendung kommen, je nach der Form, in der das Material vorliegt, nach den Requisiten, die zur Verfügung stehen, und nach der zu erreichenden Genauigkeit. Den Schluß bildet die Konstruktion von Schichtenplänen und eine kurze Besprechung des Vorganges beim Kopieren und Vergrößern oder Verkleinern von Plänen.

Die zahlreichen Tafeln, welche beigegeben sind, sowie die klare Darstellung ermöglichen ein leichtes und angenehmes Studium, die übersichtliche Anordnung des Materials verleiht dem Werke auch den Charakter eines Nachschlagebuches. *A. P.*

**Tables des intérêts composés, annuités et amortissements pour des taux variant de dixièmes en dixièmes et des époques variant de 100 à 400 suivant les taux.** Par A. Arnaudeau: Paris, Gauthier-Villars 1906.

Das vorliegende Tabellenwerk enthält für die die Zinsfüße von 0·5 bis 6·4 in den im Titel angegebenen Intervallen die in solchen Tabellenwerken üblichen Tafeln für die Aufzinsungs- wie die Diskontierungszahlen, ferner die Barwerte der Nachhinein-Annuitäten und deren reziproken Werte; eine Tabelle ist den Werten der Aufzinsungsfaktoren zu 1 bis 5·9% für 1 bis 12 Monate gewidmet. Gegenüber dem in Österreich in der Praxis wohl am meisten verwendeten Tabellenwerke von Spitzer bietet das vorliegende den Vorteil, einerseits bis zu 400 Termine zu berücksichtigen, anderseits durch die Wahl von äquidistanten Werten von Zinssätzen die Anwendung der Newtonschen Interpolationsformel bedeutend zu erleichtern und in übersichtlicher Rechnung zu gestatten, während bei Spitzer das Hauptgewicht auf der Auswahl der häufigst vorkommenden Prozentsätze liegt. Auf diesen Umstand wird von Herrn Achard in der Vorrede und vom Verfasser selbst in der Einleitung hingewiesen, und die Anwendung der Formel an mehreren Beispielen erläutert.

**Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes.** Von J. Classen, 249 S. mit 61 Fig. Leipzig, G. J. Göschen 1905.

Das sehr faßlich geschriebene Buch beabsichtigt einerseits gebildeten Laien einen Einblick in die Arbeitsmethode der physikalischen Wissenschaft

Digitized by Google

zu gewähren und anderseits den Lehrern der Physik an höheren Schulen bei der Vorführung der einschlägigen Versuche vorbildlich an die Hand zu gehen. Es gliedert sich in drei Teile: in den ersten werden eine Reihe von Versuchen besprochen, welche zur Begründung der Wellentheorie des Lichtes führen; im zweiten werden andere periodische Naturvorgänge, darunter auch elektrische von ähnlicher Gesetzmäßigkeit behandelt und im dritten folgt eine Vergleichung der optischen und elektrischen Erscheinungen samt einer Erörterung der Konsequenzen, die sich bei der Annahme ergeben, daß diese beiden scheinbar so gänzlich verschiedenen Gebiete ganz dem gleichen System von Kräften in der Natur ihren Ursprung verdanken. Das Buch verdient wärmstens empfohlen zu werden. *Mc.*

**Les quantités élémentaires d' Électricité: Jons, Électrons, Corpuscules.** Mémoires réunis et publiés pour Henri Abraham et Paul Langevin (2 Halbbände, XVI — 1144 S. mit zahlreichen Figuren, Paris, Gauthier-Villars, 1905).

Dieses von der Société Française de Physique herausgegebene Sammelwerk umfaßt 97 Abhandlungen aus dem im Titel gekennzeichneten Gebiete; soweit die Originalabhandlungen fremden Sprachen angehörten, sind sie in französischer Übersetzung gebracht. Die Anordnung ist eine alphabetische nach den Autorennamen, doch gestattet ein nach sachlichen Gesichtspunkten geordnetes Inhaltsverzeichnis eine leichte Orientierung über die behandelten Themen.

Die Hauptabsicht der Herausgeber: die grundlegenden und bahnbrechenden Arbeiten auf dem Gebiete der modernen atomistischen Elektrizitätslehre zu sammeln und damit dem auf diesem Gebiete arbeitenden Forscher ein Nachschlagewerk zu bieten, ist im Großen und Ganzen durchaus gelungen. Wenn auch in der Auswahl der Einzelarbeiten bisweilen eine eben nicht zu vermeidende Willkür zu Tage tritt, so zeigen doch Namen wie Becquerel, Curie, Hertz, Lenard, Lorentz, Rutherford, J. J. Thomson u. a., daß wenigstens die wichtigsten Arbeiten nicht fehlen. *Schwd.*

**Zur Klarstellung der Begriffe Masse, Gewicht, Schwere und Kraft.** Von Olof Linders, (22 Seiten, Leipzig, Jäh & Schunke 1905).

Die vielfach herrschende Unklarheit über die im Titel genannten Begriffe sucht der Verfasser zu beseitigen, indem er zunächst in klarer Darstellung die verschiedene Bedeutung dieser Begriffe auseinandersetzt und dann Vorschläge zu einer einheitlichen Bezeichnungsweise, respektive zu einem einheitlichen technischen Maßsystem aufstellt. Das Wesentliche dieses Systems ist: Kilogrammaße als Masseneinheit und zugleich Kilogrammgewicht (bei Normalschwere von Paris) als Krafteinheit, außerdem Dezimeter als Längen- und Sekunde als Zeiteinheit. Das Maßsystem des Verfassers ist in sich widerspruchsfrei, bietet aber auch keine Vorteile gegenüber dem „absoluten" C. G. S.-System der Physik. Entschieden zu widersprechen ist der Behauptung des Verfassers, dieses System sei wohl für „philosophische", nicht aber für praktische Zwecke geeignet. Gerade allgemein theoretische Betrachtungen — solche meint wohl der Verfasser mit dem Ausdrucke „philosophisch" — können oft mit algebraischen Zeichen ausgeführt werden ohne Rücksicht auf die Ver-

Digitized by Google

wendung eines speziellen Maßsystems, der Experimentalphysiker oder der Techniker aber bedarf eines einheitlichen Maßsystems mit möglichst einfachen und übersichtlichen Zusammenhängen zwischen den einzelnen Einheiten. Der alte auch vom Verfasser wiederholte Einwand, daß häufig unbequem große Zahlen im C. G. S.-System auftreten, richtet sich gegen jedes Maßsystem; sobald Größen so verschiedener Ordnung wie Sterndistanzen und Lichtwellenlängen, oder elektrische Leitfähigkeiten von Metallen und isolierenden Materialien einheitlich gemessen werden sollen, können unbequem große oder unbequem kleine Zahlen nicht vermieden werden. *Schwd.*

**Leitfaden der Wetterkunde**, gemeinverständlich bearbeitet von Dr. R. Börnstein, Prof. a. d. kgl. Landwirtschaftl. Hochschule zu Berlin, mit 61 in den Text gedruckten Abbildungen und 22 Tafeln. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage, XI + 230 S. M. 6 — Braunschweig, Friedr. Vieweg und Sohn 1906.

Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten, wie dies der Verfasser selbst hervorhebt, durch besondere Berücksichtigung der neueren Studien über den Wärmeaustausch in Boden und Luft, der Beziehungen des Waldes zu Temperatur und Niederschlag, der Temperaturverhältnisse und Bewegungen der hohen Luftschichten, Sonnenscheindauer, Größe und Gestalt der Regentropfen, der auf- und absteigenden Luftströme, Entstehung der Blitze, Blitzgefahr, Elektrizitätshaushalt der Atmosphäre etc. Bezüglich des letztgenannten Kapitels hätten auch in populärer Darstellung vielleicht die neueren Anschauungen über die atmosphärische Elektrizität mehr Berücksichtigung finden können, als dies geschehen ist; insbesondere, da durch den Plan eines „internationalen Beobachtungsjahres für atmosphärische Elektrizität", der bald zur Ausführung gelangen dürfte, das Interesse gerade an diesen Fragen allgemeiner geweckt zu werden verdient. *St. M.*

**Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie** in vier Bänden. Zehnte umgearbeitete und vermehrte Auflage, herausgegeben von Leop. Pfaundler, Prof. der Physik a. d. Univ. Graz. 1. Band, 2. Abteilung, S. 547—801. Braunschweig, Verlag v. Friedr. Vieweg und Sohn 1906.

Der ersten Abteilung des ersten Bandes ist die zweite rasch gefolgt. Sie enthält die Akustik und ist, wie dies der Natur dieses Gebietes entspricht, gegenüber der letzten Auflage ziemlich unverändert geblieben. Eingehender als früher sind die Reflexionserscheinungen im Ellipsoid und Paraboloid behandelt, der Stimmgabelchronograph, die Galtonpfeife und einige andere moderne Apparate wurden aufgenommen. Leider fanden hingegen modernere Formen von Phonographen und Grammophonen keine Berücksichtigung. Es wäre zu wünschen, daß die weiteren Bände in gleich raschem Tempo erscheinen könnten. *St. M.*

**Sur les Électrons** par Sir Oliver Lodge, tráduit de l'Anglais par E. Nugues et J. Péridier; Préface de P. Langevin. 168 S. Paris, Gauthier-Villars, 1906 Frs. 2.75.

Unter dem Titel Actualités scientifiques erscheinen in obigem Verlage seit einiger Zeit fortlaufend sehr hübsche Büchlein, die in gleichem Sinne, wie

Digitized by Google

die Sammlung „Scientia“ und die deutsche Sammlung „die Wissenschaft“ den Zweck verfolgen, die neuesten Errungenschaften einem größeren Publikum zugänglich zu machen. Da manchem Deutschen das Französische geläufiger ist, als das Englische, insbesondere aber auch wegen des niedrigen Preises sind die Vorlesungen Lodges über obigen Gegenstand in der vorliegenden Form bestens zu begrüßen. *St. M.*

**Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions.** Par Ernst Lindelöf. (Collection de monographjes sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). Gauthier-Villars, Paris 1905. VIII + 144 S. Preis Frs. 3·50.

In Kapitel I werden kurz die grundlegenden Sätze der Funktionentheorie (Residuensatz, Taylorsche Reihe etc.) begründet. In Kapitel II werden zunächst die bekannten Resultate hergeleitet, die sich aus dem Residuensatze durch Verwendung der logarithmischen Derivierten ergeben; dieselben werden verwendet: zunächst zur Begründung der Lehre von den impliziten Funktionen, speziell von Lagranges Reihenentwicklung der inversen Funktionen; sodann zur Aufstellung der Jensenschen Relation zwischen Lage und Anzahl der Nullstellen und Pole von $f(x)$ im Innern eines Kreises und den Werten von $|f(x)|$ auf der Peripherie dieses Kreises. Es folgt die Anwendung des Residuensatzes auf meromorphe Funktionen: es wird gezeigt, wie die Einführung des „résidu intégral“ zur Summation unendlicher Reihen dienen kann; hier ergeben sich die bekannten Reihendarstellungen der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, sowie die trigonometrischen Reihen für die Bernoullischen Polynome und für gewisse ähnliche von Hermite eingeführte Polynome; auch können die gefundenen Sätze in vielen Fällen zur Partialbruchzerlegung meromorpher Funktionen verwendet werden. Endlich wird an vielen Beispielen gezeigt, wie der Residuensatz zur Auswertung bestimmter Integrale dienen kann. Kapitel III behandelt die Anwendung des Residuensatzes auf die Summation von Reihen. Schon Cauchy bemerkte, daß auf Grund des Residuensatzes die Gleichungen bestehen:

$$\sum_{m}^{n} f(\nu) = \frac{1}{2i}\int \operatorname{ctg} \pi z f(z)\, dz; \quad \sum_{m}^{n} (-1)^{\nu} f(\nu) = \frac{1}{2i}\int \frac{1}{\sin \pi z} f(z)\, dz.$$

die Integrale über geeignete geschlossene Kurven erstreckt. Aus diesen beiden Formen gewinnt nun der Verfasser in äußerst systematischer Weise zahlreiche, von verschiedenen Autoren angegebene Formeln zur Summation endlicher und unendlicher Reihen mit Hilfe bestimmter Integrale. Von den Anwendungen, die von diesen Formeln gemacht werden, sei hervorgehoben die Ausdrückung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, sowie der Bernoullischen und Hermiteschen Polynome durch die bekannten Integrale. Weiter ergeben sich aus den gewonnenen Formeln durch leichte Umformungen die Euler-Mac Laurinsche Summenformel sowie zahlreiche verwandte Formeln mit sehr brauchbaren Darstellungen des Restgliedes. Auch wird hier noch gezeigt, wie sich diese Formeln auf elementarem Wege gewinnen lassen, ohne die für das obige wesentliche Voraussetzung, daß die Funktion $f(x)$ analytisch sei. In Kapitel IV werden nun aus den im vorigen Kapitel aufgestellten Formeln zahlreiche teils bereits bekannte, teils neue Integraldarstellungen der Funktionen $\lg \Gamma(x)$, $\zeta(s)$, $\zeta(s, w)$ hergeleitet; besonders sei auf die Untersuchung der

Digitized by Google

Stirlingschen Reihe hingewiesen, wo eine Abschätzung des Restes durchgeführt ist, die die von Stieltjes gegebene an Schärfe bedeutend übertrifft. In Kapitel V (Anwendungen auf die analytische Fortsetzung und auf die asymptotische Untersuchung der durch eine Taylorsche Entwicklung gegebenen Funktionen) wird zunächst der folgende, von Le Roy herrührende Satz bewiesen: Ist die Funktion $\varphi(z)$ $(z = \tau + it)$ für $\tau \geq \alpha$ regulär und ist ebenda für genügend großes $\rho$: $|\varphi(\alpha + \rho e^{i\psi})| < e^{(\vartheta+\varepsilon)\varrho}$ ($\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl), so ist $F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\nu) x^\nu$ regulär für alle $x = re^{i\Theta}$, die im Winkel $\vartheta < \Theta < 2\pi - \vartheta$ liegen. Die verwendete Beweismethode (sie beruht auf der aus dem Residuensatze folgenden Beziehung:

$$\sum_{m}^{n} \varphi(\nu) x^\nu = \int \frac{\varphi(z)\, x^z}{e^{2\pi i z} - 1}\, dz$$

das Integral erstreckt über eine geeignete geschlossene Kurve) gestattet auch, das asymptotische Verhalten von $F(x)$ im genannten Winkel vollständig klarzustellen. Auf Grund dieser Resultate gelingt es, ganze Funktionen herzustellen, die in jedem, die reelle Achse nicht enthaltenden Winkelraume mit unendlich wachsendem $x$ gleichmäßig nach Null konvergieren, woraus mit Mittag-Leffler weiter die Existenz ganzer Funktionen gefolgert werden kann, die auf jedem Radiusvektor gegen Null konvergieren. Ferner folgt aus den bisherigen Resultaten auch sehr leicht das Bestehen der Gleichung: $\lim_{\sigma=0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\nu^\sigma}\right)^\nu = \frac{1}{1-x}$ für alle $x$ (ausgenommen die reellen $x \geq 1$), woraus weiter folgt, daß $\lim_{\sigma=0} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left(\frac{x}{\nu^\sigma}\right)^\nu$ die analytische Fortsetzung von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ im ganzen Holomorphiesterne darstellt. Sehr interessante Resultate gibt endlich die Anwendung einer in Kapitel III bewiesenen Summenformel auf die Reihe $F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\nu) x^\nu$. Es gelingt unter gewissen Voraussetzungen über $\varphi(z)$ Aufschluß zu gewinnen über das Verhalten sämtlicher Zweige der (im allgemeinen unendlich vieldeutigen) Funktion $F(x)$. Insbesondere sei noch hervorgehoben die Anwendung dieser allgemeinen Theorie auf die Funktion $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu^k}$. Das Vorstehende dürfte einen Begriff von dem reichen Inhalt des Buches geben. Es kommen dazu zahlreiche historische Notizen, die die Verdienste Cauchys ins hellste Licht setzen. Da auch die Form der Darstellung eine äußerst klare und sorgfältige ist, so haben wir es hier zweifellos mit einem der schönsten Bücher der neueren mathematischen Literatur zu tun. *Hans Hahn.*

**Stetigkeit und irrationale Zahlen** von Richard Dedekind. 3. Aufl. Braunschweig, 1905. (Fr. Vieweg und Sohn.)

Dritte unveränderte Auflage der weitverbreiteten und wohlbekannten, grundlegenden Schrift.

Digitized by Google

# Bedeutende Preisermäßigung!

Im Besitze der gesamten Vorräte, bieten wir folgende in Fachkreisen bestens bekannte und berühmte Zeitschrift zu sehr ermäßigten Preisen an:

# Archiv der Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von **A. Grunert,** fortgesetzt von **R. Hoppe.**

I. Reihe: Band 1—2, 9—19, 21—25, 27—48 und 51—70 (1841—1883).
II. Reihe: Band 1—17 (1884—1899),
Registerhefte: I zu Band 1—25; II zu Band 26—40; III zu Band 41—54 IV zu Band 55—70.
(Die Bände 3—8, 20, 26 und 49—50 sind vergriffen und nicht mehr zu haben).

Wir offerieren bis auf Wiederruf, da spätere Preiserhöhung vorbehalten sobald ein bestimmter Vorrat verkauft ist:

**1 Exemplar aller vorrätigen 77 Bände mit den 4 Registerheften** statt des Ladenpreises von **950 Kronen** für **250 Kronen.**

Einzelne Bände der I. Reihe für **4 Kronen.**
Einzelne Bände der II. Reihe für **6 Kronen.**

Die bedeutendsten Mathematiker und Physiker unserer Zeit zählen zu den Mitarbeitern dieses seit 65 Jahren erscheinenden Archivs, das hauptsächlich den Bedürfnissen der Mittelschulprofessoren entgegenkommt.

Wir empfehlen deshalb ganz speziell den Gymnasial- und Realschulbibliotheken die Gelegenheit zu benützen, etwa fehlende Bände zu ergänzen oder wo das Archiv in der betreffenden Bibliothek noch fehlt, alle 77 Bände anzuschaffen.

Bestellungen beliebe man an uns selbst oder an jede beliebige Buchhandlung zu richten.

**J. Eisenstein & Co.**
Buchhandlung u. Antiquariat,
**Wien, IX/3, Währingerstr. 2.**


Digitized by Google

TESCHEN.
K. u. K. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

To avoid fine, this book should be returned on or before the date last stamped below

50M-12-60-96455

Digitized by Google

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days

DATE DUE

28D JAN 0 8 1996

5
6
7

Digitized by Google

Digitized by Google